

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ,
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ГОУ ВПО Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б.Н. Ельцина



Линейная алгебра

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшей математики**

Учебный план **b38030130_21_1 э _234567.plx**
38.03.01 Экономика

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **3 ЗЕТ**

Часов по учебному плану **108**

в том числе:

аудиторные занятия **54**

самостоятельная работа **53,8**

Виды контроля в семестрах:

зачеты с оценкой 1

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	1 (1.1)		Итого	
Неделя	18 2/6			
Вид занятий	уп	рп	уп	рп
Лекции	26	26	26	26
Практические	28	28	28	28
Контактная работа в период теоретического обучения	0,2	0,2	0,2	0,2
Итого ауд.	54	54	54	54
Контактная работа	54,2	54,2	54,2	54,2
Сам. работа	53,8	53,8	53,8	53,8
Итого	108	108	108	108

Программу составил(и):

д.ф.-м.н., профессор, Байзаков А.Б.; ст. преп., Комарцова Е.А.



Рецензент(ы):

к.ф.-м.н., доцент, Усенов И.А.



Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (приказ Минобрнауки России от 12.08.2020 г. № 954)

составлена на основании учебного плана:

38.03.01 Экономика

утвержденного учёным советом вуза от 29.06.2021 протокол № 10.

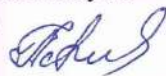
Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Высшей математики

Протокол от 20.10.2021 г. № 2

Срок действия программы: 2021-2025 уч.г.

Зав. кафедрой Лелевкина Л.Г.



Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
06.09 2022 г.

Гусева Ю.В.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2022-2023 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 1 сент 2022 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

✓ Председатель УМС
28.08 2023 г.

Гусева Ю.В.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2023-2024 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 30.08 2023 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
28.10 2024 г.

Лелевкина Л.Г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2024-2025 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 28.08. 2024 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
_____ 2025 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от _____ 2025 г. № _____
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., Гончарова И.В.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Формирование знаний по линейной алгебре необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности;
1.2	развитие логического мышления и математической культуры;
1.3	формирование необходимого уровня алгебраической подготовки для понимания других математических и прикладных дисциплин.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.О
2.1	Требования к предварительной подготовке обучающегося:
2.1.1	Дисциплина «Линейная алгебра» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса математики или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования.
2.2	Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:
2.2.1	Математический анализ
2.2.2	Теория вероятностей и математическая статистика
2.2.3	Эконометрика
2.2.4	Микроэкономика
2.2.5	Макроэкономика

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
--

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	Знать:
3.1.1	основные понятия теории матриц, определителей;
3.1.2	основные сведения о системах линейных алгебраических уравнений и методы их решения;
3.1.3	векторы и линейные операции над ними;
3.1.4	основные понятия матричного анализа;
3.1.5	основы линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;
3.1.6	основы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.
3.2	Уметь:
3.2.1	использовать аппарат линейной алгебры и аналитической геометрии при решении задач специальности;
3.2.2	решать системы линейных алгебраических уравнений;
3.2.3	применять метод координат;
3.2.4	применять методы математического моделирования для решения экономических задач.
3.3	Владеть:
3.3.1	навыками решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии;
3.3.2	навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач;
3.3.3	методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)								
Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Инте пакт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Матрицы, определители, СЛАУ							
1.1	Введение. Математическое моделирование простейших экономических ситуаций. Матрицы и действия над ними. Понятие и свойства определителя. Вычисление определителей 2 и 3-го порядков /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.5Л3.3 Л3.4			

1.2	Действия над матрицами. Применение матриц в экономике. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.4			
1.3	Миноры и алгебраические дополнения. Определители n-ого порядка. /Лек/	1	1	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.5Л3.3 Л3.4			
1.4	Вычисление миноров, алгебраических дополнений, определителей выше 3-го порядка /Пр/	1	1	ОПК-2	Л1.1Л2.1 Л2.6Л3.4			
1.5	Обратная матрица. Ранг матрицы. /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.3Л3.3 Л3.4			
1.6	Нахождение обратной матрицы и определение ранга матрицы. /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.3			
1.7	Системы линейных алгебраических уравнений. Общие сведения. Теорема Кронеккера-Капелли. Метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса. /Лек/	1	3	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3Л3.3 Л3.4			
1.8	Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера. Метод обратной матрицы. Метод Гаусса. /Пр/	1	3	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.3 Л3.4			
1.9	Общее решение системы. Базисные решения системы. Решение однородной системы. Модель Леонтьева. Модель равновесных цен /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.5Л3.3 Л3.4			
1.10	Решение однородной системы /Пр/	1	1	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.3			
1.11	Выполнение домашних заданий. Подготовка к защите типового расчета. Подготовка к контрольной работе /Ср/	1	15		Л1.1Л3.3			
	Раздел 2. Элементы матричного анализа							
2.1	Векторы на плоскости и в пространстве. Основные понятия и определения. Операции над векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3Л3.5			
2.2	Основные операции над векторами. Скалярное произведение и его применение /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.6Л3.5			

2.3	п- мерный вектор и векторное пространство. Евклидово пространство. Разложение вектора по системе векторов. Линейная зависимость системы векторов. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.2Л3.3			
2.4	Разложение вектора по системе векторов. Линейная зависимость системы векторов. Размерность пространства. Переход к новому базису. /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.1Л3.3 Л3.5			
2.5	Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная модель обмена. /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.2Л3.3 Л3.5			
2.6	Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Линейная модель обмена. /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.1Л3.3 Л3.5			
2.7	Выполнение заданий типового расчета. Подготовка к тесту и защите типового расчета /Ср/	1	15		Л1.1 Л1.2Л3.5			
	Раздел 3. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве							
3.1	Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.4			
3.2	Составление уравнений прямых на плоскости. Различные виды уравнений прямых на плоскости. /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.4Л3.1 Л3.2			
3.3	Основные задачи на плоскости: угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых; пересечение прямых; расстояние между двумя точками, деление отрезка в заданном отношении. /Лек/	1	1	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.4			
3.4	Основные задачи на плоскости /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.4Л3.1			
3.5	Линии второго порядка. Окружность. Эллипс /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.4			Визуализация лекции через компьютерные презентации
3.6	Линии второго порядка. Окружность. Эллипс. Приведение уравнений к каноническому виду /Пр/	1	3	ОПК-2	Л1.1Л2.4Л3.1 Л3.2			
3.7	Кривые второго порядка. Гипербола. Парабола /Лек/	1	1	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.4			Визуализация лекции через компьютерные презентации
3.8	Кривые второго порядка. Гипербола. Парабола /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.4Л3.1 Л3.2			

3.9	Плоскость в пространстве. Различные уравнения плоскости /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.4			
3.10	Составление уравнений плоскости. Основные задачи /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.4Л3.1			
3.11	Прямая в пространстве. Основные задачи на прямую в пространстве. Плоскость и прямая. Применение аналитической геометрии в экономике /Лек/	1	2	ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л2.4			
3.12	Прямая в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве /Пр/	1	2	ОПК-2	Л1.1Л2.4Л3.1			
3.13	Подготовка к контрольной работе. Выполнение домашних заданий, выполнение типового расчета и подготовка к защите типового расчета /Ср/	1	23,8	ОПК-2	Л2.4			
3.14	/КрТО/	1	0,2					

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

1. Матрицы. Действия над матрицами. Виды матриц.
2. Применение матриц.
3. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков, их свойства.
4. Определение обратной матрицы. Методы нахождения обратной матрицы.
5. Невырожденная матрица.
6. Элементарные преобразования матриц.
7. Ранг матрицы.
8. Общие сведения о системах уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность.
9. Метод Крамера решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.
10. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
11. Метод Гаусса решения систем уравнений.
12. Теорема Кронекера-Капелли.
13. Общее решение СЛАУ. Схема нахождения общего решения.
14. Базисные решения системы. Опорные решения системы.
15. Модель Леонтьева- модель многоотраслевой экономики.
16. Модель равновесных цен.
17. Вектор. Координаты вектора. Операции над векторами.
18. Скалярное произведение векторов и его свойства.
19. n-мерный вектор и векторное пространство.
20. Линейная зависимость системы векторов.
21. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису.
22. Евклидово пространство.
23. Линейные операторы.
24. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
25. Уравнение прямой на плоскости. Различные формы записи уравнений.
26. Угол между прямыми, условия параллельности, перпендикулярности прямых, точка пересечения прямых.
27. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в заданном отношении.
28. Общие сведения о линиях второго порядка.
29. Кривые второго порядка. Эллипс. Окружность. Основные характеристические точки и прямые.
30. Гипербола. Парабола. Основные характеристические точки и прямые.
31. приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.
32. Уравнение плоскости в пространстве. Различные формы записи уравнений плоскости.
33. Уравнение прямой в пространстве. Различные формы записи уравнений прямой в пространстве.
34. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
35. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
36. Угол между двумя прямыми.
37. Угол между двумя плоскостями.
38. Условие параллельности прямой и плоскости.
39. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.
40. Точка пересечения прямой и плоскости.

41. Угол между прямой и плоскостью.

42. Применение аналитической геометрии в экономике.

Вопросы для проверки уровня обученности УМЕТЬ (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 1).

Вопросы для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 2).

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

курсовые работы учебным планом не предусмотрены.

5.3. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Линейная алгебра» представляет собой комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для контроля и оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, определения соответствия или несоответствия уровня достижений обучающегося планируемым результатам.

Типовые расчеты №1- №3 в количестве 15 вариантов (ПРИЛОЖЕНИЕ 3),

контрольная работа №1, №2 в количестве 10 вариантов (ПРИЛОЖЕНИЕ 4), КОПТ "Аналитическая геометрия", (ПРИЛОЖЕНИЕ 5).

Билеты для проведения итогового контроля в 1 семестре (зачет с оценкой), составляются из базы вопросов для оценки знаний, умений (приложение 1) и навыков (приложение 2), характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Образец билета представлен в ПРИЛОЖЕНИИ № 6

5.4. Перечень видов оценочных средств

Типовые расчеты;

Контрольные работы;

Контрольно-обучающая программа тестирования (КОПТ);

Шкалы оценивания по всем видам в Приложение №7

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман	Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и практикум	2010
Л1.2	Баврин И.И.	Высшая математика: Учеб. Для студентов естественно-научных специальностей педагогических вузов.	Издательский центр «Академия» 2010

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	В.И. Ермаков, Г.И. Бобрик, Р.К. Гринцевичюс	Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие	Москва.: ИНФРА-М 2002
Л2.2	Под ред. В.И. Ермакова	Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник	Москва.: ИНФРА-М 2003
Л2.3	К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко	Глава I. Матрицы и определители	2008
Л2.4	Лелевкина Л.Г., Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б.	Основы аналитической геометрии: Учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2012
Л2.5	Попов А.М., Сотников В.Н., Попов А.М.	Высшая математика для экономистов: Учебник для бакалавров	М.: Юрайт 2012
Л2.6	Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.	Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие	М.: Айрис-пресс 2008

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Ж.Р. Джаналиева, С.Б. Доулбекова	Аналитическая геометрия: Учебно-методическое пособие	2010

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
ЛЗ.2	Федорова Е.С., Эгембердиев Ш.А.	Типовые расчеты по аналитической геометрии: Типовые расчеты	КР-СУ 2003
ЛЗ.3	Усенов И.А., Усенова Р.К.	Элементы линейной алгебры: Лекции	КР-СУ 2011
ЛЗ.4	Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.	Линейная алгебра. Ч. 1: Учебно-методическое пособие	Бишкек: КРСУ 2015
ЛЗ.5	Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.	Линейная алгебра. Ч. 2: учебно-методическое пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2017

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	Традиционные образовательные технологии – лекции, практические занятия, ориентированные прежде всего на сообщение знаний и способов действий, передаваемых студентам в готовом виде и предназначенных для воспроизводящего усвоения и разбора конкретных задач.
6.3.1.2	Инновационные образовательные технологии – занятия в интерактивной форме, которые формируют системное мышления и способность генерировать идеи при решении различных творческих задач. К ним относятся: проблемная лекция; лекция с визуализацией; лекция-диалог; диалоговая форма обучения (предполагает разработку целенаправленной системы вопросов, поиск ответов на которые служит основой для включения студентов в дискуссию, в самостоятельный поиск необходимой информации); групповая форма работы (парами, фронтальная, групповая, индивидуальная, микрогруппы); метод «мозгового штурма» (участники обсуждения высказывают большое количество вариантов решения той или иной задачи).
6.3.1.3	Информационные образовательные технологии: электронные тексты лекций с презентациями; компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования, разработанные кафедрой; самостоятельное использование студентом компьютерной техники и интернет-ресурсов для выполнения домашних заданий, типовых расчетов и самостоятельной работы по различным разделам математического анализа.

