**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ,
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ГОУ ВПО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Утверждаю

декан факультета

11.06.2019

Математический анализ

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой	**Высшей математики**
Учебный план	21050551_19_6фпгнп н.plx Специальность 21.05.05 - РФ, 630004 - КР Физические процессы горного или нефтегазового производства. Специализация №2 "Физические процессы нефтегазового производства"
Квалификация	**специалист**
Форма обучения	**очная**
Общая трудоемкость	**8 ЗЕТ**

Часов по учебному плану	288
в том числе:	
аудиторные занятия	198
самостоятельная работа	53,6
экзамены	35,7

Виды контроля в семестрах:
экзамены 2
зачеты 1
зачеты с оценкой 3

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**1 (1.1)**		**2 (1.2)**		**3 (2.1)**		Итого	
Недель	18 2/6		18		18			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	36	36	36	36	26	26	98	98
Практические	36	36	36	36	28	28	100	100
Контактная работа в период теоретического обучения	0,2	0,2			0,2	0,2	0,4	0,4
Контактная работа в период экзаменационной сессии			0,3	0,3			0,3	0,3
Итого ауд.	72	72	72	72	54	54	198	198
Контактная работа	72,2	72,2	72,3	72,3	54,2	54,2	198,7	198,7
Сам. работа	17,8	17,8	18	18	17,8	17,8	53,6	53,6
Часы на контроль			35,7	35,7			35,7	35,7
Итого	90	90	126	126	72	72	288	288

Программу составил(и):
*к.ф.-м.н., профессор, Лелевкина Л.Г.;к.ф.-м.н, доцент, Гончарова И.В.;к.ф.-м.н., доцент, Комарцов Н.М.*_____________ ___

Рецензент(ы):
д.ф.-м.н., профессор, Байзаков А.Б. ________________

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

разработана в соответствии с ФГОС 3+:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по специальности 21.05.05 ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ГОРНОГО ИЛИ НЕФТЕГАЗОВОГО ПРОИЗВОДСТВА (приказ Минобрнауки России от 12.09.2016 г. № 1156)

составлена на основании учебного плана:

Специальность 21.05.05 - РФ, 630004 - КР Физические процессы горного или нефтегазового производства.
Специализация №2 "Физические процессы нефтегазового производства"

утвержденного учёным советом вуза от 27.08.2019 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Высшей математики

Протокол от 11.06.2019 г. № 1
Срок действия программы: 2019-2023 уч.г.
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
15.09 2020 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2020-2021 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 2.09 2020 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
14.09 2021 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2021-2022 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 1.09 2021 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
13 09 2022 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2022-2023 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 1 сент 2022 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
5 09 2023 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2023-2024 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 30 08 2023 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

УП: 21050551_19_6фпгнп н.plx

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	- получение базовых знаний и формирование основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности;
1.2	- развитие логического мышления;
1.3	- формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания других математических дисциплин, изучаемых в рамках технического направления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Дисциплина «Математический анализ» базируется на элементарной математике, а также курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» этого же блока, изучаемого на первом году обучения.
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Физика
2.2.2	Дифференциальные уравнения
2.2.3	Теоретическая и прикладная механика
2.2.4	Вычислительная математика
2.2.5	Теория вероятности и математическая статистика
2.2.6	Геомеханика
2.2.7	Гидромеханика
2.2.8	Сопротивление материалов
2.2.9	Спецглавы математики

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-8: способностью определять пространственно-геометрического положения объектов, способностью обрабатывать и интерпретировать результаты выполненных геодезических и маркшейдерских измерений	
Знать:	
Уровень 1	Нормативно-инструктивные документы и материалы по определению пространственно-геометрического положения объектов, обработке и интерпретации результатов выполненных геодезических и маркшейдерских измерений
Уровень 2	Теоретические и методологические основы использования нормативно-инструктивных документов и материалов по определению пространственно-геометрического положения объектов, обработке и интерпретации результатов, выполненных геодезических и маркшейдерских измерений в ходе своей профессиональной деятельности
Уровень 3	Методы сбора, обработки, анализа и применения нормативно-инструктивных документов и материалов для соблюдения их требований по определению пространственно-геометрического положения объектов, обработке и интерпретации результатов, выполненных геодезических и маркшейдерских измерений в ходе решения конкретных профессиональных задач
Уметь:	
Уровень 1	Решать типовые учебные задачи по определению пространственно-геометрического положения объектов, обработке и интерпретации результатов выполненных геодезических и маркшейдерских измерений
Уровень 2	Определять необходимость привлечения дополнительных знаний из смежных наук для решения задач по определению пространственно- геометрического положения объектов, обработке и интерпретации результатов, выполненных геодезических и маркшейдерских измерений в ходе своей профессиональной деятельности
Уровень 3	Применять знания определять пространственно- геометрическое положение объектов, обрабатывать и интерпретировать результаты выполненных геодезических и маркшейдерских измерений для решения конкретных профессиональных задач
Владеть:	
Уровень 1	Навыками демонстрации базовых знаний определять пространственно- геометрическое положение объектов, обрабатывать и интерпретировать результаты выполненных геодезических и маркшейдерских измерений
Уровень 2	Навыками определения пространственно-геометрического положения объектов, обработки и интерпретации результатов, выполненных геодезических и маркшейдерских измерений в ходе своей профессиональной деятельности

Уровень 3	Навыками определять пространственно-геометрическое положение объектов, обрабатывать и интерпретировать результаты выполненных геодезических и маркшейдерских измерений для решения конкретных профессиональных задач

ОПК-4: готовностью с естественно-научных позиций оценить строение, химический и минеральный состав горных пород, слагающих земную кору, морфологические особенности и генетические типы месторождений полезных ископаемых при решении задач по рациональному и комплексному освоению георесурсного потенциала недр на суше, на шельфе морей и на акваториях мирового океана	
Знать:	
Уровень 1	Математический аппарат, необходимый для решения профессиональных задач в естественнонаучных дисциплинах
Уровень 2	Теоретические и методологические основы естественнонаучных дисциплин и способы их использования при решении конкретных профессиональных задач
Уровень 3	Методы сбора и обработки экспериментальных данных
Уметь:	
Уровень 1	Решать типовые учебные задачи по основным разделам естественнонаучных дисциплин
Уровень 2	Определять необходимость привлечения дополнительных знаний из специальных разделов естественнонаучных дисциплин для решения профессиональных задач
Уровень 3	Применять знания теоретических основ современных естественнонаучных дисциплин и аппарат математики в профессиональной сфере деятельности
Владеть:	
Уровень 1	Навыками работы с учебной литературой, основной терминологией и понятийным аппаратом базовых естественнонаучных дисциплин
Уровень 2	Навыками использования теоретических основ базовых разделов естественнонаучных дисциплин при решении конкретных профессиональных задач
Уровень 3	Навыками использования теоретических основ и математический аппарат естественно- научных дисциплин при решении конкретных профессиональных задач

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	терминологию и основные понятия математического анализа;
3.1.2	теорию пределов;
3.1.3	дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной;
3.1.4	интегральное исчисление функции одной действительной переменной;
3.1.5	дифференциальное исчисление функций нескольких переменных;
3.1.6	интегральное исчисление функций нескольких переменных;
3.1.7	теорию числовых и функциональных рядов;
3.1.8	теорию поля.
3.2	**Уметь:**
3.2.1	вычислять пределы функций и последовательностей,
3.2.2	находить производные функций одной и нескольких переменных,
3.2.3	находить неопределенные интегралы;
3.2.4	вычислять определенные, кратные, криволинейные интегралы,
3.2.5	работать с числовыми и функциональными рядами,
3.2.6	вычислять основные характеристики скалярных и векторных полей,
3.2.7	анализировать поведение функций одной и нескольких действительных переменных;
3.2.8	использовать математические методы в технических приложениях;
3.2.9	применять свои знания к решению практических задач;
3.2.10	пользоваться математической литературой для самостоятельного изучения свойств функций одной и нескольких действительных переменных.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	Владеть методами вычисления пределов функций и последовательностей;
3.3.2	Приемами дифференцирования;
3.3.3	методами исследования функций одной и нескольких действительных переменных;
3.3.4	методами математического описания физических явлений и процессов, используя элементы дифференциального исчисления;

3.3.5	Методами интегрирования неопределенных интегралов;
3.3.6	Методами интегрирования определенных интегралов;
3.3.7	Методами вычисления кратных интегралов;
3.3.8	Методами вычисления криволинейных интегралов;
3.3.9	Приемами исследования рядов;
3.3.10	Методами вычисления основных характеристик скалярных и векторных полей.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Интеракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Пределы функции одной переменной							
1.1	Функции одной переменной. Область определения. Область значений. Различные виды и способы задания функций. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л2.8			
1.2	Функции одной переменной. Область определения. Область значений. Основные характеристики функций. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6			
1.3	Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков функций. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
1.4	Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков функций. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6			
1.5	Предел числовой последовательности. Предел функции. Односторонние пределы. Свойства пределов. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
1.6	Предел функции. Предел последовательности. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.3			
1.7	Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. Неопределенности различного вида. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
1.8	Раскрытие неопределенностей различных видов. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л2.8Л3.3			
1.9	Первый и второй замечательные пределы. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
1.10	Первый и второй замечательные пределы. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.3			
1.11	Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции и их классификация. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
1.12	Исследование функций на непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6			

1.13	Выполнение домаших заданий и типового расчета по разделу "Пределы фунций одной переменной". Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	1	6	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.3			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 2. Дифференцирование функций одной переменной							
2.1	Задачи физики, механики и энергетики приводящие к понятию производной. Определение производной. Дифференцируемость функции, дифференциал. Правила дифференцирования элементарных функции. Дифференциал функции. /Лек/	1	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
2.2	Основные правила и методы дифференцирования элементарных функции. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.4			
2.3	Дифференцирование сложных, обратных, неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
2.4	Дифференциал функции. Дифференцирование сложных функций. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.4			
2.5	Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.4			
2.6	Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства дифференцируемых функций. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
2.7	Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей различных видов по правилу Лопиталя. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
2.8	Производные и дифференциалы высших порядков. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.4			
2.9	Раскрытие неопределенностей различных видов по правилу Лопиталя. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.4			
2.10	Экстремумы функции. Возрастание, убывание. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, интервалы монотонности.План исследования функции. /Лек/	1	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
2.11	Экстремумы функции. Возрастание, убывание. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, интервалы монотонности. Полное исследование функции. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6			

2.12	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Дифференцирование функций одной переменной". Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	1	6	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.4			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 3. Неопределенные интегралы.							
3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.6 Л2.8			
3.2	Непосредственное интегрирование. Введение под знак дифференциала /Пр/	1	3	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			
3.3	Основные методы интегрирования. Интегрирование по частям. Метод подстановки. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
3.4	Интегрирование по частям. Метод подстановки /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			
3.5	Интегрирование дробно-рациональных функций. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
3.6	Интегрирование дробно-рациональных функций. /Пр/	1	3	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			
3.7	Интегрирование тригонометрических функций /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
3.8	Интегрирование тригонометрических функций /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л2.8Л3.6			
3.9	Интегрирование иррациональных функций. /Лек/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			
3.10	Интегрирование иррациональных функций. /Пр/	1	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			
3.11	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Неопределенный интеграл".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	1	5,8	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.

3.12	Зачет /КрТО/	1	0,2					Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ приведены в ФОС (п. 5.1), задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 2, 3.Образцы билетов - в ПРИЛОЖЕНИИ № 6
	Раздел 4. Определенные интегралы и их приложения							
4.1	Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Точные методы вычисления определенных интегралов. /Лек/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.8			
4.2	Точные методы вычисления определенных интегралов /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3Л3.2			
4.3	Геометрические приложения определенных интегралов:вычисление площадей плоских фигур в декартовой, полярной системах координат и при параметрическом задании кривой /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.2			
4.4	Геометрические приложения определенных интегралов:вычисление площадей плоских фигур в декартовой, полярной системах координат и при параметрическом задании кривой /Пр/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.2			
4.5	Геометрические приложения определенных интегралов:вычисление длин дугкривых в декартовой, полярной системах координат и в параметрической форме; вычисление объемов тел вращения. Физические приложения определенного интеграла /Лек/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.2			
4.6	Геометрические приложения определенных интегралов:вычисление длин дугкривых в декартовой, полярной системах координат и в параметрической форме; вычисление объемов тел вращения. /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.2			
4.7	Несобственные интегралы I и II рода, их свойства и вычисление. /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8			

4.8	Несобственные интегралы I и II рода, их свойства и вычисление. /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6			
4.9	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Определенные интегралы и их применение".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	6	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.2			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 5. Функции нескольких переменных							
5.1	Основные понятия. Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал, Дифференциалы высших порядков. /Лек/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.5			
5.2	Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал, Дифференциалы высших порядков. /Пр/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.5			
5.3	Дифференцирование сложных функций. Полная производная. /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.5			
5.4	Дифференцирование сложных функций. Полная производная. /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.5			
5.5	Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области. /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.5			
5.6	Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области. /Пр/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.5			
5.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Функции нескольких переменных".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	6	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.5			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 6. Кратные и криволинейные интегралы							
6.1	Задачи физики, механики, энергетики, техники, приводящие к кратным интегралам. Определение и свойства кратных интегралов. /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.6			

6.2	Вычисление кратных интегралов. /Лек/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.6			
6.3	Вычисление кратных интегралов. /Пр/	2	6	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.4 Л2.6			
6.4	Физические приложения двойных интегралов: объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции плоских фигур и тел. /Лек/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.6			
6.5	Физические приложения кратных интегралов: объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции плоских фигур и тел. /Пр/	2	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.6Л3.6			
6.6	Задачи физики, механики, энергетики, техники, приводящие к криволинейным интегралам. Определение криволинейных интегралов I и II рода и их свойства. /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.4 Л2.8Л3.6			
6.7	Вычисление криволинейных интегралов I и II рода в различных системах координат. Применение криволинейных интегралов для решение технических задач /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.4 Л2.8Л3.6			
6.8	Вычисление криволинейных интегралов I в различных системах координат. /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.6Л3.6			
6.9	Вычисление криволинейных интегралов II рода. /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.6Л3.6			
6.10	Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Формула Грина. /Лек/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.4 Л2.8Л3.6			
6.11	Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Формула Грина. /Пр/	2	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.6Л3.6			
6.12	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Кратные и криволинейные интгралы".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	6	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.6Л3.6			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.

6.13	Подготовка к экзамену /Экзамен/	2	35,7		Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.5 Л2.6			Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ приведены в ФОС (п. 5.1), задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 2, 3.Образцы билетов - в ПРИЛОЖЕНИИ № 6
6.14	/КрЭк/	2	0,3					
	Раздел 7. Ряды							
7.1	Числовой ряд. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд. Ряд геометрической прогрессии. /Лек/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			
7.2	Непосредственное определение сходимости числовых раядов. /Пр/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.3	Достаточные признаки сходимости числовых рядов. Признаки сравнения, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд. /Лек/	3	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			
7.4	Признаки сравнения, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши. /Пр/	3	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.5	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. /Лек/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			
7.6	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость. /Пр/	3	3	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.7	Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. /Лек/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			

7.8	Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. /Пр/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.9	Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. /Лек/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			
7.10	Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. /Пр/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.11	Применение степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций, определенных интегралов. /Лек/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			
7.12	Применение степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций, определенных интегралов. /Пр/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.13	Тригонометрический ряд и его основные свойства. Ряд Фурье и его сходимость. Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций, функций произвольного периода и неперидических. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. /Лек/	3	3	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.1 Л2.4 Л2.8Л3.1			
7.14	Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода. /Пр/	3	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			
7.15	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Ряды".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	3	9	ОПК-4	Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.1			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 8. Элементы теории поля							
8.1	Скалярное поле. Примеры скалярных полей. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства. Связь градиента с производной по направлению.Применение градиента. /Лек/	3	3	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.8Л3.7			
8.2	Скалярное поля.Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. /Пр/	3	3	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3Л3.7			

8.3	Векторные поля. Векторные линии.Поверхностный интеграл 1-го рода, его вычисление и свойства. Поток векторного поля. /Лек/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.8Л3.7			
8.4	Векторные поля. Векторные линии. Поток векторного поля. /Пр/	3	2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3Л3.7			
8.5	Дивергениция, циркуляция и ротор векторного поля. Векторные дифференциальные операции 1 и 2 порядка. Классы векторных полей. /Лек/	3	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.8Л3.7			
8.6	Дивергениция, циркуляция и ротор векторного поля. Классы векторных полей. /Пр/	3	4	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3Л3.7			
8.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Теория поля".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	3	8,8	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.7			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
8.8	Зачет с оценкой /КрТО/	3	0,2	ОПК-4 ПК-8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.7Л3.1 Л3.7			Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ приведены в ФОС (п. 5.1), задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 2, 3.Образцы билетов - в ПРИЛОЖЕНИИ № 6

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

I СЕМЕСТР - ЗАЧЕТ

1. Функция. Область определения и область значений функции.
2. Графики функций и их преобразования.
3. Основные характеристики функции: Ограниченность, четность, нечетность, периодичность, монотонность.
4. Различные виды функций: основные элементарные, элементарные, сложные, взаимообратные.
5. Способы задания функции. Параметрическое задание функции, задание функции в полярных координатах.
6. Числовые последовательности. Предел последовательности.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
8. Теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.
9. Предел функции. Бесконечно большие предельные значения функции и предел функции на бесконечности.
10. Теоремы о пределах функций (сумме, произведении, частном, сложной функции).
11. Первый замечательный предел.
12. Второй замечательный предел.

13. Односторонние пределы.
14. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.
15. Свойства функций непрерывных на отрезке. Непрерывность сложной функции.
16. Задачи механики, физики, энергетики, приводящие к понятию производной.
17. Определение производной функции. Геометрический и физический смысл производной.
18. Общие правила дифференцирования (суммы, произведения и частного).
19. Производная сложной и обратной функции.
20. Производные элементарных функций.
21. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций.
22. Логарифмическое дифференцирование
23. Дифференциал. Свойства дифференциала. Инвариантность формы дифференциала.
24. Производные и дифференциалы высших порядков.
25. Производная высших порядков неявно заданной функции.
26. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.
27. Правило Лопиталя.
28. Возрастание и убывание функций.Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
29. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
30. Асимптоты (вертикальные и наклонные).
31. Первообразная и неопределенный интеграл. Простейшие свойства неопределенного интеграла.
32. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование методом замены переменной или способом подстановки; интегрирование по частям.
33. Интегрирование дробно-рациональных функций.
34. Интегрирование тригонометрических функций.
35. Интегрирование иррациональных функций.

II СЕМЕСТР - ЭКЗАМЕН

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его геометрический и физический смыслы.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Точные методы интегрирования определенных интегралов.
5. Несобственные интегралы I рода.
6. Несобственные интегралы II рода.
7. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (метод прямоугольников, трапеций, Симпсона).
8. Вычисление площадей плоских фигур в различных системах координат.
9. Вычисление длин дуг плоских кривых в различных системах координат.
10. Вычисление объема тела по известному поперечному сечению и объема тела вращения.
11. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение, свойства двойных интегралов.
12. Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах.
13. Применение двойных интегралов.
14. Криволинейные интегралы I рода.
15. Применение криволинейных интегралов I рода.
16. Криволинейные интегралы II рода.
17. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина.
18. Применение криволинейных интегралов II рода.
19. Функции нескольких переменных (область определения, способы задания, графическое изображение, линии уровня).
20. Функции нескольких переменных (определение, предел и непрерывность).
21. Частные и полное приращение функций двух переменных.
22. Частные производные первого порядка функции нескольких переменных и их геометрическое истолкование.
23. Дифференцируемость и полный дифференциал первого порядка функции двух переменных.
24. Дифференцирование неявно заданных функций нескольких переменных.
25. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.
26. Дифференциалы высших (2-го и 3-го) порядков функции двух переменных.
27. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие существования экстремума.
28. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
29. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области.
30. Метод наименьших квадратов.

III СЕМЕСТР - ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ

1. Числовые ряды. Свойства числовых рядов.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Гармонический ряд. Геометрический ряд.

4. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.
5. Интегральный признак Коши.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
8. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
9. Функциональные ряды.
10. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Свойства степенных рядов.
12. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.
13. Приложения степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций.
14. Приложения степенных рядов. Приближенное вычисление определенных интегралов.
15. Приложения степенных рядов. Приближенное решение дифференциальных уравнений.
16. Ряды Фурье 2Пи-периодических функций.
17. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
18. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.
19. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.
20. Производная по направлению.
21. Градиент скалярного поля и его свойства.
22. Векторное поле. Поток векторного поля.
23. Дивергенция поля .
24. Циркуляция вектора.
25. Ротор поля.
26. Оператор Гамильтона.
27. Дифференциальные векторные операции второго порядка.
28. Соленоидальное поле.
29. Потенциальное поле.
30. Гармоническое поле.

Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в приложениях 1 и 2.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовые работы учебным планом не предусмотрены

5.3. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Математический анализ» представляет собой комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для контроля и оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, определения соответствия или несоответствия уровня достижений обучающегося планируемым результатам.

В 1 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3 в количестве 10 вариантов, на усмотрение преподавателя контрольные работы № 1, 2, 3 (10 вариантов) или компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования (КОПТ) № 1, 2, 3 по разделам "Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента", «Дифференцирование функций одной переменной», «Неопределенный интеграл».

Во 2 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3 в количестве 10 вариантов, на усмотрение преподавателя КОПТ "Определенные интегралы и их применение" или контрольная работа - "Определенные интегралы и их применение" - 10 вариантов , КОПТ «Функции нескольких переменных», контрольная работа «Двойные и кратные интегралы» - 10 вариантов.

В 3 семестре: Типовые расчеты №1, №2 в количестве 10 вариантов, контрольная работа - "Ряды" - 10 вариантов , контрольная работа «Теория поля» - 10 вариантов.

Варианты типовых расчетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3,
контрольных работ – ПРИЛОЖЕНИЕ № 4,
компьютерных контрольно-обучающих программ тестирования (КОПТов) - ПРИЛОЖЕНИЕ № 5

Билеты для проведения итогового контроля в 1 семестре (зачет), во 2 семестре (экзамен), в 3 семестре (зачет с оценкой), составляются из базы вопросов для оценки знаний, умений (приложение 1) и навыков (приложение 2), характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Образцы билетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6

5.4. Перечень видов оценочных средств

1. Типовые расчеты
2. Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования (КОПТы)
3. Контрольная работа.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Кудрявцев Л.Д.	Курс математического анализа Т.2: Учебное пособие	М.: ФИЗМАТЛИТ 2010
Л1.2	Баврин И.И.	Высшая математика: Учебник. 3-е изд., стереотипя	М.: Издательский центр «Академия», 2010

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Д.Т. Письменный	Конспект лекций по высшей математике: Полный курс	2009
Л2.2	Берман Г.Н.	Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие	СПб.: Профессия 2005,
Л2.3	Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.	Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие	М.: Айрис-пресс 2008
Л2.4	Бугров Я.С., Никольский С.М.	Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для втузов	М.: Наука 2007
Л2.5	Пискунов Н.С.	Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие	Интеграл-Пресс 2009
Л2.6	Каплан И.А., Пустынников В.И.	Практикум по высшей математике Т.1: Учебное пособие	2008
Л2.7	Каплан И.А., Пустынников В.И.	Практикум по высшей математике Т.2: Учебное пособие	2008
Л2.8	Н.С. Пискунов	Дифференциальное и интегральное исчисление, В 2 т.	Интеграл-Пресс 2009

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Ишмахаметов К.	Ряды: учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2013
Л3.2	Давидюк Т.А., Гончарова И.В.	Определенный интеграл и его приложения: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2010
Л3.3	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.	Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2009
Л3.4	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.	Дифференцирование функций одной переменной: Контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования	КР-СУ 2009
Л3.5	Лелевкина Л.Г., Саламатина Е.А.	Функции двух и нескольких переменных: Учебное пособие	КР-СУ 2010
Л3.6	Лелевкина Л.Г.	Методическое пособие по кратным и криволинейным интегралам: Методическое пособие	КР-СУ 2005
Л3.7	Рафатов Р.Р., Лелевкина Л.Г.	Элементы теории поля: Учебное пособие	КР-СУ 1998

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	Традиционные образовательные технологии – лекции, практические занятия, ориентированные прежде всего на сообщение знаний и способов действий, передаваемых студентам в готовом виде и предназначенных для воспроизводящего усвоения и разбора конкретных задач.
6.3.1.2	Инновационные образовательные технологии – занятия в интерактивной форме, которые формируют системное мышления и способность генерировать идеи при решении различных творческих задач. К ним относятся: проблемная лекция; лекция с визуализацией; лекция-диалог; диалоговая форма обучения (предполагает разработку целенаправленной системы вопросов, поиск ответов на которые служит основой для включения студентов в дискуссию, в самостоятельный поиск необходимой информации); групповая форма работы (парами, фронтальная, групповая, индивидуальная, микрогруппы); метод «мозгового штурма» (участники обсуждения высказывают большое количество вариантов решения той или иной задачи).