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Линейная алгебра. Курманбаева А.К., Комарцова Е.А. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/linalg2015.pdf
6.3.2.2	Аналитическая геометрия Лелевкина Л.Г., Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/2012.pdf
6.3.2.3	Векторная алгебра Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/9vectalg.pdf

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1	Лекционная аудитория на 50 посадочных мест;
7.2	Аудитория для проведения практических занятий на 25 посадочных мест;
7.3	Компьютерный класс для выполнения самостоятельной работы и просмотра фото-, аудио-, мультимедиа, видео-материалов;
7.4	Интерактивная доска;
7.5	Проектор;
7.6	Презентации лекций по основным темам;
7.7	Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования по различным разделам линейной алгебры и аналитической геометрии.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Система балльной аттестации при изучении курса «Линейной алгебры» осуществляется по накопительной системе баллов и предполагает текущий, рубежный и промежуточный контроль. Все виды учебной деятельности оцениваются в баллах. Для контроля и ритмичности работы студентов в течение семестра вводятся аттестационные недели в соответствии с технологической картой дисциплины, с указанием минимальной и максимальной сумм баллов.

Технологические карты дисциплины представлены в ПРИЛОЖЕНИИ 8.

МОДУЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ВКЛЮЧАЕТ:

1. Текущий контроль: усвоение учебного материала на аудиторных занятиях (лекциях, практических, в том числе учитывается посещение и активность) и выполнение обязательных заданий для самостоятельной работы (домашних заданий, типовых расчетов).
2. Рубежный контроль: проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом. Выполнение модульных контрольных заданий проводится в письменном виде или с помощью компьютерной контрольно-обучающей программы

тестирования и является обязательной компонентой модульного контроля.

3. Промежуточный контроль - завершенная задокументированная часть учебной дисциплины – совокупность тесно связанных между собой зачетных модулей.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ТЕКУЩЕМУ КОНТРОЛЮ

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнение всех учебных заданий преподавателя, ознакомление с основной и дополнительной литературой.

Запись лекции - одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения и выводы, обобщения, формулировки. Культура записи лекции - один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5-10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу. Лекции в основном нацелены на освещение фундаментальных и широко используемых понятий и определений, теорем и их доказательств, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой.

Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемой программой.

При подготовке к занятиям обучающийся должен просмотреть конспекты лекций, практических занятий, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы, решить задания домашней работы.

Рекомендуется регулярно отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта лекций в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Следует найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, нужно сформулировать вопросы, обратиться за помощью к преподавателю на еженедельных консультациях.

За посещение лекционных и практических занятий, а также за активную работу на них, студент получает поощрительные баллы, указанные в технологической карте (см. Приложение 8)

Для закрепления пройденного материала и формирования навыков решения задач на каждом практическом занятии студент получает домашнее задание - 5-10 примеров, в зависимости от сложности, по пройденным темам. Для выполнения домашних заданий студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях. Выполнение домашних заданий поощряется баллами, указанными в технологической карте.

ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Для формирования навыков и умений, предусмотренных компетенциями, а также для активизации самостоятельной работы студентам нужно выполнить типовые расчеты. Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3. Номер варианта типового расчета выбирается согласно номера студента в списке группового журнала. Типовые расчеты выполняются в отдельной тетради с последующей обязательной защитой. Если студент за типовой расчет набирает баллы ниже минимального, установленного в технологической карте, то преподаватель возвращает типовой расчет на доработку. После доработки студент может получить только минимально возможное количество баллов.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ в ПРИЛОЖЕНИИ № 7.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Перед выполнением типового расчета студентам нужно внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия; проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях, приведенные в рабочей программе образцы выполнения типовых расчетов (ПРИЛОЖЕНИЕ № 9). В случае затруднения выполнения заданий типового расчета следует обратиться с вопросами к преподавателю на еженедельных консультациях.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

Рубежный контроль по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в виде контрольной работы или с применением компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования (КОПТ). Образцы контрольных работ и КОПТ приведены в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 4, 5 соответственно.

До рубежного контроля студенты должны пройти текущий контроль: выполнить домашние задания, защитить типовой расчет.

Контрольные работы и компьютерное тестирование проводятся в отведенное преподавателем время согласно технологической карте.

В случае, если студент отсутствовал на рубежном контроле по уважительной причине, то он должен согласовать с преподавателем время, когда он сможет пройти его, но обязательно до промежуточной аттестации.

Если студент за рубежный контроль набирает менее минимального количества баллов, указанных в технологической карте, то он имеет не более двух возможностей пройти его повторно. При этом он может получить не более 75% от максимально возможных баллов, указанных в технологической карте.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И КОПТ в ПРИЛОЖЕНИИ № 7.**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо повторить пройденный теоретический материал по данному разделу, выписать и выучить используемые в данном разделе формулы, проработать задания из домашней работы и типового расчета.

Образцы выполнения контрольных работ приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 10.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОПТ

Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования включают в себя задания с четырьмя вариантами ответов. В каждом задании можно обратиться к кратким методическим указаниям, разъясняющим каким методом, на основе использования какой формулы решается данное задание. После окончания тестирования, компьютер выдает каждому студенту, количество верно решенных заданий.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРОМЕЖУТОЧНОМУ КОНТРОЛЮ

При явке на промежуточную аттестацию (зачет с оценкой) студенты обязаны иметь при себе зачётные книжки, которые они предъявляют экзаменатору в начале аттестации.

На промежуточном контроле студент должен верно ответить на теоретические вопросы билета и решить практические задания.

Оценка промежуточного контроля:

- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

- 20 баллов - Вопросы для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Образцы билетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ в ПРИЛОЖЕНИИ № 11.

Итоговая оценка выставляется суммированием баллов текущего и итогового контролей следующим образом:

Оценка по 100-бальной шкале	Оценка по традиционной системе
85 – 100	Зачтено (отлично)
70 – 84	Зачтено (хорошо)
60 – 69	Зачтено (удовлетворительно)
0 – 59	Незачтено (неудовлетворительно)

Вопросы для проверки уровня обученности УМЕТЬ

1. Найти: $P = (2A - 3B)C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выполнить действие: $3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Выполнить действие: $7 \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

4. Найти матрицу $C = A^T - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

5. Выполнить действие: $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

7. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

8. Найти произведение матриц AB , BA если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

9. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

10. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

14 - 16. Вычислить определитель разложением по какой-либо строке или

столбцу: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -7 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

17. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 8$.

18. Вычислить алгебраическое дополнение A_{12} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Вычислить алгебраическое дополнение A_{24} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

Решить системы уравнений методом Крамера, Гаусса, матричным способом

$$21) \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases} \quad 22) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases} \quad 23) \begin{cases} x + 2y + z + 7 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} 2x + y + z - 7 = 0, \\ x + 2y + z - 8 = 0, \\ x + y + 2z - 9 = 0. \end{cases} \quad 25) \begin{cases} x + 2y + 3z - 8 = 0, \\ 3x + y + z - 6 = 0, \\ 2x + y + 2z - 6 = 0. \end{cases} \quad 26) \begin{cases} -2x + y + 6 = 0, \\ x - 2y - z - 5 = 0, \\ 3x + 4y - 2z - 13 = 0. \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + 4y + 6 = 0, \\ x + z - 1 = 0. \end{cases} \quad 28) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases} \quad 29) \begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y + 2z + 7 = 0, \\ 2x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases} \quad 30) \begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x + 3y - 2z = 1, \\ y + 2z = 8. \end{cases}$$

31. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 0, \\ 3x + 2y - z = 0, \\ 8x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

32. Даны координаты точек $A(1;3;5)$ и $B(2;5;6)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; длину вектора.

33. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b}$ если $\vec{a} = \{1;2;1\}$.

34. Найти угол между векторами $\vec{a} = \{1;2;-2\}$ и $\vec{b} = \{-2;6;3\}$.

35. Даны векторы $\vec{a} = 0,5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$. Найти скалярное произведение векторов.

36. Даны точки $A(3;-4;-2)$, $B(2;5;-2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox , Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ соответственно, а с осью Oz - тупой угол γ .

37. Вычислить угол, образованный векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

38. Вычислить $pr_{\vec{a}}\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

39. Даны векторы $\vec{a} = 0,5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $2\vec{b} - \vec{c}$.

40. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

41. Найти $\vec{a}(2\vec{a} + \vec{b})$, если $\vec{a} = (3;-1;-2)$, $\vec{b} = (1;2;-1)$.

42. Найти значение α , при котором векторы $\vec{a} = \{\alpha + 1; 3 - 2\alpha; \alpha - 1\}$ и $\vec{b} = \{1; 4; 4\}$ перпендикулярны.
43. При каком значении x векторы $\vec{a} = (x; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$ ортогональны?
44. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.
45. Составить общее уравнение прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ и указать координаты нормального вектора.
46. Даны вершины треугольника: $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC .
47. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси координат, зная, что прямая проходит через точки $P(2, -8)$, $Q(-1, 7)$.
48. Даны вершины треугольника: $A(1, 2)$, $B(3, 7)$, $C(5, -13)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB .
49. Две стороны квадрата лежат на прямых $2x + 3y + 11 = 0$, $2x + 3y - 13 = 0$. Вычислить его площадь.
50. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x + 4y + 13z - 23 = 0$.
51. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+7}{0}$ и плоскостью $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.
52. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $A(2; -3; 4)$.
53. Найти расстояние от точки $M_0(1, -6, -5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 2, -3)$, $M_2(4, -1, 0)$, $M_3(2, 1, -2)$.
54. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t + 2; \\ z = 1 - t. \end{cases}$ с плоскостью $3x - 2y + z = 0$.
55. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

56. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.
57. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.
58. При каких значениях A и B плоскости $2x + Ay + 3z - 5 = 0$ и $Bx - 6y - 6z + 2 = 0$ параллельны.
59. При каком значении α и β уравнения $2x + \alpha y + 3z - 8 = 0$ и $\beta x - 6y - 6z + 4 = 0$ будут определять параллельные плоскости.

ПРИЛОЖЕНИЕ Вопросы для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ

Установить совместность и найти общее решение систем линейных уравнений. Указать два базисных решения.

1.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

11– 15. Найти собственные значения и один собственный вектор матрицы

$$11) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}; \quad 12) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 13) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$14) A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad 15) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

16. Выяснить, образуют ли векторы $\bar{p}(0;1;2)$, $\bar{q}(1;0;1)$, $\bar{r}(-1;2;4)$ базис. Если образуют, то расположить вектор $\bar{x}(-2;4;7)$ по этому базису.

17. Выяснить, образуют ли векторы $\bar{p}(1;3;0)$, $\bar{q}(2;-1;1)$, $\bar{r}(0;-1;2)$ базис. Если образуют, то расположить вектор $\bar{x}=(6;12;-1)$ по этому базису.

18. Выяснить, образуют ли векторы $\bar{p}(2;1;-1)$, $\bar{q}(0;3;2)$, $\bar{r}(1;-1;1)$ базис. Если образуют, то расположить вектор $\bar{x}=(1;-4;4)$ по этому базису.

19. Найти координаты вектора $\bar{x}=\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2^* = \frac{3}{2}e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

20. Найти координаты вектора $\bar{x}=\bar{i}+3\bar{j}+6\bar{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2^* = \frac{4}{3}e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

21. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ед.