6.3.1.3	Информационные образовательные технологии: электронные тексты лекций с презентациями; компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования, разработанные кафедрой; самостоятельное использование студентом компьютерной техники и интернет-ресурсов для выполнения домашних заданий, типовых расчетов и самостоятельной работы по различным разделам математического анализа.
6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения	
6.3.2.1	Кафедра «Высшая математика» имеет постоянно действующий сайт, на котором содержится весь необходимый теоретический и практический материал для студентов, учебно-методические пособия (ЭУМП), электронный учебный курс (ЭУК) и электронная библиотека. Данные материалы размещены на сайте кафедры www.matem.krsu.edu.kg. Электронные учебно-методические пособия (ЭУМП):
6.3.2.2	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. «Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/4limits.pdf
6.3.2.3	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. «Дифференцирование функций одной переменной» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/3diffunc.pdf
6.3.2.4	Лелевкина Л.Г. «Методические указания по методам интегрирования неопределенных интегралов» http://math.krsu.edu.kg/metodich/undefint.pdf,
6.3.2.5	Гончарова И.В., Давидюк Т.А. «Определенный интеграл и его приложения» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/19op.pdf
6.3.2.6	Лелевкина Л.Г., Саламатина Е.А. «Функции двух и нескольких пременных» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/8funcseveralvar.pdf
6.3.2.7	Лелевкина Л.Г. «Методическое пособие к решению задач и контрольных заданий по кратным и криволинейным интегралам» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/2curvint.pdf
6.3.2.8	Ишмахаметов К. Ряды http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/12stepryad.pdf

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
7.1	Лекционная аудитория на 50 посадочных мест (ауд.3/407);
7.2	Аудитория для проведения практических занятий на 25 посадочных мест (ауд.3/315);
7.3	Компьютерный класс для выполнения самостоятельной работы и просмотра фото-, аудио-, мультимедия, видео-материалов;
7.4	Интерактивная доска;
7.5	Проектор;
7.6	Презентации лекций по основным темам;
7.7	Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования по различным разделам математического анализа.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Система балльной аттестации при изучении курса «Математический анализ» осуществляется по накопительной системе баллов и предполагает текущий, рубежный и промежуточный контроль. Все виды учебной деятельности оцениваются в баллах. Для контроля и ритмичности работы студентов в течение семестра вводятся аттестационные недели в соответствии с технологической картой дисциплины, с указанием минимальной и максимальной сумм баллов.

Технологические карты дисциплины представлены в ПРИЛОЖЕНИИ 8.

МОДУЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ВКЛЮЧАЕТ:

1. Текущий контроль: усвоение учебного материала на аудиторных занятиях (лекциях, практических, в том числе учитывается посещение и активность) и выполнение обязательных заданий для самостоятельной работы (домашних заданий, типовых расчетов).
2. Рубежный контроль: проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом. Выполнение модульных контрольных заданий проводится в письменном виде или с помощью компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования и является обязательной компонентой модульного контроля.
3. Промежуточный контроль - завершенная задокументированная часть учебной дисциплины – совокупность тесно связанных между собой зачетных модулей.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ТЕКУЩЕМУ КОНТРОЛЮ

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.
Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнение всех учебных заданий преподавателя, ознакомление с основной и дополнительной литературой.
Запись лекции - одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения и выводы, обобщения, формулировки. Культура

записи лекции - один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5-10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.
Лекции в основном нацелены на освещение фундаментальных и широко используемых понятий и определений, теорем и их доказательств, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой.
Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемой программой.
При подготовке к занятиям обучающийся должен просмотреть конспекты лекций, практических занятий, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы, решить задания домашней работы.
Рекомендуется регулярно отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.
Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта лекций в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Следует найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, нужно сформулировать вопросы, обратиться за помощью к преподавателю на еженедельных консультациях.
За посещение лекционных и практических занятий, а также за активную работу на них, студент получает поощрительные баллы, указанные в технологической карте.
Для закрепления пройденного материала и формирования навыков решения задач на каждом практическом занятия студент получает домашнее задание - 5-10 примеров, в зависимости от сложности, по пройденным темам. Для выполнения домашних заданий студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях. Выполнение домашних заданий поощряется баллами, указанными в технологической карте.

ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Для формирования навыков и умений, предусмотренных компетенциями, а также для активизации самостоятельной работы студентам нужно выполнить типовые расчеты (в первом и втором семестрах – по три типовых расчета, в третьем семестре – два типовых расчета). Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3. Номер варианта типового расчета выбирается согласно номера студента в списке группового журнала. Типовые расчеты выполняются в отдельной тетради с последующей обязательной защитой. Если студент за типовой расчет набирает баллы ниже минимального, установленного в технологической карте, то преподаватель возвращает типовой расчет на доработку. После доработки студент может получить только минимально возможное количество баллов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Перед выполнением типового расчета студентам нужно внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия; проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях, приведенные в рабочей программе образцы выполнения типовых расчетов (ПРИЛОЖЕНИЕ № 9). В случае затруднения выполнения заданий типового расчета следует обратиться с вопросами к преподавателю на еженедельных консультациях.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

Рубежный контроль по дисциплине «Математический анализ» проводится в виде контрольной работы или с применением компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования (КОПТ). Образцы контрольных работ и КОПТ приведены в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 4, 5 соответственно.
До рубежного контроля студенты должны пройти текущий контроль: выполнить домашние задания, защитить типовой расчет.
Контрольные работы и компьютерное тестирование проводятся в отведенное преподавателем время согласно технологической карте.
В случае, если студент отсутствовал на рубежном контроле по уважительной причине, то он должен согласовать с преподавателем время, когда он сможет пройти его, но обязательно до промежуточной аттестации.
Если студент за рубежный контроль набирает менее минимального количества баллов, указанных в технологической карте, то он имеет не более двух возможностей пройти его повторно. При этом он может получить не более 75% от максимально возможных баллов, указанных в технологической карте.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо повторить пройденный теоретический материал по данному разделу, выписать и выучить используемые в данном разделе формулы, проработать задания из домашней работы и типового расчета.
Образцы выполнения контрольных работ приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 10.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОПТ

Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования включают в себя задания с четырьмя вариантами ответов. В каждом задании можно обратиться к кратким методическим указаниям, разъясняющим каким методом, на основе использования какой формулы решается данное задание. После окончания тестирования, компьютер выдает каждому студенту, количество верно решенных заданий.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРОМЕЖУТОЧНОМУ КОНТРОЛЮ

При явке на промежуточную аттестацию (экзамен, зачет, диф.зачет) студенты обязаны иметь при себе зачётные книжки, которые они предъявляют экзаменатору в начале аттестации.
На промежуточном контроле студент должен верно ответить на теоретические вопросы билета и решить практические задания.
Оценка промежуточного контроля:
- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ
- 20 баллов - Вопросы для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Образцы билетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ в ПРИЛОЖЕНИИ № 11.

Итоговая оценка выставляется суммированием баллов текущего и итогового контролей следующим образом:

Оценка по 100-бальной шкале	Оценка по традиционной системе
85 – 100	Зачтено (отлично)
70 – 84	Зачтено (хорошо)
60 – 69	Зачтено (удовлетворительно)
0 – 59	Незачтено (неудовлетворительно)

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ ОБУЧЕННОСТИ *УМЕТЬ*

1 СЕМЕСТР

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+x+11}{2x^4+5x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{4x^2+5x+1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+4x^2+1}{x^3+5x^2+10}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2-4\right)}{x^2-5x+6}$;

13) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2+3x+x^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^2-4x+3}$;

15) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$;

16) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{9-x^2}{x^2+x-6}$;

17) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{\left(x-1\right)^2}$;

18) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-16}$;

19) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^2-3x+2}$;

20) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{6-3x}$;

21) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{4x-12}$;

22) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$.

Найти производные функций

1) $y=\left(3^x-\sqrt[3]{x}\right)\left(3arctgx-2\log_3 x\right)+\sqrt{2}$

2) $y=\dfrac{\log_2 x+tg2}{\arccos x-2x^2}-\ln 10$

3) $y=\dfrac{e^x-2}{\arcsin x+2\ln x}+\sin 1$

4) $y=\left(3\cos x-4\ln x\right)\left(\dfrac{2}{x^2}+e^3\right)$

5) $y=\left(5\arcsin x+2^x\right)\left(\sqrt[5]{x^3}-3tgx\right)$

6) $y=\dfrac{3\ln x+5\sqrt[3]{x^7}}{2arctgx+4}+\ln 7$

7) $y=\left(2\cos x-\dfrac{3}{x}\right)\left(arcctgx+4^3\right)$

8) $y=\dfrac{3e^x+5}{2tgx+4\sqrt[3]{x^4}}$

9) $y=\left(2ctgx-\dfrac{5}{x^3}\right)\left(\cos x-\ln x\right)$

10) $y=\dfrac{ctgx+5\sqrt[3]{x^7}}{3e^x+5}+\ln x$

11) $y=\left(3e^x-4\cos x\right)\left(\log_3 x+5tgx\right)+\sqrt{7}$

12) $y=\dfrac{5e^x+3x^2}{2\arcsin x+4\sin x}+tg5$

13) $y=\left(5ctgx+7^x\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+3\sin x\right)$

14) $y=\left(2ctgx+3\ln x\right)\left(4\arcsin x-\sqrt[4]{x^3}\right)$

15) $y=\left(3tgx+5\sqrt[5]{x^3}\right)\left(arcctgx-4^x\right)$

16) $y=\left(2arctgx+4^x\right)\left(3\ln x-x^3+1\right)$

17) $y=\dfrac{2^x-x^2+e^2}{2\log_2 x-3}$

18) $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$

Найти производные функций сложных функций

1) $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$

2) $y=tg\left(\log_2 x+3\right)$

3) $y=\left(x+4\sin x\right)^3$

4) $y=3^{\sqrt[4]{x}+2x}$

5) $y=arctg\left(\sin 3x+4\right)$

6) $y=\cos\left(3x-\dfrac{5}{x^2}\right)$

7) $y=\ln\left(3x^2+2tgx\right)+1$

8) $y=\log_3\left(3x-\cos x\right)$

9) $y=5^{\arcsin x-3\sqrt{x}}+2$

10) $y=\arcsin\left(2x^3+\cos x\right)$

11) $y=\arccos\left(5x^2+5\right)$

12) $y=ctg\left(\dfrac{6}{x^3}+\ln x\right)$

13) $y=\sin\left(\sqrt[3]{x}+4x\right)-3$

14) $y=\left(\dfrac{3}{x^3}+4x\right)^3$

15) $y=\log_5\left(\sin 2x+4\right)+\sqrt{3}$

16) $y=\arccos\left(\ln x+4tgx\right)$

17) $y=\arccos\left(\cos 2x-\ln x\right)$

18) $y=arctg\left(4e^x-5\right)$

Найти неопределенный интеграл

1) $\displaystyle\int\frac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx$

2) $\displaystyle\int\frac{(6x\ \ -3)^2}{x}dx$

3) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

4) $\displaystyle\int\frac{x^2 2^x+x-\sqrt[4]{x^3}}{x^2}dx$

5) $\displaystyle\int\frac{(2x-3)^2}{x^3}dx$

6) $\displaystyle\int\frac{x^4-5x^2e^x+9x}{x^2}dx$

7) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x-1}dx$

8) $\displaystyle\int\frac{3xe^x-x\sin x+5x}{x}dx$

9) $\displaystyle\int\frac{x^2e^x-2e^x\sin x}{e^x}dx$

10) $\displaystyle\int\frac{2x-3x^2e^x+\sqrt[4]{x^3}+3x^2}{x^2}dx$

11) $\displaystyle\int\frac{\left(3x+\sqrt[3]{x}\right)}{x^2}dx$

12) $\displaystyle\int\frac{xe^x-4\sqrt[4]{x}+3x-2}{x}dx$

13) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$

14) $\displaystyle\int\frac{x^2\cos x+3x^2-5x}{x^2}dx$

15) $\displaystyle\int\frac{(x+2)^2}{x^2}dx$

16) $\displaystyle\int\frac{e^x x^6+4x^6\sin x+9x^4}{x^6}dx$

17) $\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{x^5}dx$

18) $\displaystyle\int\frac{x^2-6}{x-5}dx$

19) $\int \frac{4x^3+15x^2e^x+14x^4}{x^2}dx$

20) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$

21) $\int (3x-2)\cos 2x\,dx$

22) $\int (3x-2)e^{2x}dx$

23) $\int (3+9x)\cos 8x\,dx$

24) $\int (x^2-3x)\ln x dx$

25) $\int (5x+23)\cos 8x\,dx$

26) $\int (10x-4)\sin 5x\,dx$

27) $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\,dx$

28) $\int x^4\ln x dx$

29) $\int (2x+1)e^x dx$

30) $\int (6x+2)\sin 6x\,dx$

31) $\int (3\cos x+5)\sin x dx$

32) $\int (3x-1)\sin 3x dx$

33) $\int (2x+5)3^x dx$

34) $\int \left(x^2+2x\right)\ln x dx$

2 СЕМЕСТР

Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x\sin^6 x dx$

2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

3) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^6+1}dx$

5) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx$

6) $\int\limits_{0}^{1} 6\left(x^2+x^3e^{x^4}\right)dx$

7) $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

8) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

9) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\cos^3 x dx$

10) $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1}dz$

11) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$

12) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

13) $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{x}{\cos^2\left(x^2\right)}dx$

14) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx$

15) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{1+7x}dx$

16) $\int\limits_{0}^{1/2} arcctg 2x dx$

17) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$

18) $\int\limits_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$

19) $\int\limits_{1}^{e} x^3\ln x dx$

20) $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2)dx$

21) $\int\limits_{-3}^{0} (x-2)e^{-x/3}dx$

22) $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx$

23) $\int\limits_{0}^{1} 2x\, arctg x dx$

24) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx.$

25) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx.$ 26) $\int\limits_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

27) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx.$ 28) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

29) $\int\limits_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx.$ 30) $\int\limits_0^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}\,dx.$

31. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}dl$, где L: $y=\sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

32. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}dl$, где L: $xy=1$, $1 \le x \le 2$.

33. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1+x^4}\,dl$, где L: $y=\frac{x^3}{3}$, $1 \le x \le 2$.

34. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L y^2 dl$, где L: $y=\frac{x}{2}$, $0 \le x \le 2$.

35. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L y\,dl$, где L: $y=x^3$, $0 \le x \le 1$.

36. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L 2y\,dl$, где L: $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2} \\ y=t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

37. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{y}\,dl$, где L: $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

38. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=2\cos\phi$, $-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.

39. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=2\sin\phi$, $0 \le \phi \le \pi$.

40. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=1-\cos\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$.

41. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z=y^2xe^x$.

42. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z=\frac{x}{y^2-2x}$.

43. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = \ln\left(x^2 y + xy^2\right)$.

44. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z = e^{x^2+y^2} - x - 1$.

45. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = \log_3\left(x^6 + y^2\right) + 5x^2 y^4 + 1$.

46. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^2 e^{xy}$.

47. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = \dfrac{y^2}{x + 7y}$.

48. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^3 y^4 - \sin(2x + 3y)$.

49. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^4 y^3 + e^{4x-3y}$.

50. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^6 y^2 - \cos(3x - 5y)$.

3 СЕМЕСТР

Исследовать сходимость ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-2}{4n+1}\right)^{n}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n-2}{6n+5}\right)^{2n}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n^2+2}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n \cdot n}{2^n \cdot (3n+2)}$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n^3+1}$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2+1}$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3}{2n!}$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{5n+1}\right)^{n}$

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)!}{n^n}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3\sqrt{n}-1}$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n^2+1}$

Найти область сходимости ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+2}}x^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n(n+3)}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+5)^n}{5^{2n}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n(n^2+1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+2}}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\frac{(x-3)^n}{3^n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+2}}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{n^2+1}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{4n-3}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+5)^n}{n\cdot5^n}$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{7n-11}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)^{2n}}$ 20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+5)^n}{n^2\cdot4^n}$

1. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(x-z)\bar{i}-y\,\bar{j}+(y+z)\bar{k}$.
2. Найти производную скалярного поля $u=x^2\cos y+x^3y+5xz-5xz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.
3. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2y+xz^3+5yz^2+x$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.
4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(2x^2-z)\bar{i}-xy\,\bar{j}+(y^2+z)\bar{k}$.

5. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(-2x-3yz)\overline{i}+(-2y-3xz)\overline{j}+(-2z-3xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.
6. Найти производную скалярного поля $u=(x^2+4x^3)\cos y+5xz$ в точке $M_0(0;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;0;1)$.
7. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=xy^2\overline{i}-y^3z\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$
8. Найти градиент скалярного поля $u=xyz^2+4xz+xy-z^2+2$ в точке $M_0(4;-2;0)$ и его модуль.
9. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2y^4+xz^3+5z^2+xyz$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.
10. Найти градиент скалярного поля $u=4x^3z+5x^2y-yz^2+6x+5$ в точке $M_0(-1;-2;3)$ и его модуль.
11. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(2x^2y-z)\overline{i}-xy\overline{j}+(y+2z)\overline{k}$.
12. Найти производную скалярного поля $u=x\cos y+x^2y+5xz-5xyz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.
13. Найти производную скалярного поля $u=xe^y+ye^x-z^2$ в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.
14. Найти градиент скалярного поля $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M_0(0;1;2)$ и его модуль.
15. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x+y+z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
16. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $3x+y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
17. Вычислить ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M)=3(x-z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+3z\vec{k}$.
18. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)=(3x-yz)\vec{i}+(3y-xz)\vec{j}+(3z-xy)\vec{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал.
19. Найти производную скалярного поля $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$ в точке $M_0(1;3;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(0;5;0)$.
20. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ ОБУЧЕННОСТИ ***ВЛАДЕТЬ***

1 СЕМЕСТР

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-4}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{tg^3 x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin\left(6x^2\right)}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg12x}{\ln\left(1+6x\right)}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\left(2x\right)}{e^{10x}-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2\left(10x\right)}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{\arcsin\left(6x\right)}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{arctg^2\left(5x\right)}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{e^{2x^2}-1}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+14x\right)}{\arcsin 7x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\sin\left(4x^2\right)}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{e^{3x^2}-1}$ 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2\left(3x\right)}{e^{6x^2}-1}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x^3\right)}{arctg^3 x}$ 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(4x\right)}{\ln\left(1+3x\right)}$

Найти производные степенно-показательных функций

1) $y=\left(\cos x\right)^{5e^x}$ 2) $y=\left(x^3+4\right)^{tgx}$

3) $y=\left(tgx\right)^{4x}$ 4) $y=x^{arctgx}$

5) $y=\left(\sin x\right)^{3x}$ 6) $y=x^{\arcsin x}$

7) $y=\left(\sin x\right)^{x+1}$ 8) $y=\left(x^3-1\right)^{x}$

9) $y=x^{\arcsin x}$ 10) $y=\left(\sin x\right)^{x}$

Найти производные y' от неявной функций

1) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$ 2) $x^3+\ln y-x^2e^y=0$

3) $x^2+yx+e^y=0$ 4) $x^3y+x^2y^2+xy^3=0$

5) $2x^2+y^2-4x+10y+5=0$ 6) $e^x-e^y=y-x$

7) $5x^2+3xy-2y^2+3=0$ 8) $2x^2+3^y+x\ln y=0$

9) $x^2y^3+x-\sin y=0$ 10) $3y^2+\sin y-x2^y=0$

Найти производные y'_x функций

1) $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t - 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 4t^2 + 5 \\ y = 3t^4 + 11 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \ln(5+t) \\ y = arctgt \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = e^t \\ y = \left(t^2 - t\right)\cdot e^t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \ln\left(t+1\right) \\ y = t^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t^2 - 5t \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = t^2 + 3t \\ y = t^3 - 27t \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \ln\left(t^2 + 1\right) \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$

Найти неопределенный интеграл

1) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{2+3x^3}\,dx$

2) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

3) $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$

4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

5) $\int \frac{e^x}{e^x - 3}\,dx$

6) $\int e^x \sqrt{e^x + 3}\,dx$

7) $\int \left(\sin x + 5\right)^2 \cos x dx$

8) $\int \sqrt[6]{x^4 - 11} \cdot x^3 dx$

9) $\int e^{x^6} \cdot x^5 dx$

10) $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

11) $\int \left(e^x + 5\right)^4 e^x dx$

12) $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{2+3x^5}\,dx$

13) $\int \frac{\left(arctgx\right)^2}{1+x^2}\,dx$

14) $\int \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}\,dx$

15) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}\,dx$

16) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+4}}$

18) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-1}}$

19) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-4}}$

20) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

21) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{4x+5}}$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}+1}dx$

Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$
2) $y = 2x^2 - 8x + 2$
3) $y = 4x^3 + 4x^2 + x - 16$
4) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$
5) $y = 3x - x^3$
6) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$
7) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$
8) $y = x^4 - 2x^2 - 5$
9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
10) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$
11) $y = x^3 - 3x^2$
12) $y = x^4 - 2x^2 + 5$
13) $y = 2x^3 - 3x^2$
14) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$
15) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$
16) $y = 3x^4 - 6x^2 + 5$

2 СЕМЕСТР

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$, $y = x + 8$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r^2 = 4\cos 2\phi, r = \sqrt{2}\left(r \ge \sqrt{2}\right)$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\cos\phi, r = 3\cos\phi.$

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 3\sin\phi, r = 5\sin\phi.$

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 3(1 + \cos\phi), r = 3,5(r \ge 3,5).$

12. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = x^2, y = 2.$ Ось вращения Oy.

13. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = x^3, y = x.$ Ось вращения Ox.

14. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = x^3, y = x^2.$. В вариантах 1-13 ось вращения Ox, в вариантах 14-25 ось вращения Oy.

15. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = x^2, y = x.$ Ось вращения Oy.

16. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln\cos x + 2, 0 \le x \le \pi/6$

17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

18. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $\rho = 6\sin\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

19. Исследовать на экстремум функцию: $z = (x-1)^2 - 2y^2$

20. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 1$

21. Исследовать на экстремум функцию: $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

22. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

23. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

24. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

25. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + (y-1)^2$

26. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$

27. Исследовать на экстремум функцию: $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

28. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

29. Вычислить интеграл $\iint\limits_D 2x dxdy$, где область D ограничена линиями: $y - x = 5$, $x = 0$, $y = 0$.

30. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xy dxdy$, где область D ограничена линиями: $x = 4$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$.

31. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2 dxdy$, где область D ограничена линиями: $y - x = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

32. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2 dxdy$, где область D ограничена линиями: $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

33. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x + y) dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = x^2$, $y = 4$.

34. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x - y) dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

35. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = x^2$, $y = x$.

36. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, где область D ограничена линиями: $x = y^2$, $y = 4$.

37. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

38. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$.

3 СЕМЕСТР

Разложить в ряд Фурье функции

1. $y = 2x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
2. $y = x$ в интервале $(-3, 3)$.
3. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x \le 0 \\ 2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$.
4. $y = 2x$ в интервале $(-4, 4)$
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.
6. $y = 3x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
7. $y = x$ в интервале $(-2, 2)$.
8. $y = x$ в интервале $(-3,3)$.
9. $y = 10x$ в интервале $(-5,5)$.
10. $y = |x| + x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
11. $y = |x|$ в интервале $(-4,4)$.
12. $y = 5x$ в интервале $(-3,3)$.

Разложить в ряд Фурье по синусам функции

1. $y = x+1$ в интервале $x \in (0, \pi)$.
2. $y = x-2$ в интервале $x \in (0, 3)$.
3. $y = 2x$ в интервале $(0, \pi)$.
4. $y = 2x-3$ в интервале $(-2,2)$.
5. $y = x^2$ в интервале $(0,\pi)$.

Разложить в ряд Фурье по косинусам функции

1. $y = x+1$ в интервале $x \in (0, \pi)$.
2. $y = x-2$ в интервале $x \in (0, 3)$.
3. $y = x-1$ в интервале $(0,\pi)$.
4. $y = 2x-1$ в интервале $(0,\pi)$.
5. $y = 3x+1$ в интервале $(0,\pi)$.

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

1. $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y-2z)\overline{j} + (2x-y+2z)\overline{k}$; р: $x+2y+z=2$.
2. $\overline{a}(M) = (x+y)\overline{i} + (y+2z)\overline{j} + z\overline{k}$; р: $2x+y+z=4$
3. $\overline{a}(M) = 5x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (2x+z)\overline{k}$; р: $x+y+z=2$
4. $\overline{a}(M) = (y+2z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (x-y)\overline{k}$; р: $x+3y+z=3$
5. $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x-z)\overline{j} + (2y+z)\overline{k}$; р: $x+y+z=2$
6. $\overline{a}(M) = (y-2x)\overline{i} + (y-z)\overline{j} + x\overline{k}$; р: $x+y+3z=3$
7. $\overline{a}(M) = 3x\overline{i} + (x-z)\overline{j} + (2x-y)\overline{k}$; р: $x+4y+z=4$.
8. $\overline{a}(M) = (2x+z)\overline{i} + z\overline{j} - y\overline{k}$; р: $3x+y+3z=3$.
9. $\overline{a}(M) = 3x\overline{i} + (x-z)\overline{j} + (2x-y)\overline{k}$; р: $x+4y+z=4$.
10. $\overline{a}(M) = (y+2z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (x-y)\overline{k}$; р: $x+3y+z=3$.
11. $\overline{a}(M) = 2x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (2x-y+2z)\overline{k}$; р: $2x+2y+z=2$.
12. $\overline{a}(M) = (x+2y)\overline{i} + (y-2z)\overline{j} - z\overline{k}$; р: $2x+y+z=2$.
13. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+2z)\vec{k}$; р: $2x+y+z=4$.
14. $\vec{a}(M) = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + z\vec{k}$; р: $x+y+z=2$.
15. $\vec{a}(M) = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}$; р: $x+2y+2z=6$.
16. $\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-z)\vec{k}$; р: $x+2y+z=2$.
17. $\vec{a}(M) = (2z-x)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + z\vec{k}$; р: $x+4y+2z=8$.
18. $\vec{a}(M) = (3x-y)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} + (2z-x)\vec{k}$; р: $2x+y+z=6$.
19. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}$; р: $x+2y+2z=2$
20. $\vec{a}(M) = (2y+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} - 2z\vec{k}$; р: $x+y+z=2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3

ВАРИАНТЫ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

1 СЕМЕСТР

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №1

Вариант 1

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-5}$
5. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3(2x)}{x^2\cdot arctg(3x)}$
7. $\lim\limits_{x\to5}\frac{tg(x-5)}{\sqrt{x+4}-3}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+8}{5n^2+3n-9}$

II Исследовать функцию на непрерывность $y=e^{\frac{1}{x+3}}$

Вариант 2

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n-4}-n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+5}\right)^{5n}$
3. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x+6}{2^x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3+3x^2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin^2(4x)}{x\cdot tg(2x)}$
7. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-2x-8}{e^{x-4}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^{6x}-1}{\ln(1+8x)}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+8}{5n^2+3n^3+19}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\frac{x^2-4}{x-2}$

Вариант 3

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n+1}-2n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n-2}\right)^{n+5}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\left[\ln(x+3)-x^2+5\right]$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-12x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2-4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot tg(5x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sin(x-4)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{e^{5x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n^4+8}{5n^2-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=2-\dfrac{1}{x}$

Вариант 4

I.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+3n^3-2n}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+5}\right)^{2n-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{2x^2-9}-2x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{2x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{2x-4}-1}{x^2-4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1-2x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5-2n^4+1}{n^2-3n^5-8}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$

Вариант 5

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-5n+5}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+3}\right)^{5-n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+2}{3x^2+5x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{5-\sqrt{x+23}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{arctg(2x-6)}{4-\sqrt{x+13}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{7^{3x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^3+2n^2+8n}{5n^2-3n^3-9}$

II. . Исследовать функцию на непрерывность $y = \dfrac{3}{1+2^{1/x}}$

Вариант 6

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-2n+4}-3n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n+4}\right)^{5n-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x+1}{5x-7}\right)^{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+2x-3}{4x^2-x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin^2(4x)}{arctg^4(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{e^{3x-3}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^{4x}-1}{\ln(1+9x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^3+8}{3n^2+3n^4-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y = \dfrac{2}{x^2-4}$

Вариант 7

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4+2n-1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+7}\right)^{3n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3^{x-3}-1}{2^{x-2}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^2-5x+6}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{1-\sqrt{4x-11}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(4x)}{x\cdot tg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{\sin(3x-9)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{e^{-6x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+2n+8}{6n^3+3n^5-9n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y = 9^{\frac{1}{x+3}}$

Вариант 8

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n+10}-n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+5}\right)^{6-2n}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{x^2+16}-x+1\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15-5x}{3-\sqrt{4x-3}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(6x)}{arctg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7^{3x+3}-1}{6x^2+7x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+6n+2}{5n^2-3n^3-9n+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases} x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$

Вариант 9

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2-2n+7}-4n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-4}{6n+5}\right)^{-2n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\ln(2x+9)}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-5x-12}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2(5x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-8x-4}{arctg\,(8-4x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^{4x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n^2+6n^3+2}{3n^2+n^3-9n+1}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$

Вариант 10

I Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4-3n^2+11}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+2}{7n-4}\right)^{3n+2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+3}{x+4}\right)^{x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-5x-2}{-x^2+3x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+24}-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{2x+7}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{7x}-1}{\ln(1+10x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^6+2n^2+2}{n^6-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{2}{1+4^{\frac{1}{x-1}}}$

Вариант 11

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2-2n+5}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n-3}{8n+1}\right)^{5-4n}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x-1}{2x^2-4x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-5x-25}{x^2-25}$
5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4-\sqrt{6x-2}}{9-3x}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cdot\arcsin^2(3x)}{tg^5(3x)}$
7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sin(4x-4)}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-9x}-1}{\ln(1-6x)}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+9n+2}{3n^3+9n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}-(x+1), & x\le-1,\\ (x+1)^2, & -1<x\le0,\\ x, & x>0\end{cases}$

Вариант 12

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+4}-n^2\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+2}{9n-5}\right)^{3n+4}$
3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$
4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2-x-6}{3x^3+4x^2+x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^3+3x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(5x)}{arctg^3(4x)}$
7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{4x}-1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6n}{9n^2+3n^3-9n+4}$

II. . Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}2x^2, & x\le0,\\ 3, & 0<x\le1,\\ x+2, & x>1\end{cases}$

Вариант 13

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+4n+4}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n+51}{10n-64}\right)^{20n+4}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-6x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2+12x+18}$
5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{3x+10}-1}{2x+6}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x\cdot arctg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(3x-6)}{2-\sqrt{x+2}}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2^{-10x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6}{4n^3+4n+5}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=8^{\frac{1}{5-x}}$

Вариант 14

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2-6}-n^2\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{11n-2}{11n+3}\right)^{4-5n}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln\left(x^2+3\right)-\ln\left(3x^2+1\right)\right]$ 4. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{2x^2-11x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+6}{7-\sqrt{19-10x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^4(2x)}{tg^4(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{e^{x^2-25}-1}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-8x}-1}{\ln(1-16x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-2n^4+6n^2}{9n^6-3n^5-n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases} x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$

Вариант 15

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-3n+2}-n^2\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+5}\right)^{5n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{3x^2-3}\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4x^2+3x+27}{2x^2-5x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg^2(7x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-\sqrt{4x+21}}{tg(5x+15)}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{20x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+2n^3+n}{7n^5+3n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{x^2}{x-2}$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №2

Вариант 1

1. Вычислить пределы по о правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin(3x)}$.   2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln\left(x^2-15\right)}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+3\sqrt{x}$ 2. $y=\dfrac{2\arcsin x+3^x}{4\ln x-2x^2}$

3. $y=\ln\sin(2x+5)$ 4. $y=x^{\ln x}$

5. $y=\left(e^x-3\cos x\right)\left(5-4\log_2 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(1+2t), \\ y=t^2-2t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}.$$

5. Найти производную от неявной функции $\ln(x+y)-arctgx=0$.

Вариант 2

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{tg(2x)}{\sin x}$.   2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{x-1}-1}{\ln(2x-1)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{4\arccos x-e^x}{3\log_2 x+5x^3}$

3. $y=\dfrac{1}{2}\sin^4(\cos x)$ 4. $y=x^{\arcsin x}$

5. $y=\left(2^x+4\sin x\right)\left(3\ln x-2\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg2t, \\ y=t^2+2t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

5. Найти производную от неявной функции $\cos(xy)=\dfrac{y}{x}$.

Вариант 3

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$.   2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}-1}{\ln(2x+9)-\ln 3}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^2}$ 2. $y = \dfrac{2\ln x - 8x^4}{4^x - 2arcctgx}$

3. $y = \arccos\left(ctg4x\right)$ 4. $y = x^{\sqrt{x+1}}$

5. $y = \left(5tgx - e^x\right)\left(4\log_7 x + 3\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln\left(1-4t\right), \\ y = 2t^2 + 4t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arctg(x+y) = x$.

Вариант 4

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{tg\left(\pi x\right)}{\sin\left(3\pi x\right)}$. 2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln\left(x^2 - 3\right)}{4^{x+2} - 1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 7\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^5} - 3x^3$ 2. $y = \dfrac{e^x + 6\arcsin x}{5x^2 - 2\log_4 x}$

3. $y = arctge^{2x}$ 4. $y = (tgx)^{x^3}$

5. $y = \left(8ctgx + 3^x\right)\left(2\ln x - 5\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = arctg3t, \\ y = 3t^2 - 12t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

5. . Найти производную y' от неявной функции $y\sin x + \cos(x - y) = 0$.

Вариант 5

1 Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x^2 - 4\pi^2}{tg\left(x\right)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(9 - 4x\right)}{e^{3x-6} - 1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4}$ 2. $y = \dfrac{7^x - 3\arccos x}{4x^3 + 3\ln x}$

3. $y = \ln\left(\arcsin 3x\right)$ 4. $y = \left(\sin x\right)^{\cos x}$

5. $y = \left(e^x - 4tgx\right)\left(3 + 7\log_3 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln\left(1+6t\right), \\ y = 3t^2 - 12t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $y\sin x+\cos y=0$.

Вариант 6

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin(3x+\pi/4)}{\pi/4-x}$.   2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5^{2x-3}-5^5}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}$ 2. $y=\dfrac{7x^2+4\log_3 x}{2e^x-5arcctgx}$

3. $y=e^{tg(3x-2)}$ 4. $y=(\arcsin x)^{x^2+1}$

5. $y=\left(5^x+2\cos x\right)\left(10-3\ln x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg4t, \\ y=t^4+4t^3. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arcctg(x+y)-x-2y=0$.

Вариант 7

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{\sin(2\pi x)}$.   2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3^{5x+10}-1}{\ln(4x+9)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=3x^5-\sqrt{x^3}+\dfrac{10}{x^5}$ 2. $y=\dfrac{3arctgx-5^x}{4\ln x-5x^6}$

3. $y=\ln\left(e^{2x}+3\right)$ 4. $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$

5. $y=\left(e^x+6ctgx\right)\left(9+7\log_6 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(1-5t), \\ y=t^5-10t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $e^{x+y}=\sin xy$.

Вариант 8

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to2}(2-x)tg\dfrac{\pi x}{4}$.   2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3^{x-4}-1}{\ln\left(33-2x^2\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt[3]{x^7}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$ 2. $y=\dfrac{2\arccos x+e^x}{3\log_2 x-7x^3}$

3. $y=3^{-\arcsin(6x)}$ 4. $y=\left(x^3-1\right)^x$

5. $y=\left(7^x-4\sin x\right)\left(4+3\ln x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg5t, \\ y=5t^2-20t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arcctg\left(2x-3y\right)=5^y$.

Вариант 9

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg\left(2\pi x\right)}{2x^2-6x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(4x-6\right)-\ln 2}{2^{3x-6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{2}{x^3}$ 2. $y=\dfrac{5\ln x+3x^4}{6\arcsin x-2^x}$

3. $y=\left(1+\sin 2x\right)^{10}$ 4. $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}$

5. $y=\left(4\log_5 x-e^x\right)\left(6-5tgx\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln\left(2+3t\right), \\ y=t^6-3t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $\cos\left(x-y\right)-2x+4y=0$.

Вариант 10

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\left(x/2\right)}{\pi-x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{3^{x-1}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^6-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{7}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{4\log_5 x-6x^3}$

3. $y=2^{\arcsin 5x}$ 4. $y=\left(\ln x\right)^x$

5. $y=\left(10\ln x+6^x\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg6t, \\ y=3t^4+2t^3. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $e^{xy}=\ln x+arcctgy$.

Вариант 11

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{x^2-9\pi^2}{\sin(x/3)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^{x-3}-e^2}{4^{10-2x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2\sqrt{x^3}+3x^2-\dfrac{2}{x^5}$ 2. $y=\dfrac{6^x-3arctgx}{5x^2-9\ln x}$

3. $y=(1+\cos 3x)^6$ 4. $y=(\arccos x)^{x^2}$

5. $y=\left(e^x-7\log_3 x\right)\left(\sqrt{2}-3tgx\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(5-4t), \\ y=t^8+2t^4. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $\cos y=\sin x+2y$.

Вариант 12

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to \pi/8}\dfrac{\pi/4-2x}{\sin(2x+3\pi/4)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(3x-14)}{4^{2x-10}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^3-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{6}{x^2}$ 2. $y=\dfrac{8x^4-7\log_8 x}{e^x+2\arcsin x}$

3. $y=\ln tg(4x-1)$ 4. $y=(\sin x)^{x^3}$

5. $y=\left(4^x+6\ln x\right)\left(8+3\cos x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg7t, \\ y=7t^4-21t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $xy+\ln y-2\ln x=0$.

Вариант 13

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}$. 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7^{2x-3}-7^3}{e^{6-2x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ 2. $y=\dfrac{9^x-3\arccos x}{5x^3+8\ln x}$

3. $y=\sin\left(e^{4x+3}\right)$ 4. $y=\left(x^2+2\right)^{3x}$

5. $y=\left(e^x-5\log_8 x\right)\left(6ctgx-1\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln\left(8-7t\right), \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $tgy=xy^2+e^x$.

Вариант 14

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{1+\cos\left(x/2\right)}{\left(x-2\pi\right)^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(13-3x^2\right)}{3^{x-2}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}+5x^4$ 2. $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{2\log_4 x-6x^2}$

3. $y=\arcsin\left(\ln\left(2x\right)\right)$ 4. $y=x^{arctgx}$

5. $y=\left(2^x+3\ln x\right)\left(4\cos x+11\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg7t, \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $x\ln y=3x^3+y^2$.

Вариант 15

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\pi x}{\sin\left(x-2\right)}$. 2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{e^{3x+12}-1}{\ln\left(3x+13\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{4}{x^5}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$ 2. $y=\dfrac{4\ln x-3x^6}{7arcctgx+8^x}$

3. $y=\ln\left(1+arctg2x\right)$ 4. $y=\left(\cos x\right)^{tgx}$

5. $y=\left(e^x-5\log_4 x\right)\left(9\sin x-12\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln\left(4+3t\right), \\ y=6t^3-15t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $e^{xy}-\left(x+3y\right)=0$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №3

Вариант №1

1) $\int x\sqrt{5-x^2}\,dx$

2) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

3) $\int x^3e^{x^4}dx$

4) $\int\left(3x-2\right)\cos 2x\,dx$

5) $\int \dfrac{x^3-8x-14}{\left(x+2\right)\left(x-4\right)}dx$

6) $\int \dfrac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

7) $\int \dfrac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$

8) $\int \dfrac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$

9) $\int \dfrac{dx}{3+2\cos x}$

10) $\int \sqrt{256+x^2}\,dx.$

Вариант №2

1) $\int \sin^3 x\cos xdx$

2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}dx$

3) $\int 3x\sqrt{5-x^3}\,dx$

4) $\int\left(5-4x\right)\sin 3x\,dx$

5) $\int \dfrac{5x^2+11x+2}{x\left(x+1\right)^2}dx$

6) $\int \dfrac{(x+1)^2}{x^5}dx$

7) $\int x\sqrt{15-x^2}\,dx$

8) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{3+4x}}$

9) $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$

10) $\int \sqrt{256-x^2}\,dx.$

Вариант №3

1) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$

2) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

3) $\int \dfrac{\left(arcctgx\right)^4}{1+x^2}dx$

4) $\int\left(2x+1\right)e^{5x}dx$

5) $\int \dfrac{x^3+2x^2-18x+17}{\left(x-3\right)\left(x+5\right)}dx$

6) $\int \dfrac{x^2-x^5\sin x+2x}{x^5}dx$

7) $\int \dfrac{x^2}{x^6+4}dx$

8) $\int \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$

9) $\int \dfrac{dx}{1+\cos x+\sin x}$

10) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Вариант №4

1) $\int \dfrac{x^2}{x^3+8}dx$

2) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$

3) $\int e^{\cos x}\sin xdx$

4) $\int\left(4-5x\right)3^x dx$

5) $\int \dfrac{x^3+9x^2+11x-20}{x^2\left(x+5\right)}dx$

6) $\int (x-1)(x^2+x+1)dx$

7) $\int e^{2\sin x}\cos x dx$ 8) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$ 9) $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x+3\sin^2 x}$

10) $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

Вариант №5

1) $\int e^{\sin x}\cos x dx$ 2) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ 3) $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$

4) $\int \left(x^3-4x+1\right)\ln x dx$ 5) $\int \frac{3x^2-5x+8}{(x-1)\left(x^2+1\right)}dx$ 6) $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^5}dx$

7) $\int \frac{x^2}{x^3+3}dx$ 8) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$ 9) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^5 x}$

10) $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

Вариант №6

1) $\int \frac{(arctgx)^3}{1+x^2}dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ 3) $\int \frac{(2x-2)}{\sqrt{x^2-2x+1}}dx$

4) $\int 4x\, arctgx\, dx$ 5) $\int \frac{-3x^2+4x-4}{(x+4)\left(x^2+1\right)}dx$ 6) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}dx$

7) $\int \frac{(6x-2)}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$ 8) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$ 9) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

Вариант №7

1) $\int \frac{(10x-2)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$ 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ 3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

4) $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\, dx$ 5) $\int \frac{5x^2-29}{(x+2)(x-1)(x+3)}dx$ 6) $\int \frac{e^x x^5-4x^5\sin x+2x^4}{x^5}dx$

7) $\int e^{-x^4}\cdot 4x^3dx$ 8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$ 9) $\int \frac{dx}{5+5\cos x+\sin x}$

10) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

Вариант №8

1) $\int e^{-x^4}\cdot x^3dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$ 3) $\int \cos^3 x\sin x dx$

4) $\int 6x\arcsin x\, dx$ 5) $\int \frac{x^3+x^2+3x+7}{(x-1)(x+2)}dx$ 6) $\int \frac{12x^3-x^2\sin x+2x}{x^2}dx$

7) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$ 8) $\int x\sqrt{3+x}dx$ 9) $\int \frac{dx}{2+4\cos x+3\sin x}$

10) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Вариант №9

1) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$
2) $\int x\sqrt{1+x}dx$
3) $\int \frac{x}{\left(3+x^3\right)^2}dx$
4) $\int \left(3-5x\right)\cos 3x\,dx$
5) $\int \frac{2x^2-5x+2}{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}dx$
6) $\int \frac{(4x+3)^2}{x^3}dx$
7) $\int \frac{x}{\left(3+x^2\right)^5}dx$
8) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
9) $\int \frac{dx}{1+3\cos x+2\sin x}$
10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

Вариант №10

1) $\int \frac{x}{\left(2+x^2\right)^2}dx$
2) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
3) $\int 3^{-x^4}\cdot x^3dx$
4) $\int \left(6x+2\right)\sin 6x\,dx$
5) $\int \frac{-x^2+6x-3}{\left(x+3\right)\left(x^2+1\right)}dx$
6) $\int \left(\frac{x+3}{x^3}\right)^2dx$
7) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$
8) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+3}dx$
9) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$
10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

Вариант №11

1) $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$
2) $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$
3) $\int 5^{-x^3}\cdot x^2dx$
4) $\int \left(3-2x\right)e^{2x}dx$
5) $\int \frac{4x^2-9x-4}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}dx$
6) $\int \frac{4x^3-5x^2e^x+2x^4}{x^2}dx$
7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx$
8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$
9) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x+2\sin^2 x}$
10) $\int \sqrt{4-x^2}dx.$

Вариант №12

1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$
2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$
3) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$
4) $\int \left(x^5-4x^3+3\right)\ln x\,dx$
5) $\int \frac{3x^3+12x-4}{x\left(x^2+4\right)}dx$
6) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$
7) $\int \left(e^x+5\right)^5 e^xdx$
8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$
9) $\int \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$

10) $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx.$

Вариант №13

1) $\int \left(e^x+4\right)^3 e^x dx$
2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$
3) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}dx$
4) $\int (3x+18)2^x dx$
5) $\int \frac{-13x-32}{(x+2)(x-1)(x+4)}dx$
6) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx$
7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$
8) $\int \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$
9) $\int \frac{dx}{5+5\cos^2 x+\sin^2 x}$
10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}dx.$

Вариант №14

1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$
2) $\int \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$
3) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4) $\int (7x-3)5^x dx$
5) $\int \frac{2x^2+3x-19}{(x-3)(x+5)}dx$
6) $\int \frac{x^3+5x^2e^x+x}{x^2}dx$
7) $\int \frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$
8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{2x+1}}dx$
9) $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$
10) $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx.$

Вариант №15

1) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
2) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$
3) $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$
4) $\int 3x\arccos x\,dx$
5) $\int \frac{-6x^2-11x+8}{x(x+2)(x-1)}dx$
6) $\int (x-2)(x^2+2x+4)dx$
7) $\int \cos^8 x\sin x dx$
8) $\int \frac{1}{6+\sqrt{x}}dx$
9) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$
10) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx.$

2 СЕМЕСТР

Типовой расчет № 1
по разделу «Определенный интеграл и его применение»

Вычислить следующие определенные интегралы:

Задание 1

1. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

2. $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}dx.$

3. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$.

4. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.

6. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{4x}{x^2+1}dx$.

7. $\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{3x+25}}dx$.

8. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}dx$.

9. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

10. $\int_2^{10} \sqrt{2x+5}dx$.

Задание 2

1. $\int_2^3 y\ln(y-1)dy$.

2. $\int_{-2}^{0} xe^{-x/2}dx$.

3. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

4. $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

5. $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$.

6. $\int_1^2 (y-1)\ln y dy$.

7. $\int_{-1/2}^{0} xe^{-2x}dx$.

8. $\int_{-1/3}^{-2/3} xe^{-3x}dx$.

9. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

10. $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$.

Задание 3

1. $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2}dx.$

2. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

3. $\int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$

4. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$

5. $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

6. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

7. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

9. $\int_0^1 \frac{x^4dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$

10. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

Задание 4.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x^2$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $y=-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1+\frac{3}{4}x^2$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3-2x-x^2$, $y=0$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $y=1-x^2$ $x=0$, $x=1$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ $y=0$.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2(x-1)$, $x=3$.
10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ ($x\geq 0$).

Задание № 5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=5\sin^3 t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

Задание № 6. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1. $r = 4\cos\phi, r = 2 (r \geq 2).$
2. $r = \cos 2\phi.$
3. $r^2 = 4\cos 2\phi,\ r = 2.$
4. $r = 4\sin 3\phi, r = 2 (r \geq 2).$
5. $r = 1 + \cos\phi,\ r = \cos\phi.$
6. $r = \sin 3\phi.$
7. $r = 6\sin 3\phi, r = 3 (r \geq 3).$
8. $r = \cos 3\phi.$
9. $r = 6\cos 3\phi, r = 3 (r \geq 3).$
10. $r = 2(1 + \cos\phi), r = 2 (r \geq 2).$

Задание № 7. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$
2. $y = 1 - \ln\cos x, 0 \leq x \leq \pi / 6.$
3. $y = 2 - e^x, \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}.$
4. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \dfrac{8}{9}.$
5. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \leq x \leq \dfrac{9}{16}.$
6. $y = e^x + e, \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{15}.$
7. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$
8. $y = 1 - \ln\sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
9. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \dfrac{15}{16}.$
10. $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4.$

Задание № 8. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

2. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

3. $\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$

4. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

5. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ x = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/2 \le t \le \pi.$

6. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

7. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

8. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$

9. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

10. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/6.$

Задание № 9

Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

1. $\rho = 6e^{12\phi/5}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

2. $\rho = 1 - \sin\phi, \quad -\pi/2 \le \phi \le -\pi/6.$

3. $\rho = 5e^{5\phi/12}, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

4. $\rho = 4(1 - \sin\phi), \quad 0 \le \phi \le \pi/6.$

5. $\rho = 2(1 - \cos\phi), \quad -\pi \le \phi \le -\pi/2.$

6. $\rho = 3e^{3\phi/4}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. $\rho = 2\cos\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/6.$

8. $\rho = 5(1 - \cos\phi), \quad -\pi/3 \le \phi \le 0.$

9. $\rho = 5e^{5\phi/12}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

10. $\rho = 8(1 - \cos\phi), \quad -2\pi/3 \le \phi \le 0.$

Задание № 10. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1-5 ось вращения Ox, в вариантах 6-10 ось вращения Oy.

1. $y = 3\sin x, y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$
2. $y = xe^x, y = 0, x = 1.$
3. $y = x^2, y^2 - x = 0.$
4. $y = -1 - x^2, x = 0.$
5. $y = -2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$
6. $y = x^3, y = \sqrt{x}.$
7. $y = x^2, y = 1, x = 2.$
8. $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$
9. $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$
10. $y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \le 0.$

Типовой расчет № 2
по разделу «Функции нескольких переменных»

ВАРИАНТ № 1

1. Найти частные производные второго порядка: $z = \dfrac{x^2}{y-2}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,0	1,5	2,0	3,0	3,2
y_i	8,1	9,0	11,2	13,8	14,7

4. Найти указанные производные $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике $x = 0, \quad y = 0, \; 2x + 3y - 12 = 0$.

ВАРИАНТ № 2

1. Найти частные производные второго порядка функции $z = xe^{xy}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 - y^3$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,3	0,5	0,8	1,1	2,3
y_i	1,4	0,7	-0,9	-2,3	-8,8

4. Найти указанные производные $z = x^y$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике $x = 1, \quad y = 1, \; x + y = 1$.

ВАРИАНТ № 3

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = x^2 \sin(x + y^2)$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 6x^2 y + 2y^3 - 24x - 30y$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0
y_i	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8

4. Найти указанные производные $z = e^x \left(\cos y + x \sin y\right), \quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 - 3xy + y^3$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3$.

ВАРИАНТ № 4

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,2	1,7	3,3	4,1	4,3
y_i	-3,1	-5,6	-17,1	-23,1	-24,8

4. Найти указанные производные $z = y^x, \quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике $x = 0, \quad y = 0, \; x + y = 3$.

ВАРИАНТ № 5

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = \dfrac{x + y^2}{2x - y}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3
y_i	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0

4. Найти указанные производные $z = x^2 + 5xy + 6y^2 x + 2,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 2x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 6

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$z = xye^{x^2}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1.$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-3,4	-3,2	-3,1	-2,5	-1,5
y_i	-13,9	-12,9	-12,2	-9,1	-4,2

4. Найти указанные производные $z = \frac{x + y^2}{y},\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 0,5x^2 - xy$ в области $y = 0,5x^2$, $y = 3$.