22. Найти длину вектора $\bar{a} = 2\bar{x} - 3\bar{y}$, если $|\bar{x}| = 2$, $|\bar{y}| = 1$, $\angle(\bar{x}, \bar{y}) = 60^\circ$.

23. Даны вершины треугольника $A(2;0)$, $B(-4;3)$, $C(1;5)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A .

24. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;4)$ параллельно прямой $2x + 3y - 7 = 0$.
25. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + 2y + 4 = 0$ и $3x - y - 9 = 0$ перпендикулярно прямой $x + y - 7 = 0$.
26. Установить, какая линия определяется уравнением $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
27. Какую линию определяет уравнение $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ и построить данную кривую.
28. Какую линию определяет уравнение $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ и построить данную кривую.
29. Какую линию определяет уравнение $x = -\sqrt{y^2 - 4y}$ и построить данную кривую.
30. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$.
31. Установить, какая линия определяется уравнением $4x^2 - 3y^2 - 24x + 6y - 3 = 0$ и построить ее.
32. Определить тип кривой $5x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 44 = 0$ и построить ее.
33. Определить тип кривой $5x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 44 = 0$ и построить ее.
34. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 1 - \sqrt{4x + 8}$.
35. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.
36. Установить, какая линия определяется уравнением $9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$.
37. Установить, какая линия определяется уравнением $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 9 = 0$.
38. Установить, какая линия определяется уравнением $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.
39. Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА № 1

Задание 1. Даны две матрицы A и B . Найти: а) AB ; б) A^{-1} ; в) AA^{-1}

№	Матрицы	№	Матрицы
1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$	15	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	17	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	19	$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
8	$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$	21	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	22	$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

10	$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	23	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	24	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
12	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$	25	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$		

Задание 2. Вычислить определитель

№	Определитель	№	Определитель
1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

6	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	22	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
11	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
12	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	25	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$		

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

№	Системы уравнений	№	Системы уравнений
1	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y - z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$	18	$\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = -19. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$	21	$\begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

10	$\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$		23	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$		24	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$		25	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$			

Задание 4. Найти любые два базисных решения системы

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

6	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$
8	$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$
10	$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$	23	$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$	25	$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$		

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА № 2

Вариант 1

Задание 1. Хлебопекарня выпускает хлеб пяти видов: подовый, дарницкий, бородинский, формовой и круглый. Объемы производства хлеба в день составляют 1500, 1250, 910, 2100, 1150 штук подового, дарницкого, бородинского, формового и круглого хлеба соответственно. Записать вектор объема производства хлеба а) в день; б) в текущий месяц (учитывая, что хлеб выпекается каждый день в одних и тех же количествах)

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 6\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2^* = 2e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = A(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = (1; 2; 4)$.

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 804 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 2

Задание 1. Заработная плата шести работников крупной компании за первый квартал приведена в таблице. В апреле этим работникам предоставили отпуск, заплатив им по среднему заработку за предыдущий квартал. Найти вектор зарплаты данных работников за апрель. Найти вектор роста зарплат в марте по сравнению с январем.

Фамилия И.О.	Начисленная заработная плата (усл. ден. ед.)		
	Январь	Февраль	Март
Антонов А.А.	10095	12232	13034
Владимиров В.В.	13111	15617	15405
Иванов И.И.	16412	17558	16023
Матвеева М.М.	11077	13206	13957
Петров П.П.	12530	17020	17899
Сидорова С.С.	16740	17401	17052

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 21\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{q} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{j} + 2\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 6\vec{i} + 12\vec{j} - \vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он

$$\text{задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2^* = 1,5e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (6; -1; 3).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}. \text{ Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие}$$

сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 3

Задание 1. Объемы производства продукции обувной фабрики за третий квартал составили 1150, 1230, 920, 510 и 415 пар женских сапог, мужских ботинок, детских сапог, женских туфель и мужских полусапог соответственно. Записать вектор объема производства обуви за первое полугодие, если объемы производства за третий квартал есть среднее арифметическое первых двух кварталов.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{q} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = \vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2^* = \frac{4}{3}e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (2; 4; 1).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ед.

Вариант 4

Задание 1. Молокозавод выпустил за текущий месяц 5150 литров молока, 3270 литров варенца, 1250 литров ряженки, 4080 литров кефира, 9300 литров сметаны. Объемы производства данной продукции за предыдущий месяц были на 0,25% меньше, чем в текущем месяце. Записать вектор объема производства продукции за предыдущий месяц, а также планируемый вектор объема производства в следующий месяц как среднее арифметическое двух предыдущих месяцев.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 1. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = -2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{r} = 4\vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$ по этому базису.

Задание 2. Найти координаты вектора $\vec{x} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3, \\ e_2^* = 3e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = A(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = (1; 3; 6)$.

Задание 4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},$$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 402 усл. ед.

Вариант 5

Задание 1. Оптовый склад продает фрукты. За неделю было продано 200 ц. яблок, 120 ц. апельсинов, 130 ц. груш, 105 ц. винограда и 130 ц. абрикосов. Записать вектор объема продаж за месяц, а также вектор планируемых объемов продаж за три месяца, если за неделю было продано яблок, абрикосов на 2% и 5% соответственно больше, груш на 4% меньше планируемых, а объемы продаж апельсинов и винограда совпали с планируемыми объемами продаж.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} + 5\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} - \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 13\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3, \\ e_2^* = 4e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (1; 4; 8)$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти равновесный вектор национальных доходов, если известно, что суммарный доход этих стран равен 3 000 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 6

Задание 1. Имеются данные о начисленной зарплате 4 работников фирмы (таблица) за II квартал. Ежемесячно с начисленной заработной платы взимается подоходный налог в размере 13%. Найти вектор налогов, уплаченных каждым работником фирмы за квартал.

Фамилия И.О.	Начисленная заработная плата (усл. ден. ед.)		
	Январь	Февраль	Март
Алексеев А.А.	13490	12456	13039
Борисова Б.Б.	15632	15600	15411
Данилов Д.Д.	11854	13217	13212
Захаров З.З.	19854	18765	19876
Михайлов М.М.	12789	12345	13542
Терентьева Т.Т.	16543	17766	17050

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = -2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{r} = 3\vec{i} + \vec{j}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -19\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он

$$\text{задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e_2^* = 1,25e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (6; 3; 1).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}. \text{ Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие}$$

сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет первой страны равен 1000 усл. ед.

Вариант 7

Задание 1. Оптовый склад продает овощи. За предыдущий месяц было продано 800 ц. моркови, 480 ц. свеклы, 1300 ц. картофеля, 1050 ц. лука и 510 ц. капусты. Известно, что среди постоянных покупателей овощей у оптового склада есть торговый комплекс, который приобрел в прошлом месяце 21% от всего объема продаж оптового склада. Экономист оптового склада предложил предоставить скидку торговому комплексу как постоянному покупателю. В результате получения скидки торговый комплекс приобрел продукции у оптового склада на 16% больше, чем в предыдущем месяце. Записать вектор объема продаж оптового склада за текущий месяц, если остальные покупатели оптового склада объемы покупок не изменили.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 1,25e_3, \\ e_2^* = 5e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (2; 5; 10).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}, \text{ если известно, что суммарный доход этих стран равен}$$

402 усл. ед.

Вариант 8

Задание 1. Хлебопекарня выпускает хлеб пяти видов: подовый, дарницкий, бородинский, формовой и круглый. Объемы производства хлеба в будний день составляют 1150, 1120, 190, 1200, 1150 штук подового, дарницкого, бородинского, формового и круглого хлеба соответственно, а в выходные и праздничные дни хлеба выпускается на 7% от объема производства хлеба больше. Найти вектор объема выпуска продукции в текущий месяц, а также вектор роста объемов выпущенной продукции в выходной день по сравнению с будним днем.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2^* = \frac{6}{5}e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (8; 4; 1).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и третьей стран, удовлетворяющие балансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет второй страны равен 1 500 усл. ед.

Вариант 9

Задание 1. Предприятие выпускает бытовую химию. Объемы выпуска продукции по месяцам указаны в таблице. Найти вектор планируемого выпуска продукции на IV квартал, если предприятие планирует увеличить объемы выпуска по сравнению с предыдущим кварталом на 4%.

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Июль	Август	Сентябрь
Мыло туалетное	3546	3412	3869
Мыло хозяйственное	3412	3526	3617
Порошок стиральный	5413	5221	5314
Средство для мытья посуды	1425	1523	1698
Отбеливатель	789	945	842

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{q} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - 14\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 10\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 1, 2e_3, \\ e_2^* = 6e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = A(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = (1; 6; 12)$.

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$. Найти бюджеты первой и третьей стран,

удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет второй страны равен 1200 усл. ед.

Вариант 10

Задание 1. Объемы выпуска продукции мебельной фабрики по месяцам указаны в таблице

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Столы	549	611	869
Стулья	1278	1450	1617
Шкафы-купе	541	522	514
Кровати	425	523	168
Диваны	78	45	42
Кресла	154	98	95

Найти вектор роста объема выпуска продукции в декабре по сравнению с октябрем. Найти вектор выпуска продукции за третий квартал, если известно, что в четвертом квартале было выпущено продукции на 14% больше.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 8\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{q} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 5\vec{i} + 15\vec{j}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он

$$\text{задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2^* = 7/6e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (10; 5; 1).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели

$$\text{международной торговли для структурной матрицы торговли } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix},$$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 402 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 11

Задание 1. Объемы производства продукции обувной фабрики за второй квартал составили 4234, 3256, 1920, 1510 и 1415 пар женских сапог, мужских ботинок, детских сапог, женских туфель и мужских полусапог соответственно. Записать вектор объема производства обуви за первое полугодие, если объемы производства за второй квартал превышают объемы производства за первый квартал на 5%. Найти вектор роста объемов выпущенной продукции за второй квартал по сравнению с первым.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 2\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = -12\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + \frac{7}{6}e_3, \\ e_2^* = 7e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (-1; 7; 14)$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1000 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 12

Задание 1. Объемы производства продукции обувной фабрики за второй квартал составили 4234, 3256, 1920, 1510 и 1415 пар женских сапог, мужских ботинок, детских сапог, женских туфель и мужских полусапог соответственно. Записать вектор объема производства обуви за первое полугодие, если объемы производства за второй квартал превышают объемы производства за первый квартал на 5%. Найти вектор роста объемов выпущенной продукции за второй квартал по сравнению с первым.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{q} = -\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 11\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 14\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e_2^* = 8/7 e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (-12; 6; 1)$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели

международной торговли для структурной матрицы торговли $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 900 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 13

Задание 1. Данные об окладах работников фирмы, а также размеры премий в процентном соотношении от оклада за три месяца приведены в таблице. Премия выплачивается в конце квартала. Найти вектор премий работников за квартал.

Фамилия И.О.	Оклад (ден. ед.)	Размер премии (%)		
		Июль	Август	Сентябрь
Алексин А.А.	6723	25	20	0
Григор Г.Г.	5689	23	20	25
Егорова Е.Е.	7632	25	0	23
Ильин И.И.	5430	0	20	25
Леонов Л.Л.	6318	24	18	25
Устинов У.У.	6750	25	19	21

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 3\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) ,

$$\text{если он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 - e_3, \\ e_2^* = 0,5e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = A(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = (2; 4; 3)$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$. Найти бюджеты первой и третьей стран,

удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет второй страны равен 1400 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 14

Задание 1. Оптовый склад продает фрукты. За месяц было продано 800 ц. яблок, 670 ц. апельсинов, 650 ц. груш, 430 ц. винограда и 440 ц. абрикосов. Известно, что за предыдущий месяц было продано яблок и апельсинов на 2% больше, абрикосов и винограда на 1,5% меньше, объем продаж груш совпал с данным месяцем. Найти планируемый объем продаж на следующий месяц как среднее арифметическое двух предыдущих месяцев.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{q} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 8\vec{i} + \vec{j} + 12\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 0,5e_3, \\ e_2^* = -e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (-3; 2; 4)$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели

международной торговли для структурной матрицы торговли $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 900 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 15

Задание 1. Предприятие выпускает бытовую технику. Объемы выпуска продукции по месяцам указаны в таблице. Известно, что 32% выпущенной продукции предприятие отправляет напрямую в магазины и торговые центры, а остальную продукцию приобретают оптовые склады. Найти вектор объема продукции, приобретенной оптовыми складами за квартал.