ВАРИАНТ № 7

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = x \cdot tg\sqrt{y}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	2,1	2,5	3,0	3,1	3,3
y_i	11,1	12,8	13,9	14,5	15,1

4. Найти указанные производные $z = x^4 + 5x^2 y - 7xy^2 + 8,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x - y + x^2 y$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 8

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = x^y$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$z = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,7	0,9	1,2	1,3	1,7
y_i	1,7	1,1	0,8	0,1	-0,5

4. Найти указанные производные $z=\dfrac{xy}{x^2+3y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}=?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy-4x+8y$ в прямоугольнике $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.

ВАРИАНТ № 9

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z=\dfrac{2x^2+y}{3y+x}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$z=3x^2-6xy-y^3-12x+12y$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,1	-0,5	0,2	0,4	0,7
y_i	2,1	3,4	5,1	6,3	6,9

4. Найти указанные производные $z=x^3+4x^2y-2xy^2-15xy+1$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в треугольнике $x=0$, $y=0$, $x+y=-3$.

ВАРИАНТ № 10

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$z=ye^{x^2}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,2	-0,7	0,3	1,5	1,7
y_i	5,7	5,1	0,1	0,2	-0,7

4. Найти указанные производные $z=2x^3+xy^2+5x^2-y+1$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+8y^3-6xy+2$ в прямоугольнике $x=0$, $x=2$, $y=1$, $y=-1$.

Типовой расчет № 3

по разделу «Кратные и криволинейные интегралы»

Задание № 1

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.
2. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} f(x,y)dy$.
3. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.
4. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.
5. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.
6. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.
7. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.
8. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^3}^{10-x} f(x,y)dy$.
9. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f(x,y)dx$.
10. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$.

Задание № 2

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=4$, $z=0$, $z=3$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=9$, $z=1$, $z=2$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x=y^2$, $x=1$, $z=0$, $z=2$.
4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2-1$, $y=0$, $z=0$, $z=2$.
5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x=y^2-4$, $x=0$, $z=0$, $z=1$.
6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=y^2$, $x=-1$, $x=2$, $z=4$.
7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=2x^2$, $z=2$, $y=1$, $y=2$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=5-y^2$, $x=0$, $x=2$, $z=1$.
9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=10-x^2$, $y=-1$, $y=1$, $z=1$.
10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Задание № 3

1. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x$, $x=2-y^2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=2y$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x+y=1$, $x=y^2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=x$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y-2x=2$, $x+y=2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=y$.
4. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $2x+y=4$, $x-2y=2$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=4x$.
5. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=x^2$.
6. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=3-x^2$, $x=-2$, $x=1$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=2x^2$.
7. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=5-x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=4y$.
8. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x=y^2-4$, $x=-\frac{1}{2}y^2+2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=y^2$.
9. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=5x-6$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=y$.
10. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x=y^2-2$, $y=-2$, $y=1$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=y^2$.

Задание № 4

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x}dl$, где L: парабола от точки $A\left(1;\quad \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\quad 2)$.
2. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L xy^2 dl$, где L: $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, $0\le t\le \frac{\pi}{4}$.

3. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dl$, где L: $r = a\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \cos x \sin x dl$, где L: $y = \ln\sin x$, $\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{\pi}{3}$.
5. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl$, где L: $y = tgx$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.
6. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, где L: $y = \cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.
7. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, где L: $y = \sin x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.
8. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{8y}\,dl$, где L: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt{8}$.
9. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L 2ydl$, где L: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.
10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{y}\,dl$, где L: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Задание № 5

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2x-y)dx + (5y^2-4x)dy$, где L - парабола $y = x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.
2. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L (2x-2y-4)dx + (-2x+10y)dy$, и вычислить его от точки $(0,1)$ до точки $(3,0)$.
3. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L (4x^2-2y)dx + (5x+3xy)dy$. Контур L: $y = 0$, $x = 4$, $y = x$.

4. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3-3y+1\right)dx+\left(x^2-3y+5\right)dy$. Контур L: $y=x^2$, $y=9$.
5. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2+5y\right)dx+\left(2x+4y+5\right)dy$, где L: $y=x^3$, от точки $(1,1)$ до точки $(2,8)$.
6. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x^2+10xy\right)dx+\left(5x^2-8y\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,0)$ до точки $(4,8)$.
7. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(5xy+3\right)dx+\left(2x^2-4y\right)dy$. Контур L: $x=0$, $y=3$, $y=x$.
8. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(5x^2+2y^2-4\right)dx+\left(3x^2-2y^3+1\right)dy$. Контур L: $y=x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2+2xy\right)dx-\left(3x^2-y+1\right)dy$, где L: $y=2-x^2$, от точки $(-1,1)$ до точки $(1,1)$.
10. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(2x-y^2-2\right)dx+\left(-2xy+3y^2\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,5)$ до точки $(6,0)$.

3 СЕМЕСТР

Типовой расчет № 1
по разделу «Ряды»

1. Исследовать сходимость ряда (табл.)

Вариант		**Вариан т**	
1	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}$	**2**	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n+3}{3n+2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)^{2n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n^2}}$

3	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n+2)}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{1+3^{2n}}$	**4**	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-1}{2n^2+2}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+3}\right)^{3n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(5n+2)^4}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$.
5	а) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3n+2}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2n^3-1}$.	**6**	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2-1}{3n^2+4n-5}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^5+3}$ в $\sum_{n=1}^{\infty}n\,tg\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$, г $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ д $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+3}{5n^2+2}\right)$.
7	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{2n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^4}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{2n^4-1}$.	**8**	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi+1)^n}{n^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3n^4-1}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{n^4+2}$.
9	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{n/2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+2n-1}{5n^2+2}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{1}{n^3}$.	**10**	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{n\cdot 3^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n!}$.

2. ***Найти область сходимости ряда:***

Вариант	
1	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2x^n$.
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^3}x^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n(n+1)}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!x^{n-1}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$

Задание 3. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$
2. $\int_0^{0,1} \sin\left(100x^2\right)dx$
3. $\int_0^{1} \cos\left(x^2\right)dx$
4. $\int_0^{1} \frac{\ln\left(1+x/5\right)}{x}dx$
5. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$
6. $\int_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx$

7. $\int_{0}^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx$

8. $\int_{0}^{0,4} \frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}dx$

9. $\int_{0}^{0,3} e^{-2x^2}dx$

10. $\int_{0}^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

Задание 4. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$.

Вариант				
1.	***а)***	$f(x)=x-1,\quad -1\le x\le 1$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-2, -\pi\le x\le 0,\\ 3, 0<x\le\pi.\end{cases}$
2.	***а)***	$f(x)=\lvert x\rvert,\quad -\pi\le x\le\pi$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-x, -2\le x\le 0,\\ 0, 0<x\le 2.\end{cases}$
3.	***а)***	$f(x)=\begin{cases}1, -\pi\le x\le 0,\\ 2, 0<x\le\pi.\end{cases}$	***б)***	$f(x)=x+2,\quad -2\le x\le$
4.	***а)***	$f(x)=2+\lvert x\rvert,\quad -1\le x\le$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-4, -\pi\le x\le 0,\\ 4, 0<x\le\pi.\end{cases}$
5.	***а)***	$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad -\pi\le x\le$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-5, -3\le x\le 0,\\ 5, 0<x\le 3.\end{cases}$
6.	***а)***	$f(x)=x+1,\quad -2\le x\le 2$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-2, -\pi\le x\le 0,\\ 1, 0<x\le\pi.\end{cases}$
7.	***а)***	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	***б)***	$f(x)=4-\lvert x\rvert,\quad -4<x<$
8.	***а)***	$f(x)=x+2,\quad -2\le x\le$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}2, -\pi\le x\le 0,\\ 1, 0<x\le\pi.\end{cases}$

9.	*а)*	$f(x)=x+1, \quad -\pi \le x \le$	*б)*	$f(x)=\begin{cases} -2, -2 \le x \le 0, \\ 3, 0 < x \le 2. \end{cases}$
10.	*а)*	$f(x)=x-2, \quad -\pi \le x \le$	*б)*	$f(x)=\begin{cases} -2, -4 \le x \le 0, \\ 1, 0 < x \le 4. \end{cases}$

Задание 5. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (вариант 1-5) или по синусам (вариант 6-10).

Вариант	
1.	$f(x)=\frac{\pi}{4}-x, \quad 0 \le x \le \pi$
2.	$f(x)=2-x, \quad 0 \le x \le 2$
3.	$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{6}, \quad 0 \le x \le \pi$
4.	$f(x)=x-1, \quad 0 \le x \le 2$
5.	$f(x)=2-\frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi$
6.	$f(x)=1-\frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2$
7.	$f(x)=\begin{cases} 2, \ 0 \le x < 2, \\ 1, \ 2 \le x \le \pi. \end{cases}$
8.	$f(x)=\begin{cases} x, \ 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, \ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$
9.	$f(x)=\pi-2x, \quad x \in [0;\pi]$
10.	$f(x)=\begin{cases} 1, \ 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, \ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$

Типовой расчет № 2

по разделу «Элементы теории поля»

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u = 5x^2 + 4x^3y + 5xz - e^{z^2}$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2y + 5z\sin y + 6z^2$ в точке $M_0(-1;0;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x + y - 2z)\overline{j} + (y + 2z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y - 2z)\overline{j} + (2x - y + 2z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x^2y - z)\overline{i} - xyz\,\overline{j} + (xy^3 + z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x - 4yz)\overline{i} + (2y - 4xz)\overline{j} + (2z - 4xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №2

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3y + 5xz - e^{x+z^2}$ в точке $M_0(-1;2;1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;-2;0)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + 5z\ln y + 6z^2$ в точке $M_0(1;3;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x + z)\overline{i} - 2z\overline{j} + (2y + x + z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $2x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (x + z)\overline{j} + (2x - y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x + y + 3z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = x^2yz\overline{i} + xy^3z\,\overline{j} + (xy^3 + 2z)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x + 3yz)\overline{i} + (2y + 3xz)\overline{j} + (2z + 3xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №3

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3\cos y + 5xz^3 - x + z^2$ в точке $M_0(-1;-2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(y+z)\overline{i}+(x+2y)\overline{j}+(x+3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(2x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x+2y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=x^2y\overline{i}+(xy^3-z)\overline{j}+(xy^3+xz^2)\overline{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(2x+5yz)\overline{i}+(2y+5xz)\overline{j}+(2z+5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №4

1. Найти производную скалярного поля $u=y^2\sin x+2xz^3-yz^2$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u=z\cos xy$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(4x+z)\overline{i}+(z+2y)\overline{j}+(2x-3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x+2y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=4x\overline{i}+(y-z)\overline{j}+(3y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x+y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=x^2\overline{i}+3xy^3\overline{j}+(xy^3z+2xz^2)\overline{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(3x-5yz)\overline{i}+(3y-5xz)\overline{j}+(3z-5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №5

1. Найти производную скалярного поля $u=4x^3y+5xz^3-x+xz^2$ в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u=x^2yz+x\ln(x+y)+6y^2z$ в точке $M_0(-1;4;-2)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(2x+y+z)\overline{i}+(x-2y)\overline{j}+(x+y-3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x+5y+2z=5$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=2x\overline{i}+2z\overline{j}+(x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x+2y+z=2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(x^2+6y)\overline{i}+(2xy^3-z^2)\overline{j}+(2x^4y^3+z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(6x+2yz)\overline{i}+(6y+2xz)\overline{j}+(6z+2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №6

1. Найти производную скалярного поля $u=xe^{y}+2xe^{z}-yz^{2}$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=xy/z$ в точке $M_0(3;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(4x-y-z)\overline{i}+(z+3y)\overline{j}+(2x+5z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+4y+3z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=(x+2y)\overline{i}-z\overline{j}+(x+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $3x+y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(3x+4y^{2}z)\overline{i}+(x-yz^{3})\overline{j}+(xy^{3}-xz^{2})\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(7x-yz)\overline{i}+(7y-xz)\overline{j}+(7z-xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал

Вариант №7

1. Найти производную скалярного поля $u=\ln(3+xy)+5xz^{3}$ в точке $M_0(1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;5;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=\sqrt{xyz-6y^{2}}$ в точке $M_0(2;1;4)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(5x+y+z)\overline{i}+(z-2y)\overline{j}+(y+3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x+2y+2z=5$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=(x-z)\overline{i}+y\overline{j}+(x-z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+3y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(x^{2}+y)\overline{i}+2xy^{3}\,\overline{j}+(x+y^{3}+xz^{2})\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(2x+5yz)\overline{i}+(2y+5xz)\overline{j}+(2z+5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №8

1. Найти производную скалярного поля $u=y^{2}\sin\left(xz\right)$ в точке $M_0(1;-2;-3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=(x+z)\cos y$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(4x+z)\overline{i}+(x+2y)\overline{j}+(2x+4z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $4x+2y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (x-z)\overline{j} + y\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = x^2y^2\overline{i} + (3z - xy^3)\overline{j} + (2x + y^3z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (9x - 5yz)\overline{i} + (9y - 5xz)\overline{j} + (9z - 5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №9

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3 \ln y + 5xz^3 - x$ в точке $M_0(-1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (6x + y + z)\overline{i} + (x+y)\overline{j} + (x+3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $6x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = y\overline{i} + (x-2z)\overline{j} + (y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+3y+3z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (xz^2 - 3y)\overline{i} + (xz^3 - xz)\overline{j} + (y^3 - z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (5x - 9yz)\overline{i} + (5y - 9xz)\overline{j} + (5z - 9xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №10

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2e^{xy} + xz^3$ в точке $M_0(0;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;0;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = z\ln(x + zy^2)$ в точке $M_0(2;1;3)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x + z)\overline{i} + (z+5y)\overline{j} + (2x+7z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+2y+4z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $4x+4y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = z^{2^2}\overline{i} + 3yz^{3^3}\overline{j} + (y^3z - 2xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (3x - 2yz)\overline{i} + (3y - 2xz)\overline{j} + (3z - 2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №11

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3z \arccos y$ в точке $M_0(-1;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;4;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = e^{xyz} + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M) = (y+z)\bar{i} + (x+5y)\bar{j} + (y+x-3z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = zx\bar{i} + (y-x)\bar{j} + (2z-y)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+4y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (x^2-y^2)\bar{i} + (y^3+xz)\bar{j} + (y^3+x^2)\bar{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M) = (4x-8yz)\bar{i} + (4y-8xz)\bar{j} + (4z-8xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №12

1. Найти производную скалярного поля $u = zarctgx + yz^2$ в точке $M_0(0;2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = ze^{x^2+xy}$ в точке $M_0(2;1;-7)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M) = (3x+y)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (2x-3z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+2y+3z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = x\bar{i} + z\bar{j} + (3y-x)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $3x+y+3z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = 2x^2z\bar{i} + (y^3-3xy)\bar{j} + (x^3z-xz^2)\bar{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M) = (7x-5yz)\bar{i} + (7y-5xz)\bar{j} + (7z-5xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №13

1. Найти производную скалярного поля $u = \dfrac{4x^3\cos y}{z^2}$ в точке $M_0(-1;0;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = \cos(xy+z^2) + z\ln x$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M) = (y+z)\bar{i} + x\bar{j} + (x+3z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = (x+y+z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y-z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $3x+2y+z=6$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (z^2-y)\bar{i} + xy^3\bar{j} + xyz^2\bar{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x - 7yz)\overline{i} + (2y - 7xz)\overline{j} + (2z - 7xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №14

1. Найти производную скалярного поля $u = y\ln(2xz^3 + yz^2)$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = y\cos xz + xy^2$ в точке $M_0(2;1;0)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x + z)\overline{i} + z\overline{j} + (2x - y)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x + 2y + z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 4x\overline{i} + (x - y - z)\overline{j} + (3y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $2x + 4y + z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = xy^2\overline{i} + (xz - y^3)\overline{j} + (y^3z + yz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (-3x - yz)\overline{i} + (-3y - xz)\overline{j} + (-3z - xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №15

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3\ln y + 5xz^3 - x + z^2$ в точке $M_0(-1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6z^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x + y)\overline{j} + y\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $2x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y - 2z)\overline{j} + (2x - y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x + 2y + 4z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (6z^2 - 4y)\overline{i} + (2xy^3 - xz)\overline{j} + x^3yz^2\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (4x + 5yz)\overline{i} + (4y + 5xz)\overline{j} + (4z + 5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

ПРИЛОЖЕНИЕ №4

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Вариант 1

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+9}{5n^3-7n+5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+5}\right)^{-n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^2+x-14}$

5. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{6-\sqrt{x^2+20}}{3x+12}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(8x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{arctg(15-5x)}{2x^2+3x-27}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+15x)}{e^{-3x}-1}$

Вариант 2

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3+7n^2+6}{3n^3-5n+4}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n-3}{7n+1}\right)^{2-6n}$

3. $\lim\limits_{x\to2}\left[\ln\left(3x^2-6\right)-\ln\left(x^2+2\right)\right]$

4. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+5x-12}{2x^2+16x+32}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{16-3x}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\sin^2(3x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8^{2x+2}-1}{\sqrt{x^2+15}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10^{7x}-1}{\ln(1+21x)}$

Вариант 3

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-12}{3n^2+6n-4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n+5}\right)^{3n}$

3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x-10}$

4. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{3x^2+10x-25}$

5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{\sqrt{5x+11}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^4(2x)}{x\cdot\arcsin^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+7x-6}{e^{2x+6}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-16x)}{6^{8x}-1}$

Вариант 4

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3+2n^2-n+2}{7n^3+3n^2-7n+8}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+1}\right)^{n-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(2x-7)}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{3x^2-5x-8}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-5}{6-\sqrt{39-3x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(3x)}{tg^4(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{\arcsin(2x-6)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-18x)}{e^{9x}-1}$

Вариант 5

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4+3n^3-6n}{n^5+n^3-9n+8}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+6}\right)^{4n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-13x+6}{-x^2+4x+12}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{4x-20}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(3x)}{x\cdot\sin(9x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4^{20-4x}-1}{x^2-25}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{14x}-1}{\ln(1+21x)}$

Вариант 6

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5-2n^3+6n^2}{9n^5+3n^4-9n+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{10n+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{4x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2-3x-26}{x^3+4x^2+4x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+25}-5}{-x^3+4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{tg^3(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{arctg(2x-12)}{3-\sqrt{x+3}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{4^{-10x}-1}$

Вариант 7

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2-11}{n^3-9n+14}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+4}{6n+5}\right)^{-3n}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-5x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+3x-27}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-8}{\sqrt{17-4x}-3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^4(2x)}{x^2\cdot tg^2(6x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{e^{12-3x}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{6x}-1}{\ln(1-24x)}$

Вариант 8

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-5n^2+6}{n^2+2n^3-9n+14}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-11}{2n+15}\right)^{-4n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5^x-4}{x^2-3x+9}$

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-20x+50}{-x^2+3x+10}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{7x-3}}{1-x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot arctg^2(6x)}{tg^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6-\sqrt{5x+31}}{\sin\left(x^2-1\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\ln(1+25x)}$

Вариант 9

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^7-2n^5+6n}{9n^7+3n^3-4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{5n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+7}{\ln\left(3x^2-2\right)}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+5x-1}{3x^2-4x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{15-3x}{3-\sqrt{4x-11}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(4x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{12^{5x+5}-1}{3x^2+5x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-17x)}{e^{-5x}-1}$

Вариант 10

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6n-5}{n^4+13n^3-9n+14}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+10}{n-2}\right)^{-n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2-3x+1\right)}{e^{2x+3}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{7x^2+8x-12}{3x^2-4x-20}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-7x}-3}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^4(x)}{1-\cos(8x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{\sqrt{x^2+12}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{11^{4x}-1}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Вариант 1

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{8^{x+6}-8^3}{e^{2x+6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{8}{x^3}-4\sqrt{x^3}+2x^7$ 2. $y=\dfrac{3\arcsin x-e^x}{5\log_3 x+6x^2}$

3. $y=\ln\cos(2x+5)$ 4. $y=\left(x^3+1\right)^{tgx}$

5. $y=\left(6\ln x-5^x\right)\left(15+7\sin x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arcctg6t, \\ y=2t^3-9t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y=x^3-9x^2+15x-3$

Вариант 2

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{\ln\left(4x^2-3\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=5x^2-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{2}{x^6}$ 2. $y=\dfrac{2arctgx+4^x}{3\ln x-4x^5}$

3. $y=\arccos\left(\log_4 7x\right)$ 4. $y=\left(tgx\right)^{\sin x}$

5. $y=\left(3\log_9 x+e^x\right)\left(21-2\cos x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(2-5t\right), \\ y=t^5+5t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции:
$y=4x^3+4x^2+x-16$

Вариант 3

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{3^{2x+3}-3}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\dfrac{5}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{7x^4-5\log_9 x}{e^x-3\arcsin x}$

3. $y=arctg\left(\cos 3x\right)$ 4. $y=(\cos x)^{tgx}$

5. $y=\left(4\ln x-6^x\right)\left(1+5ctgx\right)$

3 Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg5t, \\ y=3t^5+5t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности экстремум функции: $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$

Вариант 4

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{5-5x}-1}{\ln(5x-4)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt{x^5}+\dfrac{4}{x^3}-3x^3$ 2. $y=\dfrac{5^x-3arctgx}{4x^3+2\ln x}$

3. $y=e^{\sin(6x-5)}$ 4. $y=\left(x^4+1\right)^{\sqrt{x}}$

5. $y=\left(2\log_3 x-6\cos x\right)\left(9+e^x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(3+4t), \\ y=2t^4-6t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции: $y=3x-x^3$

Вариант 5

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{3x-9}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=9x^3-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$ 2. $y=\dfrac{e^x+2\arcsin x}{5x^2-4\log_7 x}$

3. $y=\sin(arctg2x)$ 4. $y=(2x+1)^{e^x}$

5. $y=\left(5\ln x+8tgx\right)\left(5^x-8\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arcctg4t, \\ y=3t^4-8t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y=2x^3-12x^2+18x$

Вариант 6

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln\left(2x^2-31\right)}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=3\sqrt{x}+\dfrac{4}{x^5}-7x$ 2. $y=\dfrac{4x^5+7\ln x}{8^x-5arctgx}$

3. $y=e^{-\arccos(2x)}$ 4. $y=(\sin x)^{x^2-3}$

5. $y=\left(4ctgx-7\log_2 x\right)\left(e^x+\sqrt{5}\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(6-5t), \\ y=5t^3-10t. \end{cases}$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутостии точки перегиба функции: $y=x^3-5x^2+3x-5$

Вариант 7

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-4)-\ln 2}{e^{5x-15}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt{x^3}-\dfrac{4}{x^5}-5x^3$ 2. $y=\dfrac{e^x+3\arccos x}{2x^7-5\log_6 x}$

3. $y=(2-tg5x)^{10}$ 4. $y=(arctgx)^{x^2}$

5. $y=(3\sin x+4\ln x)\left(2^x-\sqrt{7}\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg3t, \\ y=2t^6+3t^2. \end{cases}$

6. Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y=x^4-2x^2-5$

Вариант 8

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x-3}-1}{\ln\left(28-3x^2\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=7x^2-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{8}{x^3}$ 2. $y=\dfrac{2\arcsin x-6^x}{3\ln x-5x^4}$

3. $y=\cos(\log_3 6x)$ 4. $y=(arctgx)^{\ln x}$

5. $y=(2ctgx-3\log_6 x)\left(e^x+1\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(7+4t), \\ y=6t^2+12t. \end{cases}$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции: $y=2x^3+3x^2-12x+1$

Вариант 9

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3^{5x-20}-3^5}{e^{15-3x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=8x^3-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$ 2. $y=\dfrac{4\log_3 x+6x^6}{3\arccos x-e^x}$

3. $y=tg\left(4^{5x-6}\right)$ 4. $y=(2x+5)^{\frac{1}{x^2}}$

5. $y=(9\ln x-4\sin x)\left(3-4^x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg2t, \\ y=5t^4-8t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=x^3-3x^2-9x+7$$

Вариант 10

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{5^{x-7}-1}{\ln\left(x^2-48\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=8x-\dfrac{5}{x^4}-\sqrt[5]{x^4}$
2. $y=\dfrac{7arctgx+9^x}{3\ln x-7x^3}$
3. $y=\left(\sin\left(3x\right)-4\right)^5$
4. $y=\left(x+x^2\right)^x$
5. $y=\left(5\log_8 x+3tgx\right)\left(9-e^x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln\left(3-8t\right), \\ y=4t^4+24t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Вариант 1

1. $\int x\sqrt{5-x^2}dx$.
2. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$
3. $\int\dfrac{3x^2+x^5e^x-4}{x^5}dx$
4. $\int\left(3x-2\right)\cos 2x\,dx$
5. $\int\dfrac{x^3-8x-14}{\left(x+2\right)\left(x-4\right)}dx$
6. $\int\dfrac{dx}{3+2\cos x}$

Вариант 2

1. $\int\sin^5 x\cos xdx$.
2. $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}dx$
3. $\int\left(5+4x\right)\sin 7x\,dx$
4. $\int\dfrac{5x^2+11x+2}{x\left(x+1\right)^2}dx$
5. $\int\dfrac{(x+5)^2}{x^5}dx$
6. $\int\sqrt{256-x^2}dx$.

Вариант 3

1. $\int\dfrac{\sqrt[6]{\ln x}}{x}dx$.
2. $\int\dfrac{\sqrt{x+9}+1}{\sqrt{x+9}-1}dx$
3. $\int\left(2x-21\right)e^{7x}dx$
4. $\int\dfrac{x^3+2x^2-18x+17}{\left(x-3\right)\left(x+5\right)}dx$
5. $\int\dfrac{6x^2-x^5\sin x+22x}{x^5}dx$
6. $\int\dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$

Вариант 4

1. $\int \frac{x^2}{x^3-9}dx$.
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{4x+1}}dx$
3. $\int (4+x)7^x dx$
4. $\int \frac{x^3+9x^2+11x-20}{x^2(x+5)}dx$
5. $\int (x-2)(x^2+2x+4)dx$
6. $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$

Вариант 5

1. $\int e^{-2\sin x}\cos x dx$.
2. $\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx$
3. $\int (x^3+5x+1)\ln x dx$
4. $\int \frac{3x^2-5x+8}{(x-1)(x^2+1)}dx$
5. $\int \frac{(x^3+3)^2}{x^5}dx$
6. $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x+3\sin^2 x}$

Вариант 6

1. $\int \frac{(arctgx)^5}{1+x^2}dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}+\sqrt{(x+5)^3}}$
3. $\int 4x\, arctgx\, dx$
4. $\int \frac{-3x^2+4x-4}{(x+4)(x^2+1)}dx$
5. $\int \frac{(6x\ \ -3)^2}{x}dx$
6. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^5 x}$

Вариант 7

1. $\int \frac{(10x-4)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$.
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}dx$
3. $\int (5x^2-16x^4-2)\ln x\, dx$
4. $\int \frac{5x^2-29}{(x+2)(x-1)(x+3)}dx$
5. $\int \frac{e^x x^6+4x^6\sin x+9x^4}{x^6}dx$
6. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

Вариант 8

1. $\int e^{x^6}\cdot x^5 dx$.
2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$
3. $\int 6\arcsin x\, dx$
4. $\int \frac{x^3+x^2+3x+7}{(x-1)(x+2)}dx$
5. $\int \frac{2x^3+x^2\sin 6x+x}{x^2}dx$
6. $\int \frac{dx}{5+5\cos x+\sin x}$

Вариант 9

1. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.
2. $\int x\sqrt{6-x}dx$
3. $\int (3+9x)\cos 8x\, dx$
4. $\int \frac{2x^2-5x+2}{(x-3)(x+2)} dx$
5. $\int \frac{(2x-3)^2}{x^3} dx$
6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Вариант 10

1. $\int \frac{x}{\left(6+x^2\right)^2} dx$.
2. $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$
3. $\int (6x+2)\sin 6x\, dx$
4. $\int \frac{-x^2+6x-3}{(x+3)(x^2+1)} dx$
5. $\int \left(\frac{x+3}{x^2}\right)^2 dx$
6. $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

2 СЕМЕСТР

Контрольная работа № 1

по разделу «Определенные интегралы и их применение»

Вариант №1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos\phi$.
4. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$
5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.
6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi/6$.
7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y = x$.

Вариант №2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos 3\phi$
4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 5e^{5\phi/12}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, x = 2, y = 0.$.

Вариант№3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 1 + \cos\phi$

4.Вычислить длину дуги кривой $y = e^x + 6, \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = \sqrt{2}e^{\phi}, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y = 1, x = 2.$.

Вариант№4

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - 2x - x^2$,
$y = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \sin 3\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x + 2, \quad 0 \le x \le \pi/6$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2e^{4\phi/3}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3, y = x.$.

Вариант№5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$ $x = 0$, $x = 1$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \cos 3\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le \frac{7}{9}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le \pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho=8\cos\phi, \quad 0\le\phi\le\pi/4.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^3, y=x..$

Вариант№6

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ $y=0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=2\left(1+\cos\phi\right).$

4. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(1-x^2), \quad 0\le x\le\frac{1}{4}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t), \\ y=2(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi/2.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho=4e^{4\phi/3}, \quad 0\le\phi\le\pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2, x=2, y=0..$

Вариант №7

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=5\left(t-\sin t\right) \\ y=5\left(1-\cos t\right) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=4\cos 4\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y=-\ln\cos x, \quad 0\le x\le\pi/6$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(t-\cos t), \end{cases}$ $\pi\le t\le 2\pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho=6\cos\phi, \quad 0\le\phi\le\pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+9, y=0..$

Вариант№8

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=3\left(t-\sin t\right) \\ y=3\left(1-\cos t\right) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=\cos 3\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \quad 0\le x\le\frac{3}{4}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi / 3.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = \sqrt{2}e^{\phi}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2, y = 0.$

Вариант№9

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2(x-1)$, $x = 3$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2(t^2 - 1) \\ y = 4(4t - t^2) \end{cases}$, $y = 0$, $t \in [0;4]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2\cos\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad \frac{1}{4} \le x \le 1$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\sin\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/6.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y = 1.$

Вариант№10

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ ($x \ge 0$).

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = 5(t^2 + 1) \\ y = 2(t^2 - 3t) \end{cases}$, $y = 0$, $0 \le t \le 3$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2(1 + \cos\phi).$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \le x \le 2$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi / 3.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 12e^{12\phi/5}, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y^2 - x = 0.$

Вариант №11

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4, \quad x = y, \; x = 4$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos 4\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 7(1 - \sin\phi), \quad -\pi/6 \le \phi \le \pi/6.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3x - x^2, y = 0.$

Вариант№12

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x},\ y = \dfrac{3}{x},\ x = 9$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 6(t^2 + 1) \\ y = 4(t^2 - 3t) \end{cases},\ y = 0, t \in [0;3]$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2\sin 4\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le \dfrac{8}{9}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 3e^{3\phi/4}, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y = 1, x = 0$.

Вариант№13

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 8x,\ x = 8$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 6(t^2 + 1) \\ y = 4(t^2 - 3t) \end{cases}, \quad y = 0,\ t \in [0;3].$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2\cos 6\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = 2 - e^x, \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 8\sin\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/4.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3\sin x, y = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$

Вариант №14

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 4,\ x = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t \end{cases},\ 0 \le t \le \frac{1}{2}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 3(1 + \cos\phi)$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x, 0 \le x \le \pi/6$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi/2.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\phi, \quad 0 \le \phi \le 3/4.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x, y = 0, x = 1.$

Вариант№15

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 7(t^2 + 1) \\ y = 3(t^2 - 3t) \end{cases}, \quad y = 0, \quad 0 \le t \le 3$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \sin\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(x^2 - 1), 2 \le x \le 3$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/6.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 6\sin\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = 5\cos x, y = \cos x,\ x = 0, x \le 0.$

Контрольная работа № 2

по разделу «Двойные и криволинейные интегралы»

ВАРИАНТ № 1

1. Поменять порядок интегрирования $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x, y) dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = xy$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L: $r = 2\cos\phi$, $-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.
5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint_L \left(2xy + y^2\right) dx + \left(3x^2 + 2y + 1\right) dy$. Контур L: $x = 0$, $y = 4$, $y = x^2$.

ВАРИАНТ № 2

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2} f(x,y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x = y^2$, $x + y = 6$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 3x$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 9$, $z = 1$, $z = 2$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L: $r = 2\sin\phi$, $0 \le \phi \le \pi$.
5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint_L \left(-2x^2 + xy + 10\right)dx + \left(2x + 3y^2 - 5\right)dy$. Контур L: $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

ВАРИАНТ № 3

1. Поменять порядок интегрирования $\int_{-2}^{2} dy \int_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x = 3 - y^2$, $y = 2$, $y = -1$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = x$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = y^2$, $x = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L \int_L \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,dl$, где L: $r = 1 - \cos\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$.
5. Вычислить интеграл $\int_L \left(5x + 2y^2\right)dx + 3xydy$, где L: $y = -x^3$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,-8)$.

ВАРИАНТ № 4

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_{y-2}^{-\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=5y$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2-1$, $y=0$, $z=0$, $z=2$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L\int\limits_L xdl$, где L: дуга окружности $r=R$, в I четверти.
5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L (2x+2y)dx+(2x+6y-5)dy$, и вычислить его от точки $(1,1)$ до точки $(5,4)$.

ВАРИАНТ № 5

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=x+2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=x^2$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x=y^2-4$, $x=0$, $z=0$, $z=1$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, где L:
$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases} 0\le t\le 2\pi$.
5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3-2xy\right)dx+(x-2y+6)dy$. Контур L: $y=0$, $x=3$, $y=x^2$.

ВАРИАНТ № 6

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x+2}^{4-x^2} f(x,y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=-2x^2+8$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=2x^2$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = y^2$, $x = -1$, $x = 2$, $z = 4$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L \int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x} dl$, где L: $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.
5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L (3x^5 - 2xy + 1)dx + (5xy - 4y^2 + 5y)dy$. Контур L: $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

ВАРИАНТ № 7

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x, y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $x + y = 4$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = x + 1$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2$, $z = 2$, $y = 1$, $y = 2$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L \int\limits_L \frac{x^3}{y^2} dl$, где L: $xy = 1$, $1 \le x \le 2$.
5. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^3 - y + 1)dx + (2xy - 3)dy$, где L: $x = y^2$, от точки $(4, -2)$ до точки $(4, 2)$.

ВАРИАНТ № 8

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} f(x, y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $2x + y = -4$, $y = 4x - 4$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = -2y$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 5 - y^2$, $x = 0$, $x = 2$, $z = 1$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L\int\limits_L \sqrt{1+x^4}\,dl$, где L: $y=\dfrac{x^3}{3}$, $1\le x\le 2$.
5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+6y^2\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,0)$ до точки $(3,9)$.

ВАРИАНТ № 9

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=x+2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=-5x$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=10-x^2$, $y=-1$, $y=1$, $z=1$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L\int\limits_L \sqrt{1+x^6}\,dl$, где L: $y=\dfrac{x^4}{4}$, $0\le x\le 1$.
5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L (xy+2)dx+\left(3x+2y^2\right)dy$. Контур L: $y=0$, $x=4$, $x=y^2$.

ВАРИАНТ № 10

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{6-x^2}} f(x,y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x$, $y=-3x+12$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=3x$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L\int\limits_L y^2dl$, где L: $y=\dfrac{x}{2}$, $0\le x\le 2$.

5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(2x^3+5xy+y^2\right)dx+\left(x^2+y^2-2y^3\right)dy$. Контур L: $y=x^2-9$, $y=0$.

3 СЕМЕСТР

Контрольная работа № 1
по разделу «Ряды»

Вариант №1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=\frac{\pi}{2}-x,\quad 0\le x\le\pi$

Вариант №2

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^{n}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{2n^4+n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3n+2}$

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1}\sin\left(100x^2\right)dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=x+|x|, \quad -1<x<1$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам $f(x)=\pi-x, \quad x\in(0;\pi)$

Вариант №3

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+100}{100n^2-2}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{3n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+2n-1}{5n^2+2}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+3}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{1}\cos\left(x^2\right)dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=1-x, \quad -2\le x\le 2$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=2x-1, \quad x\in(0;1)$

Вариант №4

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4n}{2n^4-1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2+2}\right)^{n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n!}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+2}$.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{100n^2+1}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+2}}x^n$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x}dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=2x+1, \quad -1\le x\le 1$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам $f(x)=2-x, \quad x\in(0;2)$

Вариант №5

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n^5-3n+2}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-2}{n+1}\right)^n$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n+6}{10n+101}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{\sqrt{n^5+5}}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^3+1}}$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=2-x, \quad -1\le x\le 1$
9. . Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=\frac{x}{2}-1, \quad 0\le x\le 4$

Вариант №6

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{4n^3-3}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n(n+2)}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6+2}{3n^6-1}$.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{3n^4+5}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,2}\sin\left(25x^2\right)dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=x+2, \quad -\pi\le x\le\pi$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам $f(x)=\frac{\pi}{2}-x, \quad 0\le x\le\pi$

Вариант №7

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\sqrt{n}+5}{n+4}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+2}{3n-1}\right)^n$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\cdot n!}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n+3}{3n+2}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2n!}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\frac{(x-3)^n}{3^n}$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,5}\cos\left(4x^2\right)dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=\frac{\pi-4}{4}, \quad -\pi\le x\le\pi$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}, \quad 0\le x\le\pi$

Вариант №8

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{2}{3^n}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n-1)}{2^n(n+1)}$.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-1}{2n^2+2}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5n}{6n^2-1}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{4^n(n^2+1)}$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,4}\frac{\ln(1+x/2)}{x}dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=\begin{cases}-4, & -2\le x<0,\\ 4, & 0\le x\le 2.\end{cases}$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4},\quad 0\le x\le\pi$

Вариант №9

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{1+3^n}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2-2}{4n^2+5}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n}{2^n\cdot(3n+2)}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2-1}{3n^2+4n-5}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+5)^n}{5^{2n}}$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,3}e^{-2x^2}dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=|x|,\quad -3\le x\le 3$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=2x-1,\quad x\in(0;\pi)$

Вариант №10

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3n^3+2}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-2}{6n+5}\right)^{2n}$.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^2\cdot 3^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3}{3n^4-n}$
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+2}$.
6. Найти область сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n(n+3)}$
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,4}\sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=\begin{cases} x+1, & -2\le x<0, \\ 1, & 0\le x\le 2. \end{cases}$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам $f(x)=2-x, \quad x\in(0;2)$

.

Контрольная работа № 2

по разделу «Элементы теории поля»

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u=x^2+4x^3y+5xz-z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2+4xz+5xy-yz^2$ в точке $M_0(-1;-2;0)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M)=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+2z)\bar{k}$;p: $x+2y+z=2$

4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(x-z)\bar{i}-y\bar{j}+(y+z)\bar{k}$.

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\bar{a}(M)=(2x-4yz)\bar{i}+(2y-4xz)\bar{j}+(2z-4xy)\bar{k}$

Вариант №2

1. Найти производную скалярного поля $u = 3x^2 + 4x^3 \ln y - z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-2;2;-2)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = 2x^2 y + xz^2 + 5xy^3 - 2$ в точке $M_0(-1;2;0)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M) = (x+y)\bar{i} + (y+2z)\bar{j} + z\bar{k}$;р: $2x + y + z = 4$

4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (x - 2z^2)\bar{i} - xy\,\bar{j} + (2y+z)\bar{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\bar{a}(M) = (5x - yz)\bar{i} + (5y - xz)\bar{j} + (5z - xy)\bar{k}$

Вариант №3

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 \cos y + x^3 y + 5xz - 5xz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = 2x^2 y + xz^3 + 5yz^2 + x$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M) = 5x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (2x+z)\bar{k}$;р: $x + y + z = 2$

4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (x^2 - z)\bar{i} - xy\,\bar{j} + (xy + 2z)\bar{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\bar{a}(M) = (5x + 4yz)\bar{i} + (5y + 4xz)\bar{j} + (5z + 4xy)\bar{k}$

Вариант №4

1. Найти производную скалярного поля $u = 3x^2 + x^3 y + 5x + \ln(z + z^2)$ в точке $M_0(1;3;1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = 2xy^2 + xyz + 5yz^2 + 9y$ в точке $M_0(3;-2;2)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M) = (y + 2z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (x - y)\overline{k}$;p: $x + 3y + z = 3$

4. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (2x^2 - z)\overline{i} - xy\,\overline{j} + (y^2 + z)\overline{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\overline{a}(M) = (-2x + 4yz)\overline{i} + (-2y + 4xz)\overline{j} + (-2z + 4xy)\overline{k}$

Вариант №5

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 \ln y + 5xz - z^2 + 4x - 5y + 1$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz^2 + 4xz + xy - z^2 + 2$ в точке $M_0(4;-2;0)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M) = (2x + z)\overline{i} + z\overline{j} - y\overline{k}$;p: $3x + y + 3z = 3$

4. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x - yz)\overline{i} - y^2\,\overline{j} + (xy + z^3)\overline{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\overline{a}(M) = (3x + yz)\overline{i} + (3y + xz)\overline{j} + (3z + xy)\overline{k}$

Вариант №6

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2\cos(y^2) + 5xz - z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;-1;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = 4x^3z + 5x^2y - yz^2 + 6x + 5$ в точке $M_0(-1;-2;3)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M) = 3x\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (2x-y)\bar{k}$;p: $x + 4y + z = 4$

4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = xy^2\bar{i} - y^3z\,\bar{j} + (2y+z)\bar{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\bar{a}(M) = (-10x + 5yz)\bar{i} + (-10y + 5xz)\bar{j} + (-10z + 5xy)\bar{k}$

Вариант №7

1. Найти производную скалярного поля $u = z\ln(x^2 + 4x^3y)$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = 4xz + 5x^2y - yz^2 - 5z + 2$ в точке $M_0(1;-2;3)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M) = (y-2x)\bar{i} + (y-z)\bar{j} + x\bar{k}$;p: $x + y + 3z = 3$

4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (xy - z^3)\bar{i} - 2y^4\,\bar{j} + (y + xz)\bar{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\bar{a}(M) = (6x - 2yz)\bar{i} + (6y - 2xz)\bar{j} + (6z - 2xy)\bar{k}$

Вариант №8

1. Найти производную скалярного поля $u=(x^2+4x^3)\cos y+5xz$ в точке $M_0(0;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;0;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=2xy-yz^2-x^3yz+12$ в точке $M_0(1;2;3)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M)=z\overline{i}+(x-z)\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$;p: $x+y+z=2$

4. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(x+z^2)\overline{i}-xy\,\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\overline{a}(M)=(-2x-3yz)\overline{i}+(-2y-3xz)\overline{j}+(-2z-3xy)\overline{k}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ОБРАЗЦЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕСТОВ

1 СЕМЕСТР
КОПТ № 1 «Пределы»

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

Ответы:

1) -4; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 1; 3) $e^{\frac{1}{3}}$; 4) e^3.

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+2}\right)^2$$

Ответы:

1) $-\frac{1}{7}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{4}{25}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

Ответы:

1) 0; 2) -1; 3) a; 4) 1.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{7}{3}$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Ответы:

1) $1/2$; 2) $\sqrt{2}$; 3) ∞; 4) $4/3$

КОПТ № 2 «Дифференцирование функций»

Вариант 1

Найти производные:

1) $y=\dfrac{3x+\sin x}{\cos x-10}$.   Найти y'.

Ответы:

а) $y'=-\dfrac{3+\cos x}{\sin x}$;   б) $y'=\dfrac{3-\cos x}{\sin^3 x}$;

в) $y'=\dfrac{3x\sin x-7\cos x-29}{(\cos x-10)^2}$;   г) $y'=\dfrac{\cos 2x-3x\sin x-7\cos x-30}{(\cos x-10)^2}$.

2) $y=\ln^4(2x+1)$.   Найти y'.

Ответы:

а) $y'=8\ln^3(2x+1)$;   б) $y'=\dfrac{8\ln^3(2x+1)}{2x+1}$;

в) $y'=\dfrac{8}{(2x+1)^3}$;   г) $y'=8\ln(2x+1)\cdot 2$.

3) $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.   Найти y'.

Ответы:

а) $y'=(2xye^y-3x^2)y\dfrac{1}{x^2ye^y}$;   б) $y'=(2xye^y-3x^xy)y\dfrac{1}{1-x^2ye^y}$;

в) $y'=(2xye^y-3x^2y)\cdot\dfrac{1}{1-x^2ye^y}$;   г) $y'=\dfrac{2xye^y-3x^2}{1-xye^y}\cdot y$.

4) $y=(2tg3x+1)^{\sin 3x}$.   Найти y'.

Ответы:

а) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x}\cos 3x$;

б) $y'=[3\cos 3x\ln(2tg3x+1)+\dfrac{6\sin 3x\sec^2 3x}{2tg3x+1}]\cdot(2tg3x+1)^{\sin 3x}$;

в) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x}\cdot\ln(2tg3x+1)$;

г) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x-1}\cdot\cos 3x\cdot 3$.

5) $y=2x^4-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+1$.   Найти y'.

Ответы:

а) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}$;   б) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^4}$;

в) $y'=8x^3+\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$;   г) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}+1$.

6) $y=(x+x^3)\cdot arctgx$.   Найти y'.

Ответы:

а) $y' = (1+3x^2)arctgx + x$; б) $y' = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$;

в) $y' = 3x^2 arctgx + x$; г) $y' = (1+3x^2)\cdot(1+x^2)$.

7) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$. Найти y''_x .

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 - 1}$; б) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + t}$;

в) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + 3}$; г) $y''_x = -\dfrac{10t}{3t^2 - 3}$.

8) $y = 7^{2x} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = 7^x \ln 7 \cdot 2 + \dfrac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}}$; б) $y' = x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{2}{5} x^{\frac{1}{5}}$;

в) $y' = 7^{2x} \ln 7 \cdot 2 - \dfrac{8}{5x\sqrt[5]{x^2}}$; г) $y' = 7^x \ln 7 + x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}$.

2 СЕМЕСТР

КОПТ № 1
«Определенный интеграл и его приложения»

Вариант №1

1. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

Ответы: а) $\dfrac{\pi}{a}$; б) $\dfrac{3\pi}{2a}$; в) $\dfrac{\pi}{12a}$; г) $\dfrac{\pi}{12}$.

2. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

Ответы: а) $2\ln 2 - 1$; б) $2\ln 2$; в) $1 - 2\ln 2$; г) 1.

3. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$.

Ответы: а) 1; б) $\dfrac{\ln 2}{2}$; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

Ответы: а) $\dfrac{5}{2}$; б) $\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{3}{2}$; г) $\dfrac{8}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ответы: а) $3\pi a^2$; б) πa^2; в) πa^2; г) $\frac{\pi}{2} a^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 - \cos\phi)$.

Ответы: а) $2\pi a^2$; б) $\frac{5}{2}\pi a^2$; в) $3\pi a^2$; г) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$

Ответы: а) 32π; б) 64π; в) $\frac{15}{2}\pi$; г) 4π .

8. Вычислить длину дуги линии $y = \ln \sin x$ от точки с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln 3$; б) $\ln 2$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\frac{\pi^2 a}{8}$; б) $\frac{\pi\ a}{8}$; в) $\frac{\pi a^2}{32}$; г) $\frac{a\pi^2}{32}$.

10. Вычислить длину дуги линии $r = a \sin^3 \frac{\phi}{3}$

Ответы: а) $3\pi a$; б) $\frac{\pi a}{2}$; в) πa; г) $\frac{3\pi a}{2}$.

КОПТ № 2

по разделу «Функции нескольких переменных»

Вариант 1

1. Найти область определения функции

$$z = \frac{2x + 3y - 1}{x - y} + \ln(x - y)$$

Ответы:

а) $x \ge 0$; $y \ge 0$;

б) $x > y$;

в) $x \ne y$;

г) $x \ge \frac{1-3y}{2}$.

2. ***Дана функция*** $z = x\ln\frac{y}{x}$***. Чему равно выражение*** $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,e)$***?***

Ответы:

а) 1;

б) $\frac{e+1}{e}$;

в) 3;

г) 0.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

Ответы:

а) $z_{\min}(-4;1) = -11$;

б) $z_{\max}(-4;1) = -11$;

в) экстремума нет;

г) нет верного ответа.

4. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции*** $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x - 1$ ***в треугольнике*** $x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 3$**.**

Ответы:

а) $z_{наиб} = -2{,}8$, $z_{наим} = -4$;

б) $z_{наиб} = -1$, $z_{наим} = -19$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{наиб} = -1$, $z_{наим} = -10$.

5. ***Найти*** $\frac{\partial z}{\partial u}$ ***для функции*** $z = x^2y - y^2x$***, если*** $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases}$

Ответы:

а) $3u^2 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$;

б) $u^2 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$;

в) $-u^2 \cos 2v(\cos v + \sin v)$;

г) $u^2 \cos 2v(u\cos v + \sin v)$.

КОПТ № 3

«Кратные и криволинейные интегралы»

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y = x$, $x + y = 2$, $z^2 = 9x$.

1. $\frac{16}{5}$	3. $\frac{24}{15}$
2. $\frac{10}{3}$	4. $\frac{14}{15}$

3. Вычислить массу неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 6 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 4y$.

1. $\frac{22}{3}$	3. $\frac{112}{5}$
2. $\frac{64}{3}$	4. $\frac{184}{3}$

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{x}{y}\,dl$, где L – часть параболы $y^2 = 2x$ от точки $A\left(1;\sqrt{2}\right)$ до точки $B(2;2)$.

1. $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)$	3. $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)$
2. $5\sqrt{5}-3\sqrt{3}$	4. $5\sqrt{5}+3\sqrt{3}$

5. Вычислить криволинейный интеграл по координатам, доказав, что он не зависит от пути интегрирования

$$\int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}\ .$$

1. $\frac{3}{2}$	3. 0
2. $\frac{1}{2}$	4. $-\frac{3}{2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 6

ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ

1 СЕМЕСТР

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 1 Дисциплина **Математический анализ**

Билет № 1

1) Функция: определение, способы задания, область определения, четность, нечетность.
2) Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-4\right)}{x^2-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$.

4) Найти производные функций

а) $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$, б) $y=\left(\cos x\right)^{5e^x}$.

5) Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\dfrac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx$, б) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{2+3x^3}dx$.

2 СЕМЕСТР

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 2 Дисциплина **Математический анализ**

Билет № 1

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его геометрический и физический смыслы.
2. Вычислить $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=5$.
4. Вычислить интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, где область D ограничена линиями: $x-y=4$, $x=0$, $y=0$.

5. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sin x \cos^3 x dl$, где $L:\quad y = \ln\cos x \quad (0 \le x \le \pi/3)$.
6. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = \dfrac{x+y}{\ln x}$.
7. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 40$.