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Апрель	Май	Июнь
Пылесос	1254	1329	1326
Электрочайник	2412	2526	2617
Соковыжималка	2413	2221	1314
Утюг	3425	3523	3698
Стиральная машинка	789	945	842

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -9\vec{i} - 8\vec{j} - 3\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e_2^* = 2/3e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (12; 3; -1).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}. \text{ Найти бюджеты второй и третьей стран,}$$

удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет первой страны равен 900 усл. ед.

Вариант 16

Задание 1. Хлебопекарня выпускает хлеб пяти видов: подовый, дарницкий, бородинский, формовой и круглый. Объемы производства хлеба в день составляют 1400, 1150, 810, 2000, 1120 штук подового, дарницкого, бородинского, формового и круглого хлеба соответственно. Записать вектор объема производства хлеба а) в день; б) в текущий месяц (учитывая, что хлеб выпекается каждый день в одних и тех же количествах)

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} + \vec{j}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -15\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 12\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + \frac{2}{3}e_3, \\ e_2^* = -2e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (2; 6; -3).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix},$$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 1600 усл. ед.

Вариант 17

Задание 1. Заработная плата шести работников крупной компании за второй квартал приведена в таблице. В июле этим работникам предоставили отпуск, заплатив им по среднему заработку за предыдущий квартал. Найти вектор зарплаты данных работников за июль. Найти вектор роста зарплат в июне по сравнению с апрелем.

Фамилия И.О.	Начисленная заработная плата (усл. ден. ед.)		
	Апрель	Май	Июнь
Алексеев А.А.	20091	18230	15 038
Быков В.В.	12117	13 615	17401
Воробьев И.И.	14413	13552	17024
Фаткулина М.М.	10078	12 200	11959
Перепелкина П.	12532	17025	17890
Сергеев С.С.	16745	17400	17050

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 21\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{q} = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 8\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2^* = 0,75e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (1; 4; -8).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}. \text{ Найти равновесный вектор национальных доходов, если}$$

известно, что суммарный доход этих стран равен 3 500 усл. ед.

Вариант 18

Задание 1. Объемы производства продукции швейной фабрики за третий квартал составили 1250, 1130, 820, 810 и 515 женских платьев, мужских рубашек, детских брюк, юбок и мужских костюмов соответственно. Записать вектор объема производства одежды за первое полугодие, если объемы производства за третий квартал есть среднее арифметическое первых двух кварталов.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 23\vec{i} - 14\vec{j} - 30\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2^* = 0,75e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (1; -4; 8).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix},$$

если известно, что суммарный доход этих стран равен 2500 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 19

Задание 1. Молокозавод выпустил за текущий месяц 5150 литров молока, 3270 литров варенца, 1250 литров ряженки, 4080 литров кефира, 9300 литров сметаны. Объемы производства данной продукции за предыдущий месяц были на 0,25% меньше, чем в текущем месяце. Записать вектор объема производства продукции за предыдущий месяц, а также планируемый вектор объема производства в следующий месяц как среднее арифметическое двух предыдущих месяцев.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -\vec{i} + 7\vec{j}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e_2^* = 0,8e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (5; -5; 4).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

Найти бюджеты первой и третьей стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет второй страны равен 1 000 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 20

Задание 1. Оптовый склад продает овощи. За неделю было продано 220 ц. помидор, 150 ц. огурцов, 250 ц. моркови, 150 ц. редьки и 180 ц. картофеля. Записать вектор объема продаж за месяц, а также вектор планируемых объемов продаж за три месяца, если за неделю было продано помидор, огурцов на 3% и 4% соответственно больше, моркови на 3% меньше планируемых, а объемы продаж редьки и картошки совпали с планируемыми объемами продаж.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{j} + 7\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{q} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{r} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 11\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 0,8e_3, \\ e_2^* = -4e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = A(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = (7; -5; 10)$.

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

Найти бюджеты второй и третьей стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет первой страны равен 6 600 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 21

Задание 1. Имеются данные о начисленной зарплате 5 работников фирмы (таблица). Ежемесячно с начисленной заработной платы взимается подоходный налог в размере 11%. Найти вектор налогов, уплаченных каждым работником фирмы за квартал.

Фамилия И.О.	Начисленная заработная плата (усл. ден. ед.)		
	Январь	Февраль	Март
Алексеев А.А.	12580	13561	11099
Борисова Б.Б.	13327	14960	15711
Данилов Д.Д.	15854	14217	13212
Захаров З.З.	20854	18865	19176
Михайлов М.М.	15789	18345	16542
Терентьева Т.Т.	17543	18766	16050

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{q} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -13\vec{i} + 2\vec{j} + 18\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e_2^* = \frac{5}{6}e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (6; 6; 2).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 1/3 \\ 0,5 & 0,5 & 1/3 \\ 0,5 & 0,25 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ если известно, что суммарный доход этих стран равен}$$

1800 усл. ед.

Вариант 22

Задание 1. Оптовый склад продает овощи. За предыдущий месяц было продано 900 ц. моркови, 580 ц. свеклы, 2300 ц. картофеля, 2050 ц. лука и 710 ц. капусты. Известно, что среди постоянных покупателей овощей у оптового склада есть торговый комплекс, который приобрел в прошлом месяце 21% от всего объема продаж оптового склада. Экономист оптового склада предложил предоставить скидку торговому комплексу как постоянному покупателю. В результате получения скидки торговый комплекс приобрел продукции у оптового склада на 16% больше, чем в предыдущем месяце. Записать вектор объема продаж оптового склада за текущий месяц, если остальные покупатели оптового склада объемы покупок не изменили.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{q} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 8\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 5/6 e_3, \\ e_2^* = -5e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (1; -6; 6).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \text{ если известно, что суммарный доход этих стран равен}$$

8 200 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

Вариант 23

Задание 1. Предприятие выпускает бытовую химию. Объемы выпуска продукции по месяцам указаны в таблице. Найти вектор планируемого выпуска продукции на IV квартал, если предприятие планирует увеличить объемы выпуска по сравнению с предыдущим кварталом на 4%.

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Июль	Август	Сентябрь
Мыло туалетное	1546	2412	2869
Мыло хозяйственное	2412	2526	2617
Порошок стиральный	4413	4221	4314
Средство для мытья посуды	925	1523	1298
Отбеливатель	989	945	942

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = -11\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{r} = 3\vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2^* = \frac{6}{7}e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } x = \{7, 7, 2\}$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \text{ если известно, что суммарный доход этих стран равен}$$

7100 усл. ед.

Вариант 24

Задание 1. Хлебопекарня выпускает хлеб пяти видов: подовый, дарницкий, бородинский, формовой и круглый. Объемы производства хлеба в будний день составляют 2150, 1020, 320, 1150, 2050 штук подового, дарницкого, бородинского, формового и круглого хлеба соответственно, а в выходные и праздничные дни хлеба выпускается на 8% от объема производства хлеба больше. Найти вектор объема выпуска продукции в текущий месяц, а также вектор роста объемов выпущенной продукции в выходной день по сравнению с будним днем.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 7\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 7\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + \frac{6}{7}e_3, \\ e_2^* = -6e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = A(\vec{x})$ вектора $x = \{1, 7, -7\}$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$. Найти бюджеты второй и третьей стран,

удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет первой страны равен 600 усл. ед.

Вариант 25

Задание 1. Объемы выпуска продукции мебельной фабрики по месяцам указаны в таблице

Наименование продукции	Количество выпущенной продукции (шт.)		
	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Столы	349	411	669
Стулья	1078	1350	1517
Шкафы-купе	741	722	714
Кровати	525	623	268
Диваны	98	65	82
Кресла	354	111	139

Найти вектор роста объема выпуска продукции в декабре по сравнению с октябрем. Найти вектор выпуска продукции за третий квартал, если известно, что в четвертом квартале было выпущено продукции на 11% больше.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 9\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{q} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + 4\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 6\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ по этому базису.

Задание 4. Найти координаты вектора $\vec{x} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , если

$$\text{он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2^* = 2e_1 - e_2, \\ e_3^* = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (1; -3; 4).$$

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели

$$\text{международной торговли для структурной матрицы торговли } A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 600 усл. ед.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

ВАРИАНТ 1.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(3;4)$, $B(2;-1)$, $C(1,-7)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

2) $y = 1 - 3\sqrt{x}$.

3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 4 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-12,7,-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$.

4. Найти угол между плоскостями $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y + 5z - 16 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$, $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.

ВАРИАНТ 2.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-4;-5)$, $B(3;3)$, $C(5,-2)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

- 1) $x = \frac{5}{4}\sqrt{16 + y^2}$.
- 2) $y = -1 + \sqrt{7x}$.
- 3) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(1, -6, -5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 2, -3)$, $M_2(4, -1, 0)$, $M_3(2, 1, -2)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - 3y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x + 4y + 13z - 23 = 0$.

ВАРИАНТ 3.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3; 5)$, $B(4; -3)$, $C(-2, -4)$.
Требуется:
 - составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
 - 1) $x = -\frac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$.
 - 2) $16x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 484 = 0$.
 - 3) $x = 2 - \sqrt{5y - 5}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-7, 0, -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3, -1, 1)$, $M_2(-9, 1, -2)$, $M_3(3, -5, 4)$.
4. Найти угол между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$, $2x - 4y - z + 9 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$, $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.

ВАРИАНТ 4.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(3;-2)$, $B(-5;-4)$, $C(-1,6)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $x = 1 + \frac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$.
- $25x^2 - 64y^2 + 100x + 12y - 1564 = 0$.
- $y = 1 - 4\sqrt{x+1}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-2,4,21)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(2,1,-1)$.

4. Найти угол между плоскостями $3x - y + 2z + 15 = 0$, $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$, $4x + y - 6z - 5 = 0$.

ВАРИАНТ 5.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2;5)$, $B(-3;4)$, $C(-4,-2)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

$$1) \ y = 1 + \frac{5}{7}\sqrt{49 - x^2}.$$

$$2) \ y = -3 + \sqrt{3x - 3}.$$

$$3) \ y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 36}.$$

3. Найти расстояние от точки $M_0(2, -1, 4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(1, -1, 2)$, $M_3(0, 1, -1)$.
4. Найти угол между плоскостями $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.

ВАРИАНТ 6.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3; 2)$, $B(-2; -5)$, $C(6, -1)$.
Требуется:
 - составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

$$1) \ y = -\frac{1}{4}\sqrt{16 - x^2}.$$

$$2) \ x = 2 + \sqrt{y - 4}.$$

$$3) \ 4x^2 - 9y^2 + 16x + 36y - 56 = 0.$$

3. Найти расстояние от точки $M_0(-5, -9, 1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 0, 2)$, $M_2(1, 2, -1)$, $M_3(2, -2, 1)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $2x + y\sqrt{2} - z + 36 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x + 7y + 3z + 11 = 0$.

ВАРИАНТ 7.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-6;-4)$, $B(3;-7)$, $C(1,2)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $4x^2 - 9y^2 + 24x + 18y - 9 = 0$.
- $y = 1 - 2\sqrt{x + 4}$.
- $y = -\sqrt{16 + x^2}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(3, -2, -9)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, -3)$, $M_2(1, 0, 1)$, $M_3(-2, -1, 6)$.

4. Найти угол между плоскостями $3y - z = 0$, $2y - z = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$, $x - 2y - 3z + 18 = 0$.

ВАРИАНТ 8.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2;1)$, $B(-7;3)$, $C(-4,-3)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = 1 - 2\sqrt{5 - y^2 + 4y}$

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

- 2) $9x^2 - 25y^2 - 72x - 90 = 0$.
- 3) $x = 2 + \sqrt{y}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-6, 7, -10)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3, 10, -1)$, $M_2(-2, 3, -5)$, $M_3(-6, 7, -10)$.
4. Найти угол между плоскостями $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$, $2x - 5y + 4z + 24 = 0$.