3 СЕМЕСТР

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
Курс 2 Семестр 3 Дисциплина **Математический анализ**

Билет № 1

1. Признак Даламбера.
2. Производная по направлению.
3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$.
5. Разложить в ряд Фурье функцию $y = 2x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:
   $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y-2z)\overline{j} + (2x - y + 2z)\overline{k}$;
   p: $x + 2y + z = 2$
7. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x-z)\overline{i} - y\overline{j} + (y+z)\overline{k}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 7

ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАЩИТЫ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И КОМПЬЮТЕРНЫХ КОНТРОЛЬНО-ОБУЧАЮЩИХ ТЕСТОВ (КОПТ)

Семестр 1

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	Типовой расчет № 1 (мах 9 б)	Типовой расчет № 2 (мах 9 б)	Типовой расчет № 3 (мах 7 б)
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 2,5**	**0 – 2,5**	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**2,5 – 5**	**2,5 – 5**	**2 – 4**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**5 – 7,5**	**5 – 7,5**	**4 – 5,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**7,5 – 9**	**7,5 – 9**	**5,5 – 7**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	Контрольная работа № 1 (мах 10 б)	Контрольная работа № 2 (мах 10 б)	Контрольная работа № 3 (мах 10 б)
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 2**	**0 – 2**	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2 – 5**	**2 – 5**	**2 – 5**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**5 – 7**	**5 – 7**	**5 – 7**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**7 – 10**	**7 – 10**	**7 – 10**

Шкала оценивания КОПТ

КОПТ "Пределы": всего заданий в тесте 6, из них 4 задания с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1,5 балла, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ "Дифференцирование функций одной переменной": всего заданий в тесте 8, из них 6 заданий с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1 балл, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ "Неопределенный интеграл": каждое задание оценивается в 1 балл, всего заданий в тесте 10.

Семестр 2

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет № 1 (мах 8 б)**	**Типовой расчет № 2 (мах 7 б)**	**Типовой расчет № 3 (мах 15 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 2,5**	**0 – 2**	**0 – 4**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**2,5 – 4**	**2 – 4**	**4 – 9**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**4 – 6**	**4 – 5,5**	**9 – 13**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**6 – 8**	**5,5 – 7**	**13 – 15**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа № 1 (мах 10 б)**	**Контрольная работа № 2 (мах 7 б)**	**Контрольная работа № 3 (мах 10 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 2**	**0 – 2**	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2 – 5**	**2 – 5**	**2 – 5**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях	**5 – 7**	**5 – 7**	**5 – 7**

допущены арифметические ошибки.			
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**7 – 10**	**7 – 10**	**7 – 10**

Шкала оценивания КОПТ

КОПТ " Определенные интегралы и их применения": всего заданий в тесте 6, из них 4 задания с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1,5 балла, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ " Функции нескольких переменных": всего заданий в тесте 8, из них 6 заданий с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1 балл, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ "Кратные и криволинейные интегралы": каждое задание оценивается в 2 балла, всего заданий в тесте 5.

Семестр 3

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет № 1 (мах 18 б)**	**Типовой расчет № 2 (мах 10 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 5**	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**5 – 10**	**2 – 5**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**10 – 15**	**5 – 7**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**15 –18**	**7 – 10**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа № 1 (мах 15 б)**	**Контрольная работа № 2 (мах 12 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 4**	**0 – 3**

Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**4 – 9**	**3 – 6**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**9 – 13**	**6 – 9**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**13 – 15**	**9 – 12**

ПРИЛОЖЕНИЕ № 8

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ КАРТЫ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Семестр 1

<table>
<tr><th>Название модулей дисциплины согласно РПД</th><th>Контроль</th><th>Форма контроля</th><th>зачетный минимум</th><th>зачетный максимум</th><th>график контроля</th></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Пределы функций одной переменной</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета № 1 (9), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>7</td><td>14</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Дифференцирование функций одной переменной</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета №2 (9), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>7</td><td>14</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Неопределенный интеграл</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета №3 (7), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>6</td><td>12</td><td rowspan="2">17</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="3">ВСЕГО за семестр</td><td>40</td><td>70</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Промежуточный контроль (Зачет)</td><td></td><td>20</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Семестровый рейтинг по дисциплине</td><td>60</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

Семестр 2

<table>
<tr><th>Название модулей дисциплины согласно РПД</th><th>Контроль</th><th>Форма контроля</th><th>зачетный минимум</th><th>зачетный максимум</th><th>график контроля</th></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Определенные интегралы и их применения</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета №1 (8), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>6</td><td>13</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Функции двух и нескольких переменных</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета № 2 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)</td><td>6</td><td>10</td><td rowspan="2">35</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кратные и криволинейные интегралы</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета № 3 (15), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>12</td><td>20</td><td rowspan="2">40</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="3">ВСЕГО за семестр</td><td>40</td><td>70</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Промежуточный контроль (Экзамен)</td><td></td><td>20</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Семестровый рейтинг по дисциплине</td><td>60</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

Семестр 3

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Ряды	Текущий контроль	Защита типового расчета № 1 (18 б), активность (3 б), посещаемость (3 б), ДЗ (3 б)	16	27	10
	Рубежный контроль	Контрольная работа № 1	8	15	
Модуль 2					
Теория поля	Текущий контроль	Защита типового расчета № 2 (10 б), активность (2 б), посещаемость (2 б), ДЗ (2 б)	9	16	15
	Рубежный контроль	Контрольная работа № 2	7	12	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Зачет с оценкой)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

ПРИЛОЖЕНИЕ № 9

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета №1
Вариант №1

I.Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение

I. Вычислить пределы, не применяя правила Лопиталя.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)\left(\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}\right)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n+2)-(4n-1)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{9n+2}}{n}+\frac{\sqrt{4n-1}}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{5+\frac{3}{\infty}}{\sqrt{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{(3n^2+1)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}=\dfrac{2\cdot(-2)+5}{\ln(-2+3)}=\dfrac{1}{\ln 1}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\text{\textit{Разделим числитель и знаменатель на}}\ (x+3)\right|$

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \underline{x^3+3x^2} & x^2+2x-3 \\ 2x^2+3x & \\ \underline{2x^2+6x} & \\ -3x-9 & \\ \underline{-3x-9} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2-6x-27 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} & x-9 \\ -9x-27 & \\ \underline{-9x-27} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{tg(2x)}{2x}\right)^3\cdot(2x)^3}{\left(\dfrac{arctg(3x)}{3x}\right)^3\cdot(3x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\cdot(2x)^3}{1\cdot(3x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^3}{27x^3}=\dfrac{8}{27}$.

7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\dfrac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot(x^2-4)}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}.$$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\dfrac{1}{4}$.

9) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{2n^2}{n^3}+\frac{6n}{n^3}+\frac{12}{n^3}}{\frac{9n^2}{n^3}+\frac{5n^3}{n^3}-\frac{8n}{n^3}+\frac{4}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{12}{n^3}}{\frac{9}{n}+5-\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=$$

$$=\frac{2-\frac{2}{\infty}+\frac{6}{\infty}+\frac{12}{\infty}}{\frac{9}{\infty}+5-\frac{8}{\infty}+\frac{4}{\infty}}=\frac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение. Т.к. знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-2}$ равен нулюпри $x=2$, то функция терпит разрыв при $x=2$. Установим тип этой точки разрыва, для этого найдем предел слева и справа в этой точке.

$$\lim_{x\to2-0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{-0}}}=\frac{2}{3+5^{-\infty}}=\frac{2}{3+\frac{1}{5^{\infty}}}=\frac{2}{3+\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to2+0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{+0}}}=\frac{2}{3+5^{+\infty}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Т.о. у функции существуют и левосторонний предел $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\dfrac{2}{3}$ и правосторонний предел $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=0$, но между собой они не равны. Значит точка $x=2$ является точкой разрыва 1 рода. Скачок функции равен $\left|\dfrac{2}{3}-0\right|=\dfrac{2}{3}$.

Образец выполнения типового расчета №2
Вариант №1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$. б) $\lim\limits_{x\to3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

д) $y=x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = \ln(8-7t), \\ y = t^7 - 7t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

5. Найти производную неявной функции $x^3 + 3y^3 - xy = 0$

Решение

Задание 1.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 6x}{4x} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x}{1} = 9$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6} = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{ctg\dfrac{\pi x}{6}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(2x-6)'}{\left(ctg\dfrac{\pi x}{6}\right)'} =$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{2}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}\cdot\dfrac{\pi}{6}} = \frac{2}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{6}} = -\frac{12}{\pi}$$

Задание 2.

а) $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 4\sqrt{x}$

$$y' = \left(5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x}\right)' = \left(5x^3 - 8x^{-2} + 4x^{1/2}\right)' = 5\cdot 3x^2 - 8\cdot(-2)x^{-3} + 4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} =$$

$$= 15x^2 + \frac{16}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

б) $y = \dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)' = \frac{(\cos x)'(x^3+9) - \cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2} == \frac{-\sin x\cdot(x^3+9) - 3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в) $y = \sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)'=$$

$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

$$y'=\left(2arctgx+3^x\right)'\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)'\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$=\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0\right)\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx+3^x\right)$$

д) $y=x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y=\ln(x^{e^x});$ $\ln y=e^x\ln x;$

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x};\qquad y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

$$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

Задание 3. Найти производую y'_x функции $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arccos t\end{cases}$

Вычислим x'_t и y'_t :

$$x'_t=\frac{1}{1+t^2}2t=\frac{2t}{1+t^2},\qquad y'_t=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x_t}=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$$

Задание 4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

Решение.

Исследуем функцию на монотонность и найдем экстремум

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Найдем критические точки 1рода

$$y' = 0, \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0,$$

$$x = 1, \quad x = -1.$$

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ функция убывает,

при $x \in (-1, 1)$ функция возрастает.

$x = -1$ - точка минимума, $y_{min} = y(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$.

$x = 1$ - точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$.

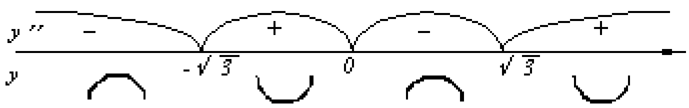
Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2 - (1-x^2)((1+x^2)^2)'}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$\frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x(1+x^2)(1-x^2-2x^2)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Найдем критические точки 2 рода:

$$y'' = 0, \ \frac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3} = 0.$$



$$x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$$

При $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ функция выпуклая,

при $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$ функция вогнутая.

$x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$ - точки перегиба.

Задание 5. Найти производную функции $x^3 + 3y^3 - xy = 0$

Продифференцируем по x равенство $x^3 + 3y^3 - xy = 0$:

$$3x^2 + 3\cdot 3y^2 \cdot y' - xy' - y = 0$$

Из полученного соотношения найдем y':

$$3x^2 - y = (-9y^2 + x)y'$$

$$y' = \frac{3x^2 - y}{x - 9y^2}$$

Образец выполнения типового расчета №3

Вариант №1

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx$

3. $\int x^3 e^{x^4} dx$

4. $\int (3x+2)\sin 2x\, dx$

5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

6. $\int \frac{3x^2 - x^5 e^x - 14}{x^5} dx$

7. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$

9. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

10. $\int \sqrt{9-x^2}dx.$

Решение

1. $\int \sin^3 x \cos x dx = \left|\cos x dx = d\sin x\right| = \int \sin^2 x d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx = \left|\begin{matrix} \sqrt{x+4} = t, \quad x = t^2 - 4 \\ dx = (t^2-4)'dt = 2tdt \end{matrix}\right| = \int (t^2-4)\cdot t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 - 4t^2)dt =$

$$= 2\left(t^4 - 4t^2\right) + C = 2\frac{t^5}{5} - 8\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3} + C.$$

3. $\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int e^{x^4} 4x^3 dx = \left|4x^3dx = dx^4\right| = \frac{1}{4}\int e^{x^4} dx^4 = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$.

4. $\int (3x+2)\sin 2x dx = \left|\begin{matrix} u = 3x+2 \quad \Rightarrow \quad du = (3x+2)'dx = 3dx \\ dv = \sin 2x dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right| =$

$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot 3dx = -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C$$

5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

Разложим знаменатель на множители $(x^2+2x-3)(x-4) = (x-1)(x+3)(x-4)$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$2x^2+41x-91=A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3);$$

$$2x^2+41x-91=A(x^2-x-12)+B(x^2-5x+4)+C(x^2+2x-3);$$

$$2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x+(-12A+4B-3C).$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=2 \\ x & -A-5B+2C=41 \\ x^0 & -12A+4B-3C=-91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим $A=4,\quad B=-7,\quad C=5$.

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx=\int\frac{4}{x-1}dx-\int\frac{7}{x+3}dx+\int\frac{5}{x-4}dx=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$$

6. $$\int\frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^5}-\frac{x^5e^x}{x^5}-\frac{14}{x^5}\right)dx=\int\left(3x^{-3}-e^x-14x^{-5}\right)dx=$$

$$=3\int x^{-3}dx-\int e^xdx-14\int x^{-5}dx=3\frac{x^{-2}}{-2}-e^x-14\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{2x^2}-e^x+\frac{7}{2x^4}+C.$$

7. $$\int\frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}4dx=\left|\frac{dx}{x}=d\ln x\right|=\int\sqrt[4]{\ln x}d\ln x=\frac{(\ln x)^{5/4}}{5/4}+C=\frac{4}{5}\sqrt[4]{\ln^5 x}+C.$$

8. $$\int\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t, & x=t^2+1\\ & dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{t+1}{t-1}2tdt=2\int\frac{t^2+t}{t-1}dt=$$

$$=2\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|\right)+C=t^2+4t+4\ln|t-1|+C=$$

$$=x-1+4\sqrt{x-1}+4\ln\left|\sqrt{x-1}-1\right|+C.$$

9. $$\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x} = \left| \begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} =$$

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1} = arctg(t+1)+C = arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C.$$

10. $$\int \sqrt{9-x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x=3\sin t, & dx=3\cos tdt \\ t=\arcsin\frac{x}{3}, & \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t \end{array} \right| = \int 3\cos t\cdot 3\cos tdt =$$

$$=9\int \cos^2 tdt = 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C =$$

$$=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C = \frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)+C$$

$$\left(\sin\arcsin\frac{x}{3}=\frac{x}{3}, \quad \frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}2\sin t\cos t=\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)$$

<u>2 СЕМЕСТР</u>

Образец выполнения типового расчета №1
Вариант №1

1.Вычислить $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

2. Вычислить $\int_1^2 x^2 \ln xdx$.

3. Вычислить $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

5.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y=3$ ($y\geq 3$).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2=(x+1)^3$, $-1\leq x\leq 4$.

8.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}, \quad 0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

9.Вычислить длину дуги линии $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

10.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение.

Задание 1.Вычислить $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln\left|\ln e^2\right| - \ln|\ln e| = \ln|2\ln e| - \ln 1 = \ln 2$$

Задание 2. Вычислить $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$.

Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$,

тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}$.

Согласно формуле $\int\limits_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ получим:

$$\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\left(2^3 \ln 2 - \ln 1\right) - \frac{1}{3}\int\limits_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} = \frac{24\ln 2 - 7}{9} .$$

Задание 3. Вычислить $\int\limits_1^{64} \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$.

Первообразную найдем, введя подстановку $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. При $x = 1$, $t_1 = \sqrt[6]{1} = 1$; при $x = 64$, $t = \sqrt[6]{64} = 2$.

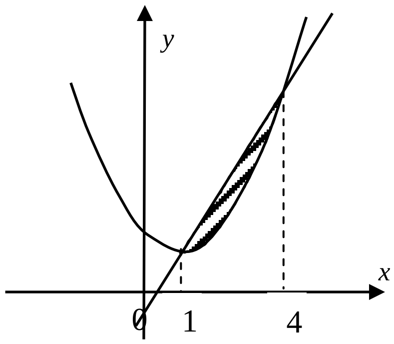
$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\int_1^2\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int_1^2\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int_1^2\frac{t^2+1}{1+t^2}dt-6\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt=6t\Big|_1^2-6arctg\,t\Big|_1^2=6(2-1)-6(arctg2-arctg1)=$$

$$=6-6\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right)=6+\frac{3\pi}{2}-6arctg2.$$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

Сделаем чертеж. Уравнению $y=x^2-2x+3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x=1$, $y=2$, т. к. $y=x^2-2x+3\Rightarrow y-2=(x-1)^2$. Уравнению $y=3x-1$ соответствует прямая.



Найдем точки пересечения заданных линий $\begin{cases}y=x^2-2x+3,\\ y=3x-1.\end{cases}$ $x^2-2x+3=3x-1$, $x^2-5x+4=0$,

$x_1=1$, $x_2=4$.

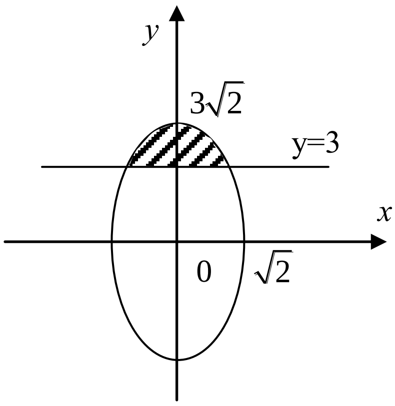
$$\int_1^4(3x-1-(x^2-2x+3))dx=\int_1^4(3x-1-x^2+2x-3)dx=$$

$$=\int_1^4(5x-4-x^2)dx=\frac{5x^2}{2}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4-\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{9}{2}\text{ (кв. ед.).}$$

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=3\sqrt{2}\sin t\end{cases}$, $y=3$ ($y\geq 3$).

Решение:



Уравнениями $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=3\sqrt{2}\sin t\end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a=\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$).

Уравнению $y=3$ соответствует прямая, параллельная оси Ox. Сделаем чертеж. Получаем фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Найдем пределы изменения параметра t. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=3\sqrt{2}\sin t \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3=3\sqrt{2}\sin t,$$

$$\sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ t=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+k\pi, \qquad k\in Z$$

При $k=0$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; при $k=1$, $t_2=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$.

Значит $\frac{3\pi}{4}\geq t\geq\frac{\pi}{4}$, $dx=-\sqrt{2}\sin t dt$.

Искомая площадь равна

$$S=\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\left(3\sqrt{2}\sin t-3\right)\left(-\sqrt{2}\right)\sin t dt=-6\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin^2 t dt+3\sqrt{2}\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin t dt=$$

$$=-6\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-3\sqrt{2}\cos t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}=-3\int_{3\pi/4}^{\pi/4}dt+3\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\cos 2t dt-$$

$$-3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)=-3t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}+\frac{3}{2}\sin 2t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}-3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

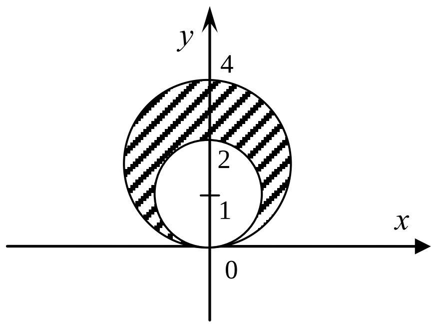
$$=-3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-6=\frac{3\pi}{2}-3\,(\text{кв. ед.}).$$

Задание 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r=2\sin\varphi$.

Зная, что $r^2=x^2+y^2$, а $r\sin\varphi=y$, и умножая обе части равенства $r=2\sin\varphi$ на r, получим



$r^2=2r\sin\varphi$,

$x^2+y^2=2y$,

$x^2+y^2-2y+1-1=0$,

$x^2+(y-1)^2=1$ – это окружность с центром в точке (0; 1) и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r=4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке (0; 2) и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0\leq\varphi\leq\pi$.

Площадь будет равна

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big(\left(4\sin\varphi\right)^2-\left(2\sin\varphi\right)^2\Big)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\varphi d\varphi=$$

$$=6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=3\int_0^{\pi}d\varphi-3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi=3\varphi\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}==3(\pi-0)-\frac{3}{2}\left(\sin 2\pi-\sin 0\right)=3\pi$$

(кв. ед.).

Задание 7. Вычислить длину дуги линии $y^2=(x+1)^3$, $-1\le x\le 4$.

Решение:

Уравнению $y^2=(x+1)^3$, или $y=\pm\sqrt{(x+1)^3}=\pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

$L=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}dx$.Возьмем $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y'=\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{1/2}$.

Тогда

$$L=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}\left(x+1\right)}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx=\frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}\left(9x+13\right)^{\frac{1}{2}}d(9x+13)=\frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3}-\sqrt{4^3}\right)=\frac{1}{27}\left(343-8\right)=\frac{1}{27}\cdot 335=\frac{335}{27}\text{ (лин. ед.).}$$

Задание 8.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4}\end{cases}$, $0\le t\le\sqrt[4]{8}$.

Решение:

Длина дуги вычисляется по формуле $L=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt$.

Найдем $x_t'=\left(\frac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y_t'=\left(2-\frac{t^4}{4}\right)'=-t^3$.

Тогда $L=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{\left(8+1\right)^3}-1\right)=\frac{1}{6}\left(27-1\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$ (лин. ед.)

Задание 9. Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(r'\right)^2}\,d\varphi.$$

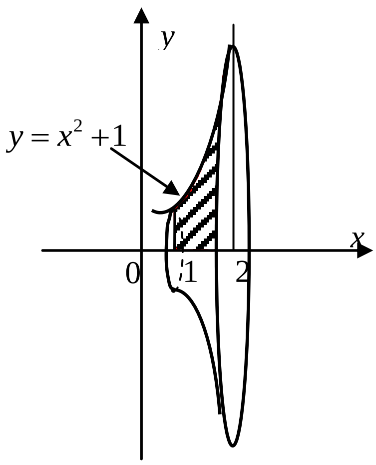
Найдем $r'=\left(2\sin\varphi\right)'=2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\,d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_0^{\pi}=2\left(\pi-0\right)=2\pi$$ (лин. ед.).

Задание 10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение:

Сделаем чертеж.



$$V_x=\pi\int\limits_1^2(x^2+1)^2dx=\pi\int\limits_1^2x^4dx+2\pi\int\limits_1^2x^2dx+\pi\int\limits_1^2dx=\pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2+2\pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2+$$

$$+\pi x\Big|_1^2=\frac{\pi}{5}\left(2^5-1\right)+\frac{2\pi}{3}\left(2^3-1\right)+\pi(2-1)=\frac{178}{15}\pi$$ (куб. ед.)

Образец выполнения типового расчета №2
Вариант №1

1. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x-2y}$:

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2e^{x-2y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2e^{x-2y}.$$

2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

a. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Приравнивая их к нулю, получим, $3x^2 - 3y = 0$, $3y^2 - 3x = 0$.

b. Решаем систему $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ \left(x^2\right)^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0 \end{cases}$ из последней системы, получим $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2, \\ x^3 - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Следовательно, критические точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

c. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3.$$

d. Вычисляем значения этих производных в каждой критической точке:

1) $M_1(0;0)$: $A_1 = 6 \cdot 0 = 0$; $B_1 = -3$; $C_1 = 6 \cdot 0 = 0$.

2) $M_2(1;1)$: $A_2 = 6 \cdot 1 = 6$; $B_2 = -3$; $C_2 = 6 \cdot 1 = 6$.

e. Проверяем в каждой точке выполнение достаточного условия

1) $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – экстремума нет.

2) $\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 6\cdot 6-(-3)^2 = 36-9 = 27>0$ – экстремум есть, причем $A_2 = 6 > 0$, следовательно, в точке M_2 минимум.

f. Находим экстремальное значение функции $z_{\min} = 1^3 + 1^3 - 3\cdot 1\cdot 1 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = -1$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	120	140	230	370	445	570	655	770

Решение.

1) Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

xi	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	120	120	1
2	2	140	280	4
3	3	230	690	9
4	4	370	1 480	16
5	5	445	2 225	25
6	6	570	3 420	36
7	7	655	4 585	49
8	8	770	6 160	64
$\sum$	36	3300	18 960	204

Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 204a + 36b = 18960, \\ 36a + 8b = 3300. \end{cases}$$

Ее решение $a = \frac{685}{7}$, $b = -\frac{195}{7}$ дает искомую зависимость: $y = \frac{685}{7}x - \frac{195}{7}$.

Ответ: $y = \frac{685}{7}x - \frac{195}{7}$.

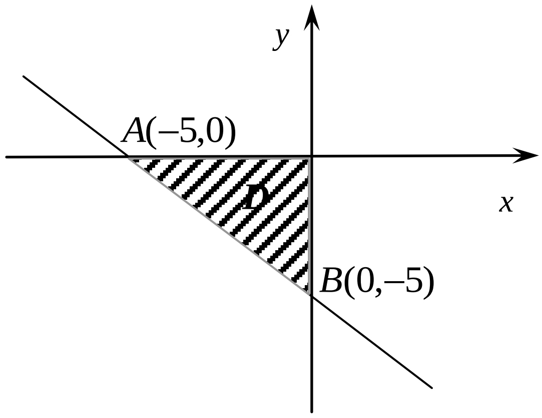
4. Вычислить $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутой области D, ограниченной линиями: $x + y + 5 = 0$ и осями координат.

Решение.



1) Для определения критических точек внутри области находим частные производные функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2$.

Приравниваем их к нулю и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Получим $x = -2$; $y = -1$. Итак, имеется одна внутренняя критическая точка $M_1(-2,-1)$, принадлежащая заданной области D.

2) Определяем значение функции в этой точке: $z(M_1) = (-2)^2 - (-2)(-1) + 2(-1)^2 + 3(-2) + 2(-1) + 1 = -3$.

3) Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезков *OA, OB* и отрезка прямой *AB*.

а) На отрезке *OA* $y = 0$, а заданная функция принимает при $y = 0$ такой вид: $z = x^2 + 3x + 1 \; (-5 \le x \le 0)$.

Эта функция – функция одного переменного, должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. рис). Так как на этом отрезке функция z непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в критических точках функции, лежащих внутри интервала, где $\frac{dz}{dx} = 0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим, прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3; \; 2x + 3 = 0; \; x = -\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x = -\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $-5 \le x \le 0$:

$$z(-\frac{3}{2},0) = -\frac{5}{4}; \qquad z(-5,0) = 11; \; z(0,0) = 1.$$

Сравнение показывает, что $\left(z_{наиб}\right)_{OA} = 11; \left(z_{наим}\right)_{OA} = -\frac{5}{4}$.