ВАРИАНТ 9.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3; -4)$, $B(-6; 7)$, $C(-1, 1)$. Требуется:
- составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
- $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 23 = 0$.
 - $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 36}$.
 - $y = 2 - \sqrt{x+1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-2, 3, 5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 2, 4)$, $M_2(-1, -2, -4)$, $M_3(3, 0, -1)$.
4. Найти угол между плоскостями $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$, $3x + 4y + 7z - 16 = 0$.

ВАРИАНТ 10.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(4;-5)$, $B(2;2)$, $C(7,4)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} + 1$.
- $x = 4 - \sqrt{y + 1}$.
- $9x^2 - 49y^2 + 36x - 409 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-3,4,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,1,2)$, $M_3(2,-1,5)$.

4. Найти угол между плоскостями $2x - y + 5z + 16 = 0$, $x + 2y + 3z + 8 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$, $2x + 3y + 7z - 52 = 0$.

ВАРИАНТ 11.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3;-4)$, $B(-2;-1)$, $C(-1,-7)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

2. Какую линию второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
 - $2x^2 + y^2 - 8x + 50y + 8 = 0$.
 - $x = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 16}$.
 - $y = 1 - \sqrt{x + 1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(4, 3, 0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 3, 0)$, $M_2(4, -1, 2)$, $M_3(3, 0, 1)$.
4. Найти угол между плоскостями $2x + 2y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$, $7x + y + 4z - 47 = 0$.

ВАРИАНТ 12.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(4; -5)$, $B(-3; 3)$, $C(-5; -2)$. Требуется:
 - составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
 - $x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 16}$.
 - $x^2 + 4y^2 + 6x + 40y + 105 = 0$.
 - $x = 2 + \sqrt{2 - y}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-21, 20, -16)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-2, -1, -1)$, $M_2(0, 3, 2)$, $M_3(3, 1, -4)$.
4. Найти угол между плоскостями $3x + y + z - 4 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{3}$, $x + 3y + 5z - 42 = 0$.

ВАРИАНТ 13.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(3;5)$, $B(-4;-3)$, $C(2,-4)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 16}$.
- $x^2 + 4y^2 - 6x + 40y + 108 = 0$.
- $x = 2 - \sqrt{2 - y}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(3,6,68)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2,1,-4)$, $M_2(0,-3,-1)$, $M_3(-3,-5,6)$.

4. Найти угол между плоскостями $3x - 2y - 2z - 16 = 0$, $x + y - 3z - 7 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$, $5x - y + 4z - 3 = 0$.

ВАРИАНТ 14.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3;-2)$, $B(5;-4)$, $C(1,6)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

- $9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$.
 - $y = -\frac{3}{2}\sqrt{y^2 - 4}$.
 - $y = 2 - \sqrt{x+1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(2, -10, 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -4, -3)$, $M_2(5, -6, 0)$, $M_3(1, 3, -3)$.
4. Найти угол между плоскостями $2x + 2y + z + 9 = 0$, $2x - y + 3z - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$, $x + 2y - z - 2 = 0$.

ВАРИАНТ 15.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-2; 5)$, $B(3; 4)$, $C(4; -2)$. Требуется:
- составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
- $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 624 = 0$.
 - $y = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$.
 - $x = 1 - \sqrt{2y - 6}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-3, 2, 7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(2, 1, 2)$, $M_3(1, 1, 4)$.
4. Найти угол между плоскостями $3x + 2y - 3z - 1 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$, $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

ВАРИАНТ 16.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(3;2)$, $B(2;-5)$, $C(-6,-1)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $4x^2 + y^2 + 24x + 4y + 36 = 0$.

- $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

- $x = 1 - 3\sqrt{y}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(5,-4,5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,3,6)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(-1,0,1)$.

4. Найти угол между плоскостями $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z + 5 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$, $4x + 2y - z - 11 = 0$.

ВАРИАНТ 17.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(6;-4)$, $B(-3;-7)$, $C(-1,2)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

- $y = 1 + \frac{6}{5}\sqrt{25 - x^2}$.
 - $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$.
 - $x = 1 - 4\sqrt{y + 1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-12, 1, 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-4, 2, 6)$, $M_2(2, -3, 0)$, $M_3(-10, 5, 8)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - 3y - 2z - 8 = 0$, $x + y - z + 3 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$, $2x - 3y - 5z - 7 = 0$.

ВАРИАНТ 18.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-2; -1)$, $B(7; 3)$, $C(4; -3)$. Требуется:
- составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
- $x = -\frac{1}{4}\sqrt{16 - y^2}$.
 - $y = 2 + \sqrt{x - 4}$.
 - $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(10, 1, 8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(7, 2, 4)$, $M_2(7, -1, -2)$, $M_3(-5, -2, -1)$.
4. Найти угол между плоскостями $3x - 2y + 3z + 23 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$, $2x - y + 3z + 23 = 0$.

ВАРИАНТ 19.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(3;4)$, $B(6;7)$, $C(1,1)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $4x^2 + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$.

- $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$.

- $x = 2 - \sqrt{y + 1}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-3,1,8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2,1,4)$, $M_2(3,5,-2)$, $M_3(-7,-3,2)$.

4. Найти угол между плоскостями $x + y + 3z - 7 = 0$, $2y + z - 1 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$, $x - 2y + 4z - 19 = 0$.

ВАРИАНТ 20.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-4;-5)$, $B(-2;2)$, $C(-7,4)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
 - $4x^2 + y^2 + 40x + 6y + 105 = 0$.
 - $y = \frac{5}{4}\sqrt{16 + x^2}$.
 - $x = -1 + \sqrt{7y}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(10, -8, -7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 5, 2)$, $M_2(-6, 0, -3)$, $M_3(3, 6, -3)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z + 17 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $x - 2y + 5z + 17 = 0$.

ВАРИАНТ 21.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3; -4)$, $B(2; 1)$, $C(1, 7)$. Требуется:
 - составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
 - $9x^2 + 4y^2 - 72x + 24y + 144 = 0$.
 - $x = -3 + \sqrt{3y - 3}$.
 - $x = -\frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 36}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-4, -13, 6)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0, -1, -1)$, $M_2(-2, 3, 5)$, $M_3(1, -5, -9)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z + 17 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $x + 3y - 5z + 9 = 0$.

ВАРИАНТ 22.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-4;5)$, $B(3;-3)$, $C(5,2)$.
Требуется:
 - составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
 - $x^2 + 25y^2 + 6x - 50y + 9 = 0$.
 - $y = 1 - 2\sqrt{5 - x^2 + 4x}$.
 - $y = 2 + \sqrt{x}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-3, -6, -8)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3, -1,)$, $M_2(2, 5, 0)$, $M_3(1, 2, 4)$.
4. Найти угол между плоскостями $2x - z + 5 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$, $3x + y - 5z - 12 = 0$.

ВАРИАНТ 23.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-3;-5)$, $B(4;3)$, $C(-2,4)$.
Требуется:
 - составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 3. Типовые расчеты

- $y = 1 + \frac{6}{5}\sqrt{25 - x^2}$.
 - $4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 = 0$.
 - $x = 1 - 4\sqrt{y + 1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(14, -3, 7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, -2)$, $M_2(1, 2, 1)$, $M_3(5, 0, -6)$.
4. Найти угол между плоскостями $5x + 3y + z - 18 = 0$, $2y + z - 9 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$, $2x - y + 4z = 0$.

ВАРИАНТ 24.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(3; 2)$, $B(-5; 4)$, $C(-1, -6)$.
Требуется:
- составить уравнение стороны AB ;
 - найти длину стороны AB ;
 - составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
 - вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
 - вычислить угол A треугольника ABC ;
 - составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
 - составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
 - найти площадь треугольника ABC .
 - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
- $25x^2 + y^2 - 50x - 6y + 9 = 0$.
 - $x = 1 - 2\sqrt{y + 4}$.
 - $x = -\sqrt{16 + y^2}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-6, 5, 5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-2, 0, -4)$, $M_2(-1, 7, 1)$, $M_3(4, -8, -4)$.
4. Найти угол между плоскостями $4x + 3z - 2 = 0$, $x + 2y + 2z + 5 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$, $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

ВАРИАНТ 25.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2;-5)$, $B(-3;-4)$, $C(-4,2)$.
Требуется:

- составить уравнение стороны AB ;
- найти длину стороны AB ;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины C ;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины B ;
- вычислить угол A треугольника ABC ;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины C ;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC ;
- найти площадь треугольника ABC .
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений?
Изобразить эти кривые на чертеже.

- $x = -\frac{3}{4}\sqrt{y^2 - 16} + 1$.
- $y = 4 - \sqrt{x + 1}$.
- $4x^2 + 9y^2 - 24x + 72y + 144 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-1,-8,7)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(14,4,5)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-2,-6,-3)$.

4. Найти угол между плоскостями $x + 4y - z + 1 = 0$, $2x + y + 4z - 3 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости
 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$, $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Задание 1. Найти матрицу $D = (AB)^T + 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} x + 2y + z + 7 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$$

Вариант 2

Задание 1. Найти матрицу $C = (AB)^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} 10x - 9z - 19 = 0, \\ 8x - y - 10 = 0, \\ y - 12z - 10 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$$

Вариант 3

Задание 1. Найти матрицу $D = (BA)^T - 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 18 = 0, \\ 2x + 4y - 3z - 26 = 0, \\ x - 6y + 8z = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

Вариант 4

Задание 1. Найти матрицу $D = AB - (A^2)^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x + y + z - 7 = 0, \\ x + 2y + z - 8 = 0, \\ x + y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Вариант 5

Задание 1. Найти матрицу $AB + 2A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 8 = 0, \\ 3x + y + z - 6 = 0, \\ 2x + y + 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Вариант 6

Задание 1. Найти матрицу $P = ABC - 2D^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} -2x + y + 6 = 0, \\ x - 2y - z - 5 = 0, \\ 3x + 4y - 2z - 13 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

Вариант 7

Задание 1. Проверить справедливость равенства $(AB)^T = B^T A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} x - 4y + 5z - 18 = 0, \\ 2x + 4y - 3z - 26 = 0, \\ x - 6y + 8z = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Вариант 8

Задание 1. Найти матрицу $B = (AE)^T + A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + 4y + 6 = 0, \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Вариант 9

Задание 1. Найти матрицу $D = 4A - (BA)^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Вариант 10

Задание 1. Проверить справедливость равенства $(AB)C = A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по правилу Крамера, матричным методом и

методом Гаусса
$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y + 2z + 7 = 0, \\ 2x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Вариант 1

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{6, -1, 3\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' = 2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти образ $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ вектора $x = \{1, 2, 4\}$.

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{1, 2, 4\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{2}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ вектора $x = \{6, -1, 3\}$.

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{1, 3, 6\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2' = \frac{4}{3}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ вектора $x = \{2, 4, 1\}$

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{2, 4, 1\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3, \\ e_2' = 3e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ вектора $x = \{1, 3, 6\}$

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{6, 3, 1\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ вектора $x = \{1, 4, 8\}$

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{1, 4, 8\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e_2' = \frac{5}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ вектора $x = \{6, 3, 1\}$

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{8, 4, 1\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3, \\ e_2' = 5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ вектора $x = \{2, 5, 10\}$.

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{2, 5, 10\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = \frac{6}{5}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ вектора $x = \{8, 4, 1\}$

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{10, 5, 1\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ вектора $x = \{1, 6, 12\}$

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

Задание 1. Найти координаты вектора $x = \{1, 6, 12\}$ в базисе (e_1', e_2', e_3') , если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2' = \frac{7}{6}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ вектора $x = \{10, 5, 1\}$.

Задание 4. Найти собственные значения и 1 любой собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Вариант 1

1) Составить общее уравнение прямой

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) $2x - 2y - 15 = 0$; $n = (2; -2)$ 2) $5x - y + 5 = 0$; $n = (5; -1)$

3) $2x + 3y - 6 = 0$; $n = (2; 3)$ 4) $-x + 2y - 3 = 0$, $n = (-1; 2)$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = -2$, $5y - 33 = 0$; 2) $a = -3$, $x - 21 = 0$;

3) $a = 3$, $5x + 8 = 0$; 4) $a = \frac{5}{3}$, $3x - 6y = 0$.

3) Определить взаимное расположение прямых

$$12x + 15y - 8 = 0, \quad 4x + 5y - 7 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) перпендикулярны; 4) совпадают.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = +\sqrt{9 - x^2}.$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

$$6x - 8y + lz - 9 = 0, \quad 3x + my + 2z - 3 = 0.$$

Ответы:

1) $l = 3$, $m = 4$; 2) $l = 1$, $m = -4$;

3) $l = 4$, $m = 1$; 4) $l = 4$, $m = -4$.

6) Привести уравнение плоскости

$$2x - 2y + z - 18 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

- 1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$, 2) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 1 = 0$;
 3) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0$; 4) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{11}{14} = 0$.

7) Вычислить расстояние d от точки $M(-2; -4; 3)$ до плоскости
 $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Ответы:

- 1) $d = 5$; 2) $d = 3$; 3) $d = 1$; 4) $d = 8$.

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$$

перпендикулярна плоскости

$$9x - 3y - 6z + 5 = 0?$$

Ответы:

- 1) $m = -1$; 2) $m = 1$; 3) $m = -2$; 4) $m = 4$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно вектору $a = (2; -3; 5)$.

Ответы:

- 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$;
 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$.

10) Составить уравнение линии пересечения плоскости Oxz и сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

Ответы:

- 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; \\ y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9; \\ x = 0 \end{cases}$;
 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9; \\ y = 0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0. \end{cases}$

Вариант 2

1) Написать параметрическое уравнение прямой

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

$$1) \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x = 1 - 4t \\ x = -3t \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2t. \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x = 2t \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$$

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

перпендикулярны.

Ответы:

$$1) m = 2, n = 1;$$

$$2) m = -1, n = 5;$$

$$3) m = 0, n - \text{любое};$$

$$4) m = 6, n - \text{любое}.$$

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой

$$x + y - 5 = 0.$$

$$a) \frac{x}{5} - \frac{y}{5} = 1;$$

$$б) \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1;$$

$$в) \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1;$$

$$г) -\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1.$$

Ответы:

$$1) г;$$

$$2) а;$$

$$3) б;$$

$$4) в.$$

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = 15 - \sqrt{64 - x^2}.$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости над прямой

$$y - 15 = 0;$$

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости под прямой

$$y - 15 = 0;$$

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина гиперболы, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $n = (1, -2; 3)$.

Приложение 5. КОПТ «Аналитическая геометрия»

Ответы:

1) $x - 2y + 3z + 3 = 0$;

2) $2x - y + 2z + 3 = 0$;

3) $3x + 2y + z + 1 = 0$;

4) $5x + 2y - 3z = 0$.

6) Привести уравнение плоскости $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 = 0$;

2) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 8 = 0$;

3) $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - 1 = 0$;

4) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 2 = 0$.

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(4; 1; 2)$ параллельно заданной плоскости $y + 2z - 5 = 0$.

Ответы:

1) $3y + 2z - 7 = 0$;

2) $2y + 5z + 9 = 0$;

3) $5x - 2z + 2 = 0$;

4) $3y + 2z + 4 = 0$.

8) Найти координаты точки $A(0; 0; z)$, равноудаленной от точек $B(10; 0; -2)$ и $C(9; -2; 1)$.

Ответы:

1) $A(0; 0; -3)$;

2) $A(0; 0; -\frac{9}{2})$;

3) $A(0; 0; 7)$;

4) $A(0; 0; -2)$.

9) Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} x + 2y - z + D = 0 \\ 2x - y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$

пересекает ось Oy .

Ответы:

1) $D = 3$;

2) $D = 4$;

3) $D = -6$;

4) $D = 16$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Ответы:

1) прямая, проходящая через точку $(2; 0; 0)$ параллельно оси Oz ;

2) ось ординат;

3) прямая, проходящая через точку $(2; 0; 0)$ параллельно оси Ox ;

4) уравнение определяет единственную точку $(2; 0; 0)$.

Вариант 3

- 1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M = (3; -2)$ параллельно вектору $a = (1; 3)$.

Ответы:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 2t \end{cases}; & 2) \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}; \\ 3) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \end{cases}; & 4) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t. \end{cases} \end{array}$$

- 2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

проходит через начало координат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

$$\begin{array}{ll} 1) a = 2, 4y + 3 = 0; & 2) a_1 = -3, x - 2 = 0; \quad a_2 = 3, 5x + 6 = 0; \\ 3) a = 1, 2y + 7 = 0; & 4) a_1 = 1, 3x - 8y = 0; \quad a_2 = \frac{5}{3}, 33x - 56y = 0. \end{array}$$

- 3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

$$\begin{array}{ll} а) \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - 3 = 0; & б) x - 2 = 0; \\ в) \frac{5}{13}x - \frac{2}{13}y + 2 = 0; & г) y + 2 = 0. \end{array}$$

Ответы:

$$1) в; \quad 2) а; \quad 3) б; \quad 4) г.$$

- 4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = -\sqrt{25 - x^2}.$$

Ответы:

- 1) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;
2) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости;
3) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.
5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $n = (5; 0; -3)$.

Ответы:

Приложение 5. КОПТ «Аналитическая геометрия»

$$1) 2y + 3z + 3 = 0;$$

$$2) x + 3y - z = 0;$$

3) $3x + 4z + 1 = 0$;

4) $5x - 3z = 0$.

6) Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

$$2x + 4y + 3z - 5 = 0,$$

$$mx - 6y - 6z + 2 = 0.$$

Ответы:

$$1) \, l = 3, \, m = -4;$$

$$2) \ l = 3, \ m = 2;$$

3) $l = 3, m = 4$;

4) $l = 1, m = 3$.

7) Вычислить расстояние d от точки $M(1; 2; -3)$ до плоскости

$$5x - 3y + z + 4 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 1$;

2) $d = 0$ – точка M лежит на плоскости;

3) $d = 2$;

4) $d = 6$.

8) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно оси Ox .

Ответы:

$$1) \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5};$$

$$2) \frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1};$$

$$3) \frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0};$$

$$4) \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}.$$

9) Найти координаты точки $A(x; 0; 0)$, равноудаленной от точек $B(4; 0; 5)$ и $C(5; 4; 2)$.

Ответы:

1) $A(3; 0; 0)$;

2) $A(2; 0; 0)$;

3) $A(4; 0; 0)$;

4) $A(-2; 0; 0)$.

10) Выяснить, какой геометрический образ определяется уравнением

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 49$$

в декартовых прямоугольных координатах пространства.

Отвѣты:

1) сфера с центром в начале координат и радиусом, равным 7;

2) сфера с центром в точке $(-2; 3; -5)$ и радиусом, равным 49;

3) сфера с центром в точке $(2; 3; 5)$ и радиусом, равным 7;

4) сфера с центром в точке $(2; -3; 5)$ и радиусом, равным 7.

Вариант 4

1) Дана прямая $2x + 5y + 1 = 0$.

Определить угловой коэффициент k прямой, параллельной данной прямой.

Ответы:

1) $k = 0$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{2}{5}$; 4) $k = -\frac{5}{2}$.

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

совпадают.

Ответы:

1) $m = 2, n = 2$; 2) $m = -4, n = 2$ или $m = 4, n = -2$;
3) $m = -3, n = 4$; 4) $m = 3, n = 1$ или $m = 4, n = 2$.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой $2x - 3y - 6 = 0$:

а) $\frac{x}{6} - \frac{y}{6} = 1$; б) $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$;

в) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; г) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

1) а; 2) г; 3) б; 4) в.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$.

Ответы:

- 1) полуокружность, расположенная влево от прямой $x + 2 = 0$;
 - 2) полуокружность, расположенная вправо от прямой $x + 2 = 0$;
 - 3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;
 - 4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.
- 5) Найти точки пересечения плоскости $3x - 3y + z - 9 = 0$

с осями координат.

Ответы:

1) $(3; 0; 0)$, $(0; -3; 0)$, $(0; 0; 9)$; 2) $(1; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$, $(0; 0; -6)$;
3) $(1; 0; 0)$, $(0; 8; 0)$, $(0; 0; 5)$; 4) $(2; 0; 0)$, $(0; 6; 0)$, $(0; 0; -1)$.

6) Привести уравнение плоскости $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$

к нормальному виду.

Ответы:

- 1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 6 = 0;$ 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 7 = 0;$
 3) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + \frac{11}{14} = 0;$ 4) $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{6} = 0.$

7) Найти угол между плоскостями

$$x - 3y + 5 = 0, \quad 2x - y + 5z - 16 = 0.$$

Ответы:

- 1) $\cos \alpha = 0;$ 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$
 3) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6};$ 4) $\cos \alpha = \frac{1}{3}.$

8) При каком значении C и D прямая $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$

принадлежит плоскости

$$x + 2y + Cz + D = 0?$$

Ответы:

- 1) $C = -2, D = 6;$ 2) $C = -1, D = 5;$
 3) $C = 2, D = 6;$ 4) $C = 3, D = 2.$

9) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 - t, \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + mt \\ z = -6 + 2t \end{cases}$$

будет определять параллельные прямые.

Ответы:

- 1) $m = 6;$ 2) $m = -2;$ 3) $m = 3;$ 4) $m = 1.$

10) Установить, какая линия определяется уравнением $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y - 3 = 0. \end{cases}$

Ответы:

- 1) прямая, проходящая через точку $(-2; 3; 0)$ параллельно оси Oz ;
 2) ось аппликат;
 3) сфера с центром в точке $(2; 3; 5)$;
 4) прямая, проходящая через точку $(2; 3; 0)$ параллельно оси Oy .

Вариант 5

1) Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент $k = -2$ и отрезок $b = -5$, отсекаемый ею на оси Oy .

Ответы:

$$1) 3x + 2y + 1 = 0;$$

$$2) 2x + y + 5 = 0;$$

3) $3x + 8 = 0$:

4) $y + 2 = 0$.

2) Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(3m + n + 3) x + (m - 2n + 2) y + 6m + 9 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный -3 (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $m = 7, n = 2, y + 3 = 0$;

$$2) m = -2, n = 3, -6y - 3 = 0;$$

3) $m = -7, n = 4, y - 5 = 0;$

4) $m = 3, n = 1, y + 3 = 0$.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

$$a) \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 = 0;$$

$$6) v - 5 = 0;$$

$$e) \frac{5}{13} x - \frac{12}{13} y + 1 = 0;$$

$$2) 3x + 4 = 0.$$

Ответы:

1) B;

2) 6;

3) a;

4) Г.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -\sqrt{4 - y^2}.$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в левой полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в правой полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$3x - 2y - 7 = 0,$$

$$6x - 4y - 3 = 0.$$

Отвѣты:

1) пересекаются;

2) параллельны;

3) перпендикулярны;

4) совпадают.

6) Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

Приложение 5. КОПТ «Аналитическая геометрия»

$$x - 2y + 2z - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - 4y + 4z - 30 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 6$; 2) $d = 3$; 3) $d = 4$; 4) $d = 2$.

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1; -5; 4)$ параллельно заданной плоскости

$$4x - 7z + 6 = 0.$$

Ответы:

1) $y - 6z + 3 = 0$; 2) $6x + 3y - 2z = 0$;

3) $4x - 7z + 2 = 0$; 4) $4x - 7z + 24 = 0$.

8) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно оси Oz .

Ответы:

1) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 2) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$;

3) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$.

9) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} x + 2y - z + D = 0 \\ 2x - y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Oz .

Ответы:

1) $D = 2$; 2) $D = 3$; 3) $D = -1$; 4) $D = 6$.

10) Составить уравнения линии пересечения сферы, центр которой находится в начале координат и радиус равен 5, с плоскостью, параллельной плоскости Oxz и лежащей в левом полупространстве на расстоянии двух единиц от нее.