б) На отрезке OB $x = 0$, а данная функция при $x = 0$ принимает вид:

$$z = 2y^2 + 2y + 1 \left(-5 \le y \le 0\right).$$

Полученная функция одного переменного должна быть рассмотрена на отрезке $\left[-5, 0\right]$ (см. рис.) и в силу непрерывности на нем должны существовать наименьшее и наибольшее значения.

Определим прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 2;\ 4y + 2 = 0;\ y = -\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y = -\frac{1}{2}$ и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2};\ z(0, -5) = 41;\ z(0, 0) = 1.$$

Сравнение показывает, что $\left(z_{наиб}\right)_{OB} = 41;$ $\left(z_{наим}\right)_{OB} = \frac{1}{2}$.

в) Исследуем функцию на отрезке *AB,* принадлежащем границе области.

Уравнение *AB*: $x + y + 5 = 0$. Поэтому не ней $y = -x - 5$.

Подставляя это значение *y* в заданную функцию, получаем

$$z = 4x^2 + 26x + 41.$$

Наибольшее и наименьшее значения этой функции должны быть определенык для значений $-5 \le x \le 0$:

$$\frac{dz}{dx} = 8x + 26;\ 8x + 26 = 0;\ x = -\frac{13}{4}.$$

Находим соответствующее значение *y*. Из $y = -x - 5$ следует, что

$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = \frac{13}{4} - 5 = -\frac{7}{4}.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$, так как она лежит в исследуемой области.

Определим значение функции в найденной точка и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}) = -\frac{5}{4}; \qquad z(0, -5) = 41;\ z(-5, 0) = 11.$$

Сравним результаты и получим, что $\left(z_{наиб}\right)_{AB}=41$; $\left(z_{наим}\right)_{AB}=-\dfrac{5}{4}$.

4) Сравним значения функции z во внутренней критической точке M_1 с наибольшими и наименьшими значениями на границе, составленной из отрезков *OA, OB, AB*, найденными в пунктах а, б и в.

Видим, что в заданной замкнутой области

$$z_{наиб}=z(0,-5)=41;$$

$$z_{наим}=z(-2,-1)=-3.$$

Таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла во внутренней критической точке $M_1(-2,-1)$, а наибольшего – на границе области, в точке $B(0,-5)$.

Ответ: $z_{наиб}=z(0,-5)=41$, $z_{наим}=z(-2,-1)=-3$.

Образец выполнения типового расчета №3 по разделу "Кратные и криволинейные интегралы"

Вариант №1

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.

Решение. Построим область интегрирования.

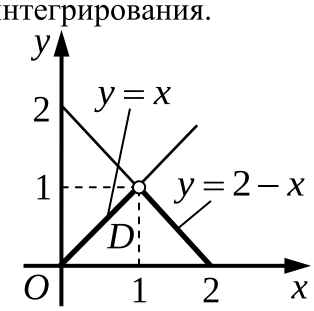


Рисунок 1

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx=\left|\begin{matrix}0\le y\le 1 & 0\le x\le 2\\ x=y & y=x\\ x=2-y & y=2-x\end{matrix}\right|=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x$, $x=2-y^2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho\left(x,y\right)=2y$.

Решение. Построим кривые, ограничивающие данную пластину.

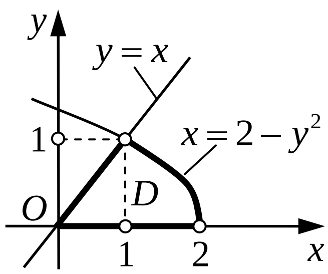


Рисунок 2

Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы $x = 2 - y^2$ и прямой $y = x$. Приравниваем:

$$y = 2 - y^2 \;\Rightarrow\; y^2 + y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 1,\; y_2 = -2(\notin D).$$

Определим статические моменты пластины относительно осей *Ox* и *Oy* и массу пластины.

$$S_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} y\cdot 2y dx = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} 2y^2 dx = \int_0^1 dy\cdot 2y^2\, x\Big|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy\cdot 2y^2\left(2 - y^2 - y\right) = \int_0^1 \left(4y^2 - 2y^4 - 2y^3\right)dy = \left(4\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{40 - 12 - 15}{30} = \frac{13}{30}.$$

$$S_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} x\cdot 2y dx = \int_0^1 dy\cdot 2y\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy\cdot y\left(\left(2 - y^2\right)^2 - y^2\right) = \int_0^1 y\left(4 - 4y^2 + y^4 - y^2\right)dy = \int_0^1 \left(4y - 5y^3 + y^5\right)dy$$

$$= \left(4\frac{y^2}{2} - 5\frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{24 - 15 + 2}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} 2y dx = \int_0^1 dy\cdot 2y\, x\Big|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy\cdot 2y\left(2 - y^2 - y\right) = \int_0^1 \left(4y - 2y^3 - 2y^2\right)dy = \left(4\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^4}{4} - 2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{12 - 3 - 4}{6} = \frac{5}{6}.$$

Тогда, координаты центра тяжести пластины x_c и y_c будут равны:

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{11\cdot 6}{12\cdot 5} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\frac{13}{30}}{\frac{5}{6}} = \frac{13 \cdot 6}{30 \cdot 5} = \frac{13}{25} = 0,52.$$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело.

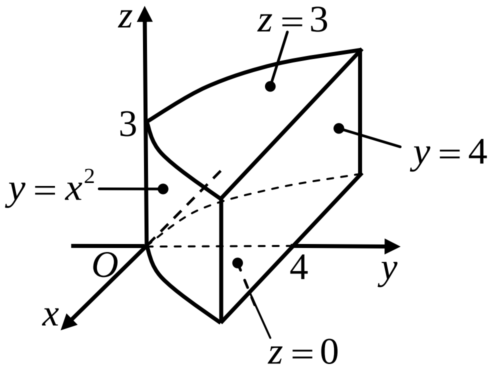


Рисунок 3

Для определения пределов интегрирования, спроектируем его на координатную плоскость *Oxy*.

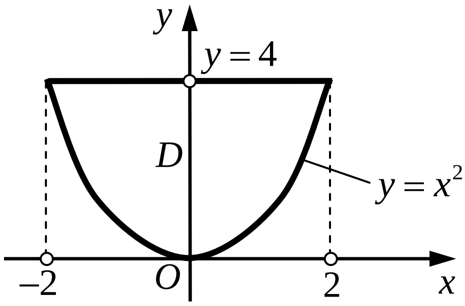


Рисунок 4

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$:

$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$.

$$V = \iint\limits_D z(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D 3dxdy = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \cdot y\Big|_{x^2}^{4} = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \cdot \left(4 - x^2\right)$$

$$= 3\int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = 3\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(12x - x^3\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= (24 - 8) - (-24 + 8) = 16 - (-16) = 32 \text{ } \textit{куб.ед.}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x}\,dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ 2)$.

Решение. Т.к.кривая L задана в декартовой системе координат, то

$$dl = \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx = \sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\right]^2}dx = \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\cdot 2x\right]^2}dx = \sqrt{1+x^2}dx.$$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{4y}{x}dl = \int\limits_1^2 \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx = \int\limits_1^2 2x\sqrt{1+x^2}dx = \left|\begin{matrix}\textit{заносим } 2x \textit{ под знак} \\ \textit{дифференциала}\end{matrix}\right| =$$

$$= \int\limits_1^2 \sqrt{1+x^2}d\left(x^2\right) = \int\limits_1^2 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right) = \left.\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{2}{3}\left(\left(1+4\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+1\right)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = 5,57$$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2x-y)dx + \left(5y^2-4x\right)dy$, где L - парабола $y = x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

Решение. Кривая L задана в декартовой системе координат, поэтому

$$dy = \left(x^2\right)'dx = 2xdx.$$

Подставляя в заданный интеграл $y = x^2$, $dy = 2xdx$, имеем

$$\int\limits_L (2x-y)dx + \left(5y^2-4x\right)dy = \int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)dx + \left(5\left(x^2\right)^2 - 4x\right)2xdx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)dx + \left(10x^5 - 8x^2\right)dx = \int\limits_0^2 \left(2x-x^2+10x^5-8x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x-9x^2+10x^5\right)dx = \left.\left(2\frac{x^2}{2} - 9\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^6}{6}\right)\right|_0^2 = 4 - 3\cdot 8 + \frac{10}{6}\cdot 64 = 4 - 24 + \frac{320}{3} =$$

$$= \frac{320}{3} - 20 = \frac{320-60}{3} = \frac{260}{3}$$

3 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета №1 по разделу "Ряды"
Вариант №1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}$.

6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.

7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1}e^{-6x^2}dx$.

8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x<0,\\ 2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x)=x-1,\quad x\in(0;1)$$

Решение

Задание 1. Так как в числителе и знаменателе стоят многочлены, то для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Выберем в качестве эталонного ряда ряд в виде отношения переменных в максимальной степени, стоящих в числителе и знаменателе, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который является расходящимся.

Тогда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0}{1+0}=1\quad(\ne 0\ne\infty).$$

Следовательно, ряды ведут себя одинаково и т.к. эталонный ряд расходится, то и исследуемый ряд тоже расходится.

Задание 2. Применим радикальный признак Коши. Находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^2=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\frac{2-0}{3+0}\right)^2=\frac{4}{9}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 3. Общий член ряда содержит показательную функцию, поэтому для исследования его на сходимость применим признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)\cdot 3^n}{n^2\cdot 3^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(1+0+0)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 4.Проверим выполнение необходимого условия сходимости

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}} = \frac{5-0+0}{2+0} = \frac{5}{2} \neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то необходимое условие сходимости не выполняется и исследуемый ряд расходится.

Задание 5. Данный ряд является знакочередующимся. Следовательно, применяем теорему Лейбница.

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{2}{1} > \frac{2}{2!} = 1 > \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} > \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} > \ldots > \frac{2}{n!} > \ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n!} = \dfrac{2}{\infty} = 0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится. Выясним характер сходимости. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда, т.е. ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n!}$, исследуем его на сходимость. Это знакоположительный ряд, общий член которого содержит факториал. Поэтому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)!}}{\frac{2}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то ряд из модулей сходится, а следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задание 6. Данный ряд является полным степенным рядом, т.к. содержит все степени $x-3$, с коэффициентами $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. Поэтому, для нахождения области сходимости можно воспользоваться радиусом сходимости в форме Даламбера

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

Тогда интервал сходимости определится неравенством: $-R < x-3 < R$, т.е. $-1 < x-3 < 1,\ 2 < x < 4$.Проверим граничные точки, для чего подставим $x=2$ и $x=4$ в исследуемый степенной ряд.

$x=2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ - это знакочередующийся ряд. По теореме Лейбница:

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}>\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится (можно показать что абсолютно) и $x=2$ является точкой сходимости.

$x=4$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд, который сходится, т.к. показатель степени знаменателя $p=2>1$. Поэтому, $x=4$ также является точкой сходимости исследуемого степенного ряда.

Таким образом, область сходимости – это отрезок $x\in[2,4]$.

Задание 7. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Воспользуемся стандартным разложением функции e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

Заменим в нем x на $-6x^2$:

$$e^{-6x^2}=1+\frac{-6x^2}{1!}+\frac{\left(-6x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-6x^2\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-6x^2\right)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n6^nx^{2n}}{n!}+\ldots$$

Область сходимости этого ряда $x\in(-\infty,+\infty)$ содержит отрезок интегрирования $[0;0,1]$, поэтому применим свойство почленного интегрирования степенных рядов:

$$\int\limits_0^{0,1}e^{-6x^2}dx=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n6^nx^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left.\left(x-\frac{6}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n6^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\right|_0^{0,1}=$$

$$=0,1-\frac{6}{1!}\frac{0,1^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{0,1^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{0,1^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n6^n}{n!}\frac{0,1^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$=0,1-0,002+0,000036-\ldots=$$

$$=\left|\text{\textit{с учетом точности} } \varepsilon=0,001\right|\approx0,1-0,002=0,098.$$

Задание 8. Данная функция является *нечетной* 2π -периодической функцией, следовательно коэффициенты $a_0 = 0$ и $a_n = 0$, а $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$. На интервале $(0,\pi)$ $f(x) = 2$, поэтому

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 2\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{4}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi n}\left(\cos\pi n - \cos 0\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi(2k-1)}, & \text{если } n = 2k-1 \quad (\text{т.е. } n - \text{нечетное}) \\ 0, & \text{если } n = 2k \quad (\text{т.е. } n - \text{четное}) \end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x$$

Задание 9. Т.к. требуется разложить функцию в ряд по косинусам, то интервал $(0,1)$ представляет собой половину периода, т.е. $T = 2l = 2,\ l = 1$. На второй половине периода $(-1,0)$ продлеваем ее четным образом, т.е. полагаем $b_n = 0$, а

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{1}\int\limits_0^{1}(x-1)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx = \frac{2}{1}\int\limits_0^{1}(x-1)\cos\left(\frac{\pi nx}{1}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\text{применим формулу интегрирования по частям} \quad \int\limits_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b V\,dU} \\ U = x-1, & dU = (x-1)'\,dx = dx \\ dV = \cos(\pi nx)\,dx, & V = \int\cos(\pi nx)\,dx = \dfrac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) \end{array} \right| =$$

$$= 2\left((x-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)\,dx\right) =$$

$$= 2\left((1-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n) - (0-1)\frac{1}{\pi n}\sin(0) - \frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx)\right)\Bigg|_0^1\right)$$

$$=2\left(0-0+\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\cos(\pi n)-\cos(0)\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, & \textit{при } n=2k \quad (\textit{т.е. } n-\textit{четное})\\ \dfrac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}, & \textit{при } n=2k-1 \quad (\textit{т.е. } n-\textit{нечетное})\end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\pi(2k-1)x$$

Образец выполнения типового расчета №2 по разделу "Элементы теории поля"

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u=2x^2+5z\cos y+6z$ ***в точке*** $M_0(-1;0;-2)$ ***по направлению от точки*** M_0 ***к точке*** $M_1(1;0;0)$**.**

Решение.

Найдем вектор $\overline{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{M_0M_1}=(1;\,0;\,2);\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+0+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\beta=0;\ \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1+0+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найдем частные производные функции и вычислим их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-5z\sin y;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=5\cos y+6;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=4\cdot(-1)=-4;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=-5\cdot(-2)\cdot\sin 0=0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5\cdot\cos 0+6=11.$$

Теперь найдем производную по направлениюпо формуле

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_{M_0}=-4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+0\cdot 0+11\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{5}}.$$

Т.к. $\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}>0$, то функция в данном направлении возрастает.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2 + 4x^3y + 5xz - z^2$ ***в точке*** $M_0(1;2;-1)$ ***и его модуль.***

Найдем частные производные функции и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 12x^2y + 5z; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 5x - 2z;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2\cdot 1 + 12\cdot 1^2\cdot 2 + 5\cdot(-1) = 21; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 4\cdot 1^3 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 5\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 7.$$

Теперь найдем градиентпо формуле $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$;

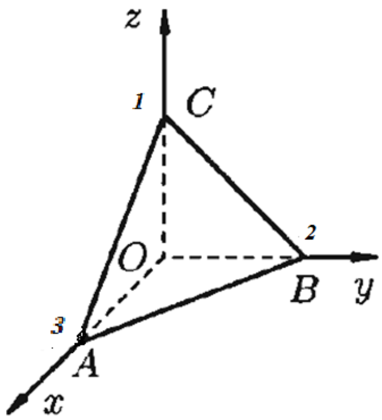
$$grad\,u\big|_{M_0} = 21\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k},$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\left|grad\,u\big|_{M_0}\right| = \sqrt{21^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{441 + 16 + 49} = \sqrt{506}.$$

3.Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M) = 2z\bar{i} + (x + 3y - 2z)\bar{j} + (y + 2z)\bar{k}$ ***через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P:*** $2x + 3y + 6z = 6$ ***и координатными плоскостями по формуле Остроградского.***

Решение. Поток поля $K = \oiint\limits_S a_n ds$



Согласно формуле Остроградского $\oiint\limits_S a_n ds = \iiint\limits_V div\bar{a}\cdot dv$.

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

По условию $P = 2z$, $Q = x + 3y - 2z$, $R = y + 2z$.

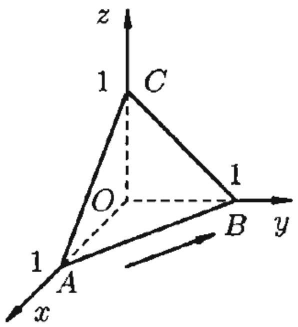
$$div\vec{a}(M) = 0 + 3 + 2 = 5$$

$$K = \oiint\limits_S a_n ds = \iiint\limits_V 5dv = 5\iiint\limits_V dv = 5\cdot V_{пир} = 5\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO\cdot CO = 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5$$

4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M)=y\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-y)\overline{k}$ **;** **р:** $x+y+z=1$.



Решение.

Согласно определению

$$C=\oint\limits_L ydx+(y+z)dy+(x-y)dz\,.$$

$$\oint\limits_L=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}\,.$$

На отрезке *AB*: $z=0$, $x+y=1$, $y=1-x$, $dy=-dx$, $dz=0$, следовательно

$$\int\limits_{AB}=\int\limits_0^1(1-x)dx+(1-x-0)(-dx)=\int\limits_0^1 0dx=0\,.$$

На отрезке *BC*: $x=0$, $y+z=1$, $z=1-y$, $dz=-dy$, $dx=0$, следовательно

$$\int\limits_{BC}=\int\limits_1^0(y+(1-y))dy+(0-y)(-dy)=\int\limits_1^0(y+1)dy=\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Bigg|_1^0=-\frac{3}{2}.$$

На отрезке *CA*: $y=0$, $x+z=1$, $z=1-x$, $dz=-dx$, $dy=0$, следовательно

$$\int\limits_{CA}=\int\limits_0^1 0+0+(x-0)(-dx)=\int\limits_0^1(-x)dx=\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\,.$$

$$C=0-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2\,.$$

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(x^2y-3z)\overline{i}-x^2yz\,\overline{j}+(xy^3+z)\overline{k}$ **.**

Решение.

$$rot\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

По условию $P=x^2y-3z$, $Q=-x^2yz$, $R=xy^3+z$.

Найдем частные производные $\frac{\partial R}{\partial y}=3xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=-x^2y$, $\frac{\partial P}{\partial z}=-3$, $\frac{\partial R}{\partial x}=y^3$,

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xyz$, $\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$.

$$rot\vec{a}(M)=\left(3xy^2+x^2y\right)\vec{i}+\left(-3-y^3\right)\vec{j}+\left(-2xyz-x^2\right)\vec{k}$$

6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(3x-4yz)\bar{i}+(3y-4xz)\bar{j}+(3z-4xy)\bar{k}$ ***потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля*** $\vec{a}(M)$ ***найти его потенциал.***

Решение.

Вычислим дивергенцию поля по формуле $div\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

По условию $P=3x-4yz$, $Q=3y-4xz$, $R=3z-4xy$.

$div\vec{a}(M)=3+3+3=9\neq 0$, следовательно поле не соленоиальное.

Вычислим ротор поля, для этого найдем частные производные

$\frac{\partial R}{\partial y}=-4x$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=-4x$, $\frac{\partial P}{\partial z}=-4y$, $\frac{\partial R}{\partial x}=-4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-4z$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-4z$.

$rot\vec{a}(M)=\left(-4x+4x\right)\vec{i}+\left(-4y+4y\right)\vec{j}+\left(-4z+4z\right)\vec{k}=0$, следовательно поле потенциальное. Найдем потенциал поля, используя формулу

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} P(\chi,y_0,z_0)d\chi+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\xi,z_0)d\xi+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\zeta+C$$

В качестве фиксированной точки выберем начало кооринат $x_0=y_0=z_0=0$

$P(\chi,y_0,z_0)=3\chi$, $Q(x,\xi,z_0)=3\xi$, $R(x,y,\zeta)=3\zeta-4xy$.

$$U(x,y,z)=\int\limits_0^x 3\chi d\chi+\int\limits_0^y 3\xi d\xi+\int\limits_0^z (3\zeta-4xy)d\zeta+C=\left.\frac{3\chi^2}{2}\right|_0^x+\left.\frac{3\xi^2}{2}\right|_0^y+\left.\left(\frac{3\zeta^2}{2}-4xy\zeta\right)\right|_0^z+$$

$$+C=\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+\frac{3z^2}{2}-4xyz+C$$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 10

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1
Вариант №1

I.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}$

Решение

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{2n^2}{n^3}+\frac{6n}{n^3}+\frac{12}{n^3}}{\frac{9n^2}{n^3}+\frac{5n^3}{n^3}-\frac{8n}{n^3}+\frac{4}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{12}{n^3}}{\frac{9}{n}+5-\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=$$

$$=\frac{2-\frac{2}{\infty}+\frac{6}{\infty}+\frac{12}{\infty}}{\frac{9}{\infty}+5-\frac{8}{\infty}+\frac{4}{\infty}}=\frac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{\left(3n^2+1\right)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$$

3) $$\lim_{x\to-2}\frac{2x+5}{\ln(x+3)}=\frac{2\cdot(-2)+5}{\ln(-2+3)}=\frac{1}{\ln1}=\frac{1}{0}=\infty\,.$$

4) $$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\textit{Разделим числитель и знаменатель на }\left(x+3\right)\right|$$

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3+5x^2+3x-9 \\ \underline{x^3+3x^2\qquad\qquad} \end{array} & \begin{array}{l} x+3 \\ \hline x^2+2x-3 \end{array} \\
-\begin{array}{l} 2x^2+3x \\ \underline{2x^2+6x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} -3x-9 \\ \underline{-3x-9} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^2-6x-27 \\ \underline{x^2+3x\qquad} \end{array} & \begin{array}{l} x+3 \\ \hline x-9 \end{array} \\
-\begin{array}{l} -9x-27 \\ \underline{-9x-27} \end{array} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0.$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^3\left(2x\right)}{arctg^3\left(3x\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg\left(2x\right)}{2x}\right)^3\cdot\left(2x\right)^3}{\left(\frac{arctg\left(3x\right)}{3x}\right)^3\cdot\left(3x\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\left(2x\right)^3}{1\cdot\left(3x\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^3}{27x^3}=\frac{8}{27}.$$

7) $$\lim_{x\to -2}\frac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\left(x^2-4\right)}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}.$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\cdot x^2}{\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\frac{1}{4}.$$

Образец выполнения контрольной работы №2
Вариант №1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$. 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

д) $y=x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(8-7t), \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности,экстремум функции:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Решение

Задание 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x}{1}=9.$$

Задание 2.

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$

$$y'=\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}\right)'=\left(5x^3-8x^{-2}+4x^{1/2}\right)'=5\cdot 3x^2-8\cdot(-2)x^{-3}+4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}=$$

$$=15x^2+\frac{16}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}$$

б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)'=\frac{(\cos x)'(x^3+9)-\cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2}==\frac{-\sin x\cdot(x^3+9)-3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y' = \left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)' =$$

$$= \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y = \left(2arctgx + 3^x\right)\left(5\arcsin - \sqrt{3}\right)$

$$y' = \left(2arctgx + 3^x\right)'\cdot\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right)'\cdot\left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2} + 3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 0\right)\cdot\left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(\frac{2}{1+x^2} + 3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx + 3^x\right)$$

д) $y = x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y = \ln(x^{e^x});$ $\ln y = e^x \ln x;$

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln x + e^x\frac{1}{x}; \qquad y' = y\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right)$$

$$y' = x^{e^x}\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right)$$

Задание 3. Найти производую y'_x функции $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arccos t \end{cases}$

Вычислим x'_t и y'_t :

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}2t = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$$

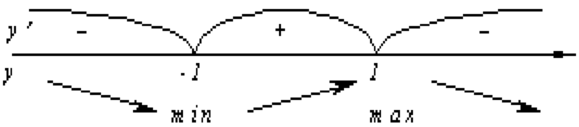
Задание 4.Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Решение.

Найдем первую производную

$$y'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$ Найдем критические точки 1рода

$y'=0$, $\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0$,



$x=1, \quad x=-1.$

При $x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ функция убывает,

при $x\in\left(-1,1\right)$ функция возрастает.

$x=-1$ - точка минимума, $y_{min}=y(-1)=\dfrac{-1}{1+(-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$.

$x=1$ - точка максимума, $y_{\max}=y(1)=\dfrac{1}{1+1^2}=\dfrac{1}{2}$.

при $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ функция вогнутая.

$x=0, \quad x=\sqrt{3}, \quad x=-\sqrt{3}$ - точки перегиба.

Образец выполнения контрольной работы №3

Вариант №1

1. $\int\sin^3 x\cos x dx$.
2. $\int x\sqrt{x+4}dx$
3. $\int\dfrac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$
4. $\int\left(3x+2\right)\sin 2x\, dx$
5. $\int\dfrac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$
6. $\int\dfrac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

Решение

1. $\int\sin^3 x\cos x dx=\left|\cos x dx=d\sin x\right|=\int\sin^2 x d\sin x=\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$.