Ответы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ y = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = 0. \end{cases}$

Вариант 6

1) Составить общее уравнение прямой

$$-\frac{1}{5}(x+10)+3\left(y-\frac{2}{3}\right)=0$$

и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

- 1) $x - 5y - 15 = 0, n = (1; -5);$ 2) $2x - y + 2 = 0, n = (2; -1);$
 3) $4x + 2y + 1 = 0, n = (4; 2);$ 4) $x - 15y + 20 = 0, n = (1; -15).$

2) Определить взаимное расположение прямых

$$3x + 5y - 4 = 0, \quad 6x + 10y + 7 = 0.$$

Ответы:

- 1) пересекаются; 2) параллельны;
 3) перпендикулярны; 4) совпадают.

3) Дана прямая

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

- 1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1;$ 2) $\frac{x}{3} + \frac{z}{2} = 1;$
 3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$ 4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -2 + \sqrt{9 - y^2}.$$

Ответы:

- 1) половина эллипса, расположенная вправо от прямой $x + 2 = 0$;
 2) полуокружность, расположенная влево от прямой $x + 2 = 0$;
 3) полуокружность, расположенная вправо от прямой $x + 2 = 0$;
 4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.
 5) Определить, при каких значениях l и m данные плоскости будут совпадать:
 $2x + my + 6z - 10 = 0, \quad x - 5y - lz - 5 = 0.$

Ответы:

- 1) $l = -3, m = -10;$ 2) $l = 3, m = -4;$
 3) $l = 3, m = 4;$ 4) $l = 1, m = 3.$

6) Привести уравнение плоскости

Приложение 5. КОПТ «Аналитическая геометрия»

$$3x - 4y - 1 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z + 2 = 0;$

2) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0;$

3) $y - 2 = 0;$

4) $x + 3 = 0.$

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости

$$5x - 3y + 2z - 3 = 0.$$

Ответы:

1) $5x - 3y + 2z = 0;$

2) $5x - 2y + 5z - 6 = 0;$

3) $2x - 2y + z - 6 = 0;$

4) $2x - 5y + 7z - 6 = 0.$

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$$

параллельна плоскости

$$x - 3y + 6z + 7 = 0?$$

Ответы:

1) $m = -3;$

2) $m = 1;$

3) $m = -5;$

4) $m = 4.$

9) Найти координаты точки $A(0; y; 0)$, равноудаленной от точек $B(0; -2; 4)$ и $C(-4; 0; 4)$.

Ответы:

1) $A(0; 3; 0);$

2) $A(0; -2; 0);$

3) $A(0; 2; 0);$

4) $A(0; -4; 0).$

10) Выяснить, какой геометрический образ определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

в декартовых прямоугольных координатах пространства.

Ответы:

1) сфера с центром в начале координат и радиусом, равным 25;

2) эллипсоид вращения;

3) сфера с центром в начале координат и радиусом, равным 5;

4) параболоид вращения.

Вариант 7

- 1) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M = (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ параллельно вектору $a = (-3; -2)$.

Ответы:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x - \frac{3}{2}}{3} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-2}; & 2) \frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{1}; \\ 3) \frac{x - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y-3}{3}; & 4) \frac{x - \frac{1}{2}}{-3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-2}. \end{array}$$

- 2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 1)x + (a^2 - 5)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

$$\begin{array}{ll} 1) a = -2, \quad 5y - 8 = 0; & 2) a = -1, \quad -y + 4 = 0; \\ 3) a = -3, \quad x - 6 = 0; & 4) a = \frac{5}{3}, \quad 3x - 5y = 0. \end{array}$$

- 3) Привести общее уравнение прямой $12x - 5y + 13 = 0$ к нормальному виду.

Ответы:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 5 = 0; & 2) \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 = 0; \\ 3) -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0; & 4) x + 3 = 0. \end{array}$$

- 4) Установить, какая линия определяется уравнением $x = +\sqrt{16 - y^2}$.

Ответы:

- 1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;
- 2) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.
- 3) полуокружность, расположенная в левой полуплоскости;
- 4) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;
- 5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$2x - 3y + 5z - 7 = 0, \quad 4x - 6y + 10z + 3 = 0.$$

6) Привести уравнение плоскости $-z + 3 = 0$ к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0;$

2) $-y - 2 = 0;$

3) $x + 5 = 0;$

4) $z - 3 = 0.$

7) Найти угол между плоскостями $x - 3y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

Ответы:

1) $\cos \alpha = \frac{13}{6};$

2) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{22}};$

3) $\cos \alpha = 0;$

4) $\cos \alpha = 0.5.$

8) При каких значениях A и D прямая

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

Ответы:

1) $A = 3, D = -23;$

2) $A = -3, D = -2;$

3) $A = 23, D = -3;$

4) $A = 3, D = -1.$

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно оси Oy .

Ответы:

1) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1};$

2) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0};$

3) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0};$

4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}.$

10) Установить, какая линия определяется уравнением $\begin{cases} x-5=0 \\ z+2=0. \end{cases}$

Ответы:

1) прямая, проходящая через точку $(5; 0; -2)$ параллельно оси Oy ;

2) прямая, проходящая через точку $(5; 0; 2)$ параллельно оси Oz ;

3) прямая, проходящая через точку $(0; 5; -2)$ параллельно оси Ox ;

4) уравнение определяет единственную точку $(0; 2; 5)$.

Вариант 9

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M(2; 0)$ параллельно вектору $a = (0; -3)$.

Ответы:

$$1) \begin{cases} x = -2t \\ y = 3 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = 2 \\ y = -3t \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x = -3 \\ y = 2t \end{cases}.$$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a^2 + 2)x + (a - 3)y - a + 5 = 0$$

параллельна оси ординат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

$$1) a = 3, \quad 11x + 2 = 0; \quad 2) a = -3, \quad x - 56 = 0;$$

$$3) a = 0, \quad 5x - 4 = 0; \quad 4) a = \frac{5}{3}, \quad 3x - 6y = 0.$$

3) Определить взаимное расположение прямых

$$y + 3 = 0, \quad 5x - 7 = 0.$$

Ответы:

1) перпендикулярны; 2) параллельны;

3) пересекаются; 4) совпадают.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$$

Ответы:

1) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3; -5; -2)$ и перпендикулярна вектору $n = (4; -6; 1)$.

Ответы:

$$1) -y + 6z + 3 = 0; \quad 2) 2x + 2y - z = 0;$$

Приложение 5. КОПТ «Аналитическая геометрия»

3) $x + 5z + 1 = 0$;

4) $4x - 6y + z - 40 = 0$.

6) Вычислить расстояние d от точки $M(3; -6; 7)$ до плоскости

$$4x - 3z - 1 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 1$;

2) $d = 0$ – точка M лежит на плоскости;

3) $d = 2$;

4) $d = 3$.

7) Найти отрезки, отсекаемые плоскостью

$$3x - 4y - 24z + 12 = 0$$

на координатных осях.

Ответы:

1) $a = -3, b = 1, c = 5$;

2) $a = 5, b = 6, c = 2$;

3) $a = -7, b = 2, c = 1$;

4) $a = -4, b = 3, c = \frac{1}{2}$.

8) При каких значениях A и B плоскость

$$Ax + By + 3z - 5 = 0$$

перпендикулярна прямой

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}?$$

Ответы:

1) $A = 3, B = -5,5$;

2) $A = -3, B = -2$;

3) $A = 4,5, B = -3$;

4) $A = -3, B = 4,5$.

9) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Oy .

Ответы:

1) $D = -6$;

2) $D = 9$;

3) $D = -2$;

4) $D = 5$.

10) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z - 3 = 0.$$

Ответы:

1) $C(-3; 2; 0), r = 3$;

2) $C(2; 0; -2), r = 2$;

3) $C(0; 2; 3), r = 4$;

4) $C(3; 0; -2), r = 4$.

Вариант 10

1) Написать каноническое уравнение прямой $2x - 3y - 6 = 0$.

Ответы:

$$1) \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2};$$

$$2) \frac{x}{3} = \frac{y-3}{1};$$

$$3) \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{5};$$

$$4) \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3}$$

2) Определить взаимное расположение прямых

$$5x - 2y + 7 = 0,$$

$$5x - 3y - 7 = 0.$$

Ответы:

1) перпендикулярны;

2) параллельны;

3) пересекаются;

4) совпадают.

3) Дана прямая

$$4x - 3y + 24 = 0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

$$1) \frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1;$$

$$2) \frac{x}{6} + \frac{y}{-8} = 1;$$

$$3) \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1;$$

$$4) \frac{x}{4} + \frac{z}{-3} = 1.$$

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = -\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) часть параболы, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каком значении l ара уравнений

$$2x - 2z + 5 = 0,$$

$$lx + y - 4z - 8 = 0$$

будет определять перпендикулярные плоскости.

Ответы:

$$1) l = -2;$$

$$2) l = 1;$$

$$3) l = 3;$$

$$4) l = -4.$$

Приложение 5. КОПТ «Аналитическая геометрия»

6) Привести уравнение плоскости $-x + 5 = 0$ к нормальному виду.

Ответы:

$$1) -\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0; \quad 2) \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0;$$

$$3) y - 2 = 0; \quad 4) x - 5 = 0.$$

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-1; 2; 4)$ параллельно заданной плоскости $5x - 3y + 2 = 0$.

Ответы:

$$1) -y + 6z + 3 = 0; \quad 2) 2x + 2y - z = 0;$$

$$3) 5x - 3y + 11 = 0; \quad 4) 5x - 3y + 10 = 0.$$

8) При каких значениях t и C прямая

$$\frac{x-2}{t} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

перпендикулярна к плоскости

$$3x - 2y + Cz + 1 = 0?$$

Ответы:

$$1) t = 3, C = -5.5; \quad 2) t = -3, C = -2;$$

$$3) t = -6, C = 1.5; \quad 4) t = 6, C = -1.5.$$

9) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4t, \\ z = -3t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -8 - 4t \\ z = -3 + mt \end{cases}$$

будет определять параллельные прямые.

Ответы:

$$1) m = 5; \quad 2) m = 1; \quad 3) m = 2; \quad 4) m = -3.$$

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ z - 5 = 0. \end{cases}$$

Ответы:

- 1) прямая, проходящая через точку $(0; -2; 5)$ параллельно оси Ox ;
- 2) прямая, проходящая через точку $(5; 0; 2)$ параллельно оси Oy ;
- 3) прямая, проходящая через точку $(5; -2; 0)$ параллельно оси Oy ;
- 4) уравнение определяет единственную точку $(0; 2; 3)$.

Образец билета

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 1 Дисциплина Линейная алгебра

Направление Экономика

БИЛЕТ № 1

1. Обратная матрица.
2. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
3. Решить систему по формулам Крамера:
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 3; \\ 3x + 4y - 5z = -8; \\ 2y + 7z = 17. \end{cases}$$
4. Вычислить длину вектора $\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$, если $\bar{a} = (2, 0, 3), \bar{b} = (1, 3, -2), \bar{c} = (1, 3, 2)$.
5. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$ заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Какая линия определяется следующим уравнением $x = -1 - \frac{5}{4}\sqrt{4y - y^2 + 12}$? Изобразить ее на чертеже.
7. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-2, -1, -3)$ и $B(0, 2, 1)$.

ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАЩИТЫ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ТЕСТОВ

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	Типовой расчет № 1,3 (маx 7 б)	Типовой расчет № 2 (маx 6 б)
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	0 – 2	0 – 1.5
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	2 – 4	1.5 – 3,5
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки. Ответы на вопросы полные или частично полные	4 – 5,5	3,5 – 5
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	5,5 – 7	5-6

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	Контрольная работа № 1, 2 (маx 10 б)
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	0 – 3
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	4 – 6
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	7 – 8
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	9-10

КОПТ "Аналитическая геометрия": всего заданий в тесте 10. Каждое задание оценивается в 1 балл.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Матрицы, определители, СЛАУ	Текущий контроль	Выполнение ТР №1 (7), посещаемость, активность, ДЗ (5)	7	12	6
	Рубежный контроль	Контрольная работа №1	6	10	
Модуль 2					
Элементы матричного анализа	Текущий контроль	Выполнение ТР №2 (6), посещаемость, активность, ДЗ (5)	6	11	10
	Рубежный контроль	Контрольная работа №2	6	10	
Модуль 3					
	Текущий контроль	Выполнение ТР №3 (7), посещаемость, активность, ДЗ, СРС	9	17	17
	Рубежный контроль	КОПТ «Аналитическая геометрия»	6	10	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Зачет с оценкой)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА № 1

Задание. 1. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) AB ; б) A^{-1} ; в) AA^{-1} .