2. $$\int x\sqrt{x+4}dx=\begin{vmatrix}\sqrt{x+4}=t, & x=t^2-4\\ dx=(t^2-4)'dt=2tdt & \end{vmatrix}=\int(t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt=2\int(t^4-4t^2)dt=$$

$$=2\left(t^4-4t^2\right)+C=2\frac{t^5}{5}-8\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{\left(x+4\right)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(x+4\right)^3}+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}=\begin{vmatrix} & tg\dfrac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt & \\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt, & \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C.$$

4. $$\int(3x+2)\sin 2xdx=\left|\begin{matrix} u=3x+2 \quad\Rightarrow\quad du=(3x+2)'dx=3dx \\ dv=\sin 2xdx \quad\Rightarrow\quad v=\int dv=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x-\int-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 3dx=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C$$

5. $$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$$

Разложим знаменатель на множители $(x^2+2x-3)(x-4)=(x-1)(x+3)(x-4)$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$2x^2+41x-91=A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3);$$

$$2x^2+41x-91=A(x^2-x-12)+B(x^2-5x+4)+C(x^2+2x-3);$$

$$2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x+(-12A+4B-3C).$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=2 \\ x & -A-5B+2C=41 \\ x^0 & -12A+4B-3C=-91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим $A=4,\quad B=-7,\quad C=5$.

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx=\int\frac{4}{x-1}dx-\int\frac{7}{x+3}dx+\int\frac{5}{x-4}dx=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$$

6. $\int \frac{3x^2 - x^5e^x - 14}{x^5} dx = \int \left(\frac{3x^2}{x^5} - \frac{x^5e^x}{x^5} - \frac{14}{x^5} \right) dx = \int \left(3x^{-3} - e^x - 14x^{-5} \right) dx =$

$= 3\int x^{-3}dx - \int e^x dx - 14\int x^{-5}dx = 3\frac{x^{-2}}{-2} - e^x - 14\frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{2x^2} - e^x + \frac{7}{2x^4} + C.$

2 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1
Вариант №1

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 0$ ($y \geq 0$).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

4. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \leq x \leq 4$.

5.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \frac{t^6}{6} \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$, $0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}$.

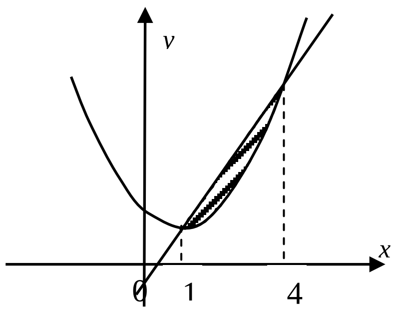
6.Вычислить длину дуги линии $r = 2\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

7.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

Сделаем чертеж. Уравнению $y = x^2 - 2x + 3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x = 1$, $y = 2$, т. к. $y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2$.



Уравнению $y = 3x - 1$ соответствует прямая.

Найдем точки пересечения заданных линий $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ $x^2 - 2x + 3 = 3x - 1$, $x^2 - 5x + 4 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

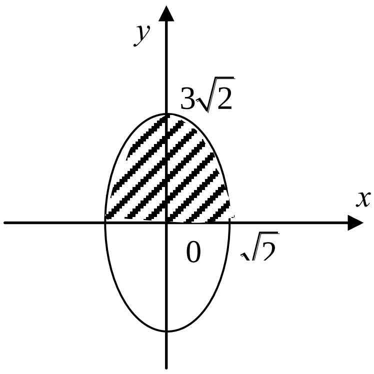
$$\int_1^4 (3x - 1 - (x^2 - 2x + 3))dx = \int_1^4 (3x - 1 - x^2 + 2x - 3)dx =$$

$$=\int_1^4 (5x-4-x^2)dx=\frac{5x^2}{2}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4-\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y=0$ ($y\ge 0$).

Решение:

Уравнениями $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a=\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$).



Уравнению $y=0$ соответствует ось Ox. Сделаем чертеж. Получаем заштрихованную фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Найдем половину искомой площади, параметр $t\in\left[\frac{\pi}{2};0\right]$

$$\frac{1}{2}S=\int_{\pi/2}^{0} 3\sqrt{2}\sin t\left(-\sqrt{2}\right)\sin t dt=-6\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t dt=6\int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt=6\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=3\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

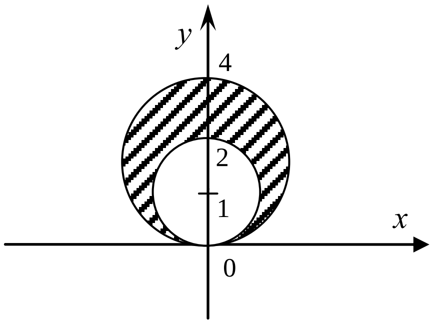
$$=3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2},$$

Тогда искомая площадь будет равна $S=2\cdot\frac{3\pi}{2}=3\pi$ (кв. ед.).

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r=2\sin\varphi$.



Зная, что $r^2=x^2+y^2$, а $r\sin\varphi=y$, и умножая обе части равенства $r=2\sin\varphi$ на r, получим

$r^2 = 2r\sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2y$,

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$,

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – это окружность с центром в точке (0; 1) и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r = 4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке (0; 2) и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$.

Площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left((4\sin\varphi)^2 - (2\sin\varphi)^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_0^{\pi}d\varphi - 3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = = 3(\pi - 0) - \frac{3}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 3\pi$$

(кв. ед.).

Задание 4. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \le x \le 4$.

Решение:

Уравнению $y^2 = (x+1)^3$, или $y = \pm\sqrt{(x+1)^3} = \pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}dx$.Возьмем $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$.

Тогда

$$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx =$$

$$= \int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx = \frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}(9x+13)^{\frac{1}{2}}d(9x+13) = \frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{1}{27}(343-8) = \frac{1}{27}\cdot 335 = \frac{335}{27}$$ (лин. ед.).

Задание 5.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

Решение:

Длина дуги вычисляется по формуле $L = \int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$.

Найдем $x'_t = \left(\dfrac{t^6}{6}\right)' = t^5$, $y'_t = \left(2 - \dfrac{t^4}{4}\right)' = -t^3$. Тогда

$$L = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\left(t^5\right)^2 + \left(-t^3)\right)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^{10} + t^6}\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3\sqrt{t^4 + 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}} \left(t^4 + 1\right)^{\frac{1}{2}} d(t^4 + 1) = \frac{1\cdot 2}{4}\,\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{\left(8+1\right)^3} - 1\right) = \frac{1}{6}\left(27 - 1\right) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$ **(**лин. ед.)

Задание 6. Вычислить длину дуги линии $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(r'\right)^2}\,d\varphi.$$

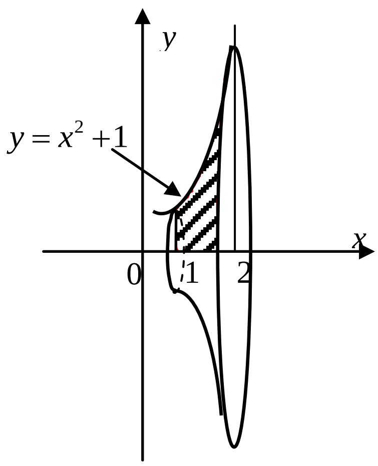
Найдем $r' = \left(2\sin\varphi\right)' = 2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{4(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{\pi} = 2\left(\pi - 0\right) = 2\pi$$ (лин. ед.).

Задание 7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение:

Сделаем чертеж.



$$V_x = \pi\int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi\int_1^2 x^4\,dx + 2\pi\int_1^2 x^2\,dx + \pi\int_1^2 dx = \pi\,\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 + 2\pi\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 +$$

$$+ \pi\,x\Big|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(2^5 - 1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(2^3 - 1\right) + \pi(2-1) = \frac{178}{15}\pi$$ (куб. ед.)

Образец выполнения контрольной работы №2 по разделу "Кратные и криволинейные интегралы"
Вариант №1

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.

Решение. Построим область интегрирования.

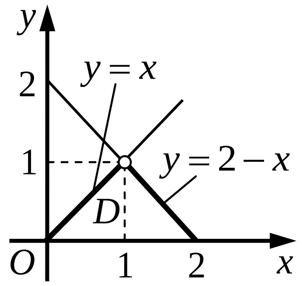


Рисунок 1

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx = \left| \begin{matrix} 0 \le y \le 1 & 0 \le x \le 2 \\ x = y & y = x \\ x = 2-y & y = 2-x \end{matrix} \right| = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 2 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 2y$.

Решение. Построим кривые, ограничивающие данную пластину.

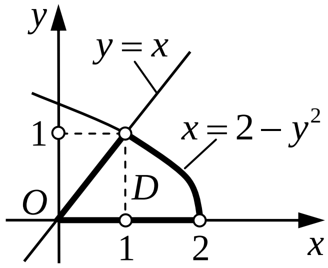


Рисунок 2

Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы $x = 2 - y^2$ и прямой $y = x$. Приравниваем:

$$y = 2 - y^2 \;\Rightarrow\; y^2 + y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 1,\; y_2 = -2 (\notin D).$$

Определим статические моменты пластины относительно осей Ox и Oy и массу пластины.

$$S_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y^2} y \cdot 2y dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y^2} 2y^2 dx = \int\limits_0^1 dy \cdot 2y^2 \, x\Big|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \cdot 2y^2 \left(2 - y^2 - y\right) = \int\limits_0^1 \left(4y^2 - 2y^4 - 2y^3\right) dy = \left(4\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{40 - 12 - 15}{30} = \frac{13}{30}.$$

$$S_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} x\cdot 2y dx = \int_0^1 dy \cdot 2y \frac{x^2}{2}\bigg|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy \cdot y\left(\left(2-y^2\right)^2 - y^2\right) = \int_0^1 y\left(4-4y^2+y^4-y^2\right)dy = \int_0^1\left(4y-5y^3+y^5\right)dy$$

$$= \left(4\frac{y^2}{2} - 5\frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6}\right)\bigg|_0^1 = 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{24-15+2}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} 2y dx = \int_0^1 dy \cdot 2y\, x\Big|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy \cdot 2y\left(2-y^2-y\right) = \int_0^1\left(4y-2y^3-2y^2\right)dy = \left(4\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^4}{4} - 2\frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{12-3-4}{6} = \frac{5}{6}.$$

Тогда, координаты центра тяжести пластины x_c и y_c будут равны:

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{11\cdot 6}{12\cdot 5} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\frac{13}{30}}{\frac{5}{6}} = \frac{13\cdot 6}{30\cdot 5} = \frac{13}{25} = 0{,}52.$$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело.

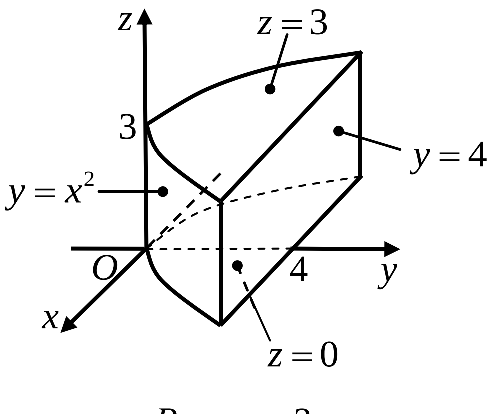


Рисунок 3

Для определения пределов интегрирования, спроектируем его на координатную плоскость *Oxy*.

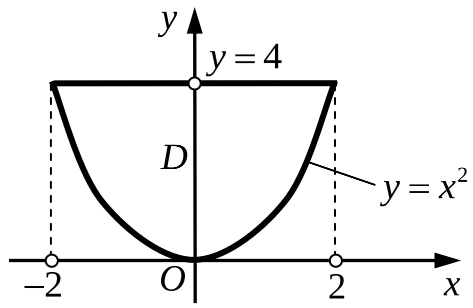


Рисунок 4

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$:

$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$.

$$V = \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D 3dxdy = 3\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy = 3\int_{-2}^{2} dx \cdot y\Big|_{x^2}^{4} = 3\int_{-2}^{2} dx \cdot \left(4 - x^2\right)$$

$$= 3\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = 3\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(12x - x^3\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= (24-8) - (-24+8) = 16 - (-16) = 32 \text{ } \textit{куб.ед.}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x}dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ \ 2)$.

Решение. Т.к.кривая L задана в декартовой системе координат, то

$$dl = \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}dx = \sqrt{1 + \left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\right]^2}dx = \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\cdot 2x\right]^2}dx = \sqrt{1 + x^2}dx.$$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{4y}{x}dl = \int_1^2 \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx = \int_1^2 2x\sqrt{1+x^2}dx = \left|\begin{matrix}\textit{заносим } 2x \textit{ под знак}\\ \textit{дифференциала}\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,d\left(x^2\right) = \int_1^2 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(x^2+1\right) = \frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\left((1+4)^{\frac{3}{2}} - (1+1)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = 5{,}57$$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2x - y)dx + \left(5y^2 - 4x\right)dy$, где L - парабола $y = x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

Решение. Кривая L задана в декартовой системе координат, поэтому

$dy = \left(x^2\right)' dx = 2xdx$.

Подставляя в заданный интеграл $y = x^2,\ dy = 2xdx$, имеем

$$\int_L (2x-y)\,dx+\left(5y^2-4x\right)dy=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left(5\left(x^2\right)^2-4x\right)2xdx=$$

$$=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left(10x^5-8x^2\right)dx=\int_0^2\left(2x-x^2+10x^5-8x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(2x-9x^2+10x^5\right)dx=\left(2\frac{x^2}{2}-9\frac{x^3}{3}+10\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=4-3\cdot 8+\frac{10}{6}\cdot 64=4-24+\frac{320}{3}=$$

$$=\frac{320}{3}-20=\frac{320-60}{3}=\frac{260}{3}$$

<u>3 СЕМЕСТР</u>

Образец выполнения контрольной работы №1 по разделу "Ряды"
Вариант №1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$
$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x<0,\\ 2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам
$$f(x)=x-1,\quad x\in(0;1)$$

Решение

Задание 1. Так как в числителе и знаменателе стоят многочлены, то для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Выберем в качестве эталонного ряда ряд в виде отношения переменных в максимальной степени, стоящих в числителе и знаменателе, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который является расходящимся.

Тогда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0}{1+0}=1\quad(\neq 0\neq\infty).$$

Следовательно, ряды ведут себя одинаково и т.к. эталонный ряд расходится, то и исследуемый ряд тоже расходится.

Задание 2. Применим радикальный признак Коши. Находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^2=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\frac{2-0}{3+0}\right)^2=\frac{4}{9}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 3. Общий член ряда содержит показательную функцию, поэтому для исследования его на сходимость применим признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)\cdot 3^n}{n^2\cdot 3^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(1+0+0)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 4.Проверим выполнение необходимого условия сходимости

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}}=\frac{5-0+0}{2+0}=\frac{5}{2}\neq 0.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то необходимое условие сходимости не выполняется и исследуемый ряд расходится.

Задание 5. Данный ряд является знакочередующимся. Следовательно, применяем теорему Лейбница.

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{2}{1}>\frac{2}{2!}=1>\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}>\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}>\ldots>\frac{2}{n!}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n!}=\frac{2}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится. Выясним характер сходимости. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда, т.е. ряд вида

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$, исследуем его на сходимость. Это знакоположительный ряд, общий член которого содержит факториал. Поэтому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)!}}{\frac{2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то ряд из модулей сходится, а следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задание 6. Данный ряд является полным степенным рядом, т.к. содержит все степени $x-3$, с коэффициентами $a_n=\frac{1}{n^2}$. Поэтому, для нахождения области сходимости можно воспользоваться радиусом сходимости в форме Даламбера

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=(1+0)^2=1.$$

Тогда интервал сходимости определится неравенством: $-R<x-3<R$, т.е. $-1<x-3<1,\ 2<x<4$.Проверим граничные точки, для чего подставим $x=2$ и $x=4$ в исследуемый степенной ряд.

$x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ - это знакочередующийся ряд. По теореме Лейбница:

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}>\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится (можно показать что абсолютно) и $x=2$ является точкой сходимости.

$x=4$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд, который сходится, т.к. показатель степени знаменателя $p=2>1$. Поэтому, $x=4$ также является точкой сходимости исследуемого степенного ряда.

Таким образом, область сходимости – это отрезок $x\in[2,4]$.

Задание 7. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Воспользуемся стандартным разложением функции e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

Заменим в нем x на $-6x^2$:

$$e^{-6x^2}=1+\frac{-6x^2}{1!}+\frac{\left(-6x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-6x^2\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-6x^2\right)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Область сходимости этого ряда $x\in(-\infty,+\infty)$ содержит отрезок интегрирования $[0;0{,}1]$, поэтому применим свойство почленного интегрирования степенных рядов:

$$\int_0^{0,1}e^{-6x^2}dx=\int_0^{0,1}\left(1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{6}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0{,}1-\frac{6}{1!}\frac{0{,}1^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{0{,}1^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{0{,}1^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{0{,}1^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$=0{,}1-0{,}002+0{,}000036-\ldots=$$

$$=\left|\textit{с учетом точности } \varepsilon=0{,}001\right|\approx 0{,}1-0{,}002=0{,}098.$$

Задание 8. Данная функция является *нечетной* 2π -периодической функцией, следовательно коэффициенты $a_0=0$ и $a_n=0$, а $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$. На интервале $(0,\pi)$ $f(x)=2$, поэтому

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{4}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi n}\left(\cos\pi n - \cos 0\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(\left(-1\right)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi\left(2k-1\right)}, & \textit{если } n = 2k-1 \quad \left(\textit{т.е. } n - \textit{нечетное}\right) \\ 0, \quad \textit{если } n = 2k & \left(\textit{т.е. } n - \textit{четное}\right) \end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\left(2k-1\right)}\sin\left(2k-1\right)x$$

Задание 9. Т.к. требуется разложить функцию в ряд по косинусам, то интервал $\left(0,1\right)$ представляет собой половину периода, т.е. $T = 2l = 2,\ l = 1$. На второй половине периода $\left(-1,0\right)$ продлеваем ее четным образом, т.е. полагаем $b_n = 0$, а

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)dx = \frac{2}{1}\int_0^1\left(x-1\right)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx = \frac{2}{1}\int_0^1\left(x-1\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{1}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \quad \textit{применим формулу интегрирования по частям} \quad \displaystyle\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU \\ \quad\quad U = x - 1, \qquad\qquad\qquad dU = \left(x-1\right)'dx = dx \\ dV = \cos\left(\pi nx\right)dx, \qquad V = \displaystyle\int\cos\left(\pi nx\right)dx = \frac{1}{\pi n}\sin\left(\pi nx\right) \end{array} \right| =$$

$$= 2\left(\left(x-1\right)\frac{1}{\pi n}\sin\left(\pi nx\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{1}{\pi n}\sin\left(\pi nx\right)dx\right) =$$

$$= 2\left(\left(1-1\right)\frac{1}{\pi n}\sin\left(\pi n\right) - \left(0-1\right)\frac{1}{\pi n}\sin\left(0\right) - \frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{\pi n}\cos\left(\pi nx\right)\right)\Bigg|_0^1\right)$$

$$= 2\left(0 - 0 + \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\cos\left(\pi n\right) - \cos\left(0\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(\left(-1\right)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, \qquad \textit{при } n = 2k & \left(\textit{т.е. } n - \textit{четное}\right) \\ \dfrac{-4}{\pi^2\left(2k-1\right)^2}, & \textit{при } n = 2k-1 \quad \left(\textit{т.е. } n - \textit{нечетное}\right) \end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\pi(2k-1)x$$

Образец выполнения контрольной работы №2 по разделу "Элементы теории поля"

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u=x^2+4x^3y+5xz-z^2$ ***в точке*** $M_0(1;2;-1)$ ***по направлению от точки*** M_0 ***к точке*** $M_1(2;2;1)$.

Решение.

Найдем вектор $\overline{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{M_0M_1}=(1;0;2);\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+0+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\beta=0;\ \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1+0+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найдем частные производные функции и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+12x^2y+5z;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=4x^3;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=5x-2z;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=2\cdot1+12\cdot1^2\cdot2+5\cdot(-1)=21;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=4\cdot1^3=4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5\cdot1-2\cdot(-1)=7.$$

Теперь найдем производную по направлениюпо формуле

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_{M_0}=21\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+4\cdot0+7\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{35}{\sqrt{5}}=7\sqrt{5}.$$

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial\lambda}>0$, то функция в данном направлении возрастает.

2. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2+5z\cos y+6z$ ***в точке*** $M_0(-1;0;-2)$ ***и его модуль.***

Найдем частные производные функции и вычислим их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-5z\sin y; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=5\cos y+6;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=4\cdot(-1)=-4; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=-5\cdot(-2)\cdot\sin 0=0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5\cdot\cos 0+6=11.$$

Теперь найдем градиентпо формуле $gradU=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$;

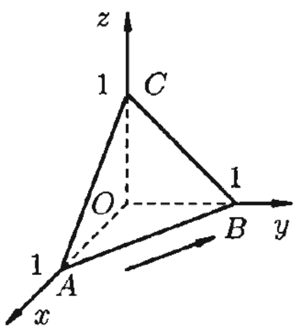
$$grad\,u|_{M_0}=-4\vec{i}+0\vec{j}+11\vec{k}=-4\vec{i}+11\vec{k},$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\left|grad\,u|_{M_0}\right|=\sqrt{(-4)^2+11^2}=\sqrt{16+121}=\sqrt{137}.$$

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M)=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+2z)\bar{k}$ **;** **p:** $x+y+z=1$**.**



Решение.

Согласно определению

$$C=\oint_L xdx+(y-z)dy+(2x-y+2z)dz.$$

$$\oint_L=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}.$$

На отрезке *AB*: $z=0$, $x+y=1$, $y=1-x$, $dy=-dx$, $dz=0$, следовательно

$$\int_{AB}=\int_0^1 xdx+(1-x-0)(-dx)=\int_0^1(2x-1)dx=(x^2-x)\Big|_0^1=0.$$

На отрезке *BC*: $x=0$, $y+z=1$, $z=1-y$, $dz=-dy$, $dx=0$, следовательно

$$\int_{BC}=\int_1^0(y-(1-y))dy+(0-y+2(1-y))(-dy)=\int_1^0(5y-3)dy=\left(\frac{5y^2}{2}-3y\right)\Bigg|_1^0=\frac{1}{2}.$$

На отрезке *CA*: $y=0$, $x+z=1$, $z=1-x$, $dz=-dx$, $dy=0$, следовательно

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 xdx + 0 + (2x - 0 + 2(1-x))(-dx) = \int\limits_0^1 (x-2)dy = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{3}{2}.$$

$$C = 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$$

4. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x^2y - z)\overline{i} - xyz\,\overline{j} + (xy^3 + z^2)\overline{k}$ **.**

Решение.

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

По условию $P = x^2y - z$, $Q = -xyz$, $R = xy^3 + z^2$.

Найдем частные производные $\frac{\partial R}{\partial y} = 3xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -xy$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -1$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^3$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -yz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$.

$$rot\vec{a}(M) = \left(3xy^2 + xy\right)\vec{i} + \left(-1 - y^3\right)\vec{j} + \left(-yz - x^2\right)\vec{k}$$

5. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x - 4yz)\overline{i} + (2y - 4xz)\overline{j} + (2z - 4xy)\overline{k}$ ***потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля*** $\vec{a}(M)$ ***найти его потенциал.***

Решение.

Вычислим дивергенцию поля по формуле $div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

По условию $P = 2x - 4yz$, $Q = 2y - 4xz$, $R = 2z - 4xy$.

$div\vec{a}(M) = 2 + 2 + 2 = 6 \neq 0$, следовательно поле не соленоиальное.

Вычислим ротор поля, для этого найдем частные производные

$\frac{\partial R}{\partial y} = -4x$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -4x$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -4y$, $\frac{\partial R}{\partial x} = -4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4z$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -4z$.

$rot\vec{a}(M) = \left(-4x + 4x\right)\vec{i} + \left(-4y + 4y\right)\vec{j} + \left(-4z + 4z\right)\vec{k} = 0$, следовательно поле потенциальное. Найдем потенциал поля, используя формулу

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} P(\chi,y_0,z_0)d\chi+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\xi,z_0)d\xi+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\zeta+C$$

В качестве фиксированной точки выберем начало кооринат $x_0=y_0=z_0=0$

$P(\chi,y_0,z_0)=2\chi$, $Q(x,\xi,z_0)=2\xi$, $R(x,y,\zeta)=2\zeta-4xy$.

$$U(x,y,z)=\int\limits_0^x 2\chi d\chi+\int\limits_0^y 2\xi d\xi+\int\limits_0^z (2\zeta-4xy)d\zeta+C=\left.\frac{2\chi^2}{2}\right|_0^x+\left.\frac{2\xi^2}{2}\right|_0^y+\left.\left(\frac{\zeta^2}{2}-4xy\zeta\right)\right|_0^z+$$

$$+C=x^2+y^2+z^2-4xyz+C$$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 11

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Оценка промежуточной аттестации:

- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

- 20 баллов - Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Критерии оценивания вопросов для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

баллы	Критерии
8-10	глубоко и прочно усвоил теоретический материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, усвоил методы математического анализа проведения исследований и анализа их результатов
5-7	понимает содержание основных методов математического анализа, грамотно излагает их суть, допуская незначительные неточности в формулировках определений и теорем
1-3	допускает неточности в формулировках определений, теорем; недостаточно владеет теоретическим материалом
0	не знает основных понятий и методов математического анализа

Критерии оценивания заданий для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

баллы	Критерии
20-16	владеет математическими методами, разносторонними навыками и приемами решения практических задач, уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 85-100 % практических заданий)
15-11	умеет применять математические методы, но допускает недочеты и ошибки при решении практических задач, недостаточно уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 50-85 % практических заданий)
10-6	испытывает затруднения при решении практических заданий (в билете решено 30-50 % практических заданий)
5-0	не владеет математическим инструментарием, допускает грубые ошибки при решении практических задач (в билете решено менее 30 % практических заданий)