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

б) Определитель матрицы A равен:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 + 1 - (-4) - (-2) = -5 \neq 0,$$

Следовательно, матрица A невырожденная.

Находим алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (-1) = -2, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5, \end{aligned}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - (-2)) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10.$$

Получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -1 \\ -0,6 & 0,4 & 1 \\ 0,8 & -0,2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -1 \\ -0,6 & 0,4 & 1 \\ 0,8 & -0,2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -12+3+4 & 3-2-1 & 15-5-10 \\ -8+12-4 & 2-8+1 & 10-20+10 \\ -4+0+4 & 1+0-1 & 5+0-10 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задание 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. Разложим определитель, например, по третьей строке, так как в ней один из элементов равен нулю, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3A_{31} + 3A_{32} + 0A_{33} + 2A_{34} =$$

$$= 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(6 + 18 - 20 - 3) - 3(6 + 6 + 10 - 18 - 20 - 1) - 2(12 + 12 - 6 - 4) =$$

$$= 3 - 3(-17) - 2(14) = 3 + 51 - 28 = 26.$$

Ответ: 26.

Задание 3. Решить систему уравнений а) с помощью обратной матрицы; б) методом Крамера; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме данная система будет иметь вид: $AX = B$.

Решение данного матричного уравнения находится по формуле: $X = A^{-1}B$

Находим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 8 + 2 = -17.$$

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица, которая по алгоритму, изложенному в §3, имеет вид:

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя значения в формулу $X = A^{-1}B$, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -48 + 10 - 13 \\ 6 + 20 - 26 \\ -60 + 55 + 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т. е. решение системы $(3; 0; -2)$.

б) Определитель системы $\det A = -17 \neq 0$, следовательно, существует единственное решение системы.

Вычислим вспомогательные определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 13 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -51; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 34.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-17} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{34}{-17} = -2,$$

т. е. решение системы $(3; 0; -2)$.

в) Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array} \right).$$

Элемент $a_{11} = -2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Преобразование проведем методом Гаусса, используя правило прямоугольников:

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 34 & -68 \end{array}\right) \div 34 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

На основе последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2 \cdot (-2) = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

т. е. решение системы $(3; 0; -2)$.

Ответ: $(3; 0; -2)$.

Задание 4. Найти любые два базисных решения системы:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составив расширенную матрицу системы, проводим преобразования Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{7} & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 20 & -8 & -12 & 40 \\ 0 & 10 & -4 & -6 & 20 \end{array}\right) \div 4 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & \textcircled{5} & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ранг полученной системы равен двум, следовательно, число базисных переменных равно 2, число свободных переменных определим по формуле $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Определим число возможных базисов по формуле

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \text{ получим } C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6. \text{ Базисными переменными}$$

могут быть следующие группы: x_1, x_2 ; x_1, x_3 ; x_1, x_4 ; x_2, x_3 ; x_2, x_4 ; x_3, x_4 .

Выясним, образуют ли переменные x_1, x_2 базис. Так как базисный минор, т. е. определитель матрицы из коэффициентов при этих переменных

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 35 \neq 0, \text{ то } x_1, x_2 \text{ образуют базис, свободные переменные } x_3, x_4$$

приравняем нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 = -1, \\ 5x_2 = 10, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, т. е. первое базисное решение будет $(1, 2, 0, 0)$.

Рассмотрим следующую группу переменных x_1, x_3 . Так как базисный

$$\text{минор } \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \text{ то } x_1, x_3 \text{ образуют базис, тогда свободные}$$

переменные x_2, x_4 . Приравнявая свободные переменные нулю, получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_3 = -1, \\ -2x_3 = 10, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -3$, $x_3 = -5$, т. е. второе базисное решение будет $(-3, 0, -5, 0)$.

Ответ: $(1, 2, 0, 0)$, $(-3, 0, -5, 0)$.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА № 2

Задание 1. Известно, что первый завод 2015 году выпустил 1200 женских, 1400 мужских и 650 детских велосипедов, второй завод в этом же году выпустил 800 женских, 750 мужских и 570 детских велосипеда. Найти объем продукции, выпущенной двумя заводами, в 2015 году.

Решение. Объем выпуска велосипедов первого завода в 2015 году составил

$$V_1 = (1200; 1400; 650).$$

Объем выпуска велосипедов второго завода в 2015 году составил

$$V_2 = (800; 750; 570).$$

Тогда объем продукции, выпущенной двумя заводами, найдем как сумму двух векторов объемов производства первого и второго заводов:

$$V = V_1 + V_2 = (2000; 2150; 1220)$$

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Необходимо: а) найти линейную комбинацию векторов $2\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$; б) вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$; в) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Решение. а) Находим координаты векторов, входящих в линейную комбинацию, используя определение операции произведения вектора на скаляр, имеем

$$2\vec{a} = 2(2; -3; 1) = (4; -6; 2), \quad 5\vec{b} = 5(0; 1; 4) = (0; 5; 20), \quad 3\vec{c} = 3(5; 2; -3) = (15; 6; -9).$$

Тогда искомая линейная комбинация равна:

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c} &= (4; -6; 2) + (0; 5; 20) - (15; 6; -9) = (4 + 0 - 15; -6 + 5 - 6; 2 + 20 + 9) = \\ &= (-11; -7; 31) \end{aligned}$$

б) Для нахождения скалярного произведения используем формулу

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})(\vec{j} + 4\vec{k}) = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3 + 4 = 1,$$

в) Используем формулу $np_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|}$.

Находим:

координаты вектора $\vec{b} + \vec{c} = (0; 1; 4) + (5; 2; -3) = (5; 3; 1)$;

длину вектора $|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$;

скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (2; -3; 1) \cdot (5; 3; 1) = 10 - 9 + 1 = 2$.

Подставляя в формулу, имеем:

$$np_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{35}}.$$

Задание 3. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ базис. Если образуют, то разложить вектор $\vec{x} = 4\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k}$ по этому базису.

Решение. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы. Для линейной независимости векторов необходимо и достаточно, чтобы равенство $\lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} = 0$ выполнялось только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Запишем это равенство в координатной форме

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оно эквивалентно системе однородных уравнений

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решение системы проведем, используя метод Гаусса. Для преобразования элементов используем правило прямоугольников, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -13 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -70 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы коэффициентов $r(A) = 3$ совпадает с числом неизвестных $n = 3$, следовательно, система определенная и имеет тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Таким образом, векторы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ линейно независимы, а значит, образуют базис.

Разложить вектор по базису, значит найти числовые коэффициенты в выражении $\bar{x} = \lambda_1 \bar{p} + \lambda_2 \bar{q} + \lambda_3 \bar{r}$. Данное векторное выражение представимо в виде системы линейных алгебраических уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 4, \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 12, \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = -3. \end{cases}$$

Применив метод Гаусса, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 12 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 12 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 12 \\ 0 & 0 & -70 & 70 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 4, \\ -\lambda_2 - 13\lambda_3 = 12, \\ \lambda_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

Таким образом, $\bar{x} = \bar{p} + \bar{q} - \bar{r}$.

Ответ. Векторы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ образуют базис и $\bar{x} = \bar{p} + \bar{q} - \bar{r}$.

Задание 4. Найти координаты вектора $\bar{x} = 4\bar{i} - 12\bar{k}$ в базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) ,

$$\text{если он задан в базисе } (e_1, e_2, e_3) \begin{cases} e_1^* = e_1 + 2e_2 + e_3, \\ e_2^* = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3, \\ e_3^* = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису

$$(e_1^*, e_2^*, e_3^*). \text{ Она имеет вид } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу C^{-1} :

$$1) \text{ Находим определитель: } \Delta = |C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 24 + 8 - 9 - 16 - 12 = 4.$$

2) Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

3) Составляем обратную матрицу

$$C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу $x^* = C^{-1}x$, найдем

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -16 \\ -32 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\vec{x} = (-4; -8; 8)$.

Задание 5. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Найти образ } \vec{y} = A(\vec{x}) \text{ вектора } \vec{x} = (3; 2; -4).$$

Решение. Связь между вектором $\vec{x}$ и его образом $\vec{y} = A(\vec{x})$ в матричной форме выражается уравнением $y = Ax$.

$$\text{Следовательно, } y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 - 12 \\ 15 + 2 - 16 \\ 3 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\vec{y} = (-8; 1; -21)$.

Задание 6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (оператора), заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$\left| \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7 - \lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решим это уравнение, найдя определитель.

$$(4 - \lambda)^2(-7 - \lambda) - 90 - 90 - 12(-7 - \lambda) + 27(4 - \lambda) + 25(4 - \lambda) = 0,$$

Раскроем скобки и приведем подобные, получим: $-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, или $-\lambda^2(\lambda - 1) = 0$.

Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ найдены.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

Найдем собственный вектор $\vec{x}^1 = (x_1, x_2, x_3)$, соответствующий собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, используя формулу $(A - \lambda E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства получим систему уравнений:
$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг системы уравнений равен 2, т.е. число базисных неизвестных 2. А так как число неизвестных системы равно 3, то число свободных неизвестных равно 1. Система имеет бесчисленное множество решений. Базисный минор $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, т.е. x_1 и x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная.

Таким образом, из последней матрицы получим систему
$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = -2x_3, \\ -3x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Решение которой $x_2 = \frac{2}{3}x_3$, $x_1 = \frac{1}{3}x_3$. Пусть $x_3 = 3c_1$, где c_1 – любое не равное нулю действительное число. Тогда $x_1 = c_1$, $x_2 = 2c_1$. Значит, $\vec{x}^1 = (c_1; 2c_1; 3c_1)$, где $c_1 \neq 0$ – собственный вектор, соответствующий собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Найдем, аналогично, собственный вектор $\vec{x}^2 = (x_1, x_2, x_3)$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

Получим систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Применим гауссовские преобразования:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2, n = 3,$$

т.е. две переменные базисные, а одна – свободная. Базисный минор

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ поэтому } x_1, x_2 - \text{базисные, а } x_3 - \text{свободная переменная.}$$

Таким образом, $x_2 = x_3$; $3x_1 = 5x_2 - 2x_3 \Leftrightarrow 3x_1 = 5x_3 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3$.

Полагая $x_3 = c_2$, где c_2 – любое действительное число, но $c_2 \neq 0$, получим

$\vec{x}^2 = (c_2; c_2; c_2) = c_2(1; 1; 1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 1$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\vec{x}^1 = (c_1; 2c_1; 3c_1)$, где $c_1 \neq 0$; $\lambda_3 = 1$,
 $\vec{x}^2 = (c_2; c_2; c_2) = c_2(1; 1; 1)$.

Задание 7. Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли для структурной матрицы торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ если известно, что суммарный доход этих стран равен}$$

402 усл. ден. ед.

Решение. Данная задача линейной модели обмена сводится к нахождению собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$. Для нахождения собственного вектора используется матричное

$$\text{уравнение: } (A - E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

Подставляя исходные значения, получим:

$$\begin{pmatrix} -0,4 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & -0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применим для решения метод Гаусса, для пересчета элементов, используем правило прямоугольников, получим:

$$\begin{pmatrix} -0,4 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & -0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & -0,6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0,4 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,15 & -0,19 \\ 0 & -0,15 & 0,19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0,4 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,15 & -0,19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rang} = 2 < n = 3$, то однородная система имеет нетривиальное решение, которое находим из системы:
$$\begin{cases} -0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = 0, \\ 0,15x_2 - 0,19x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть переменные x_1, x_2 – базисные, x_3 – свободная, тогда получим: $x_1 = \frac{33}{15}c$,

$$x_2 = \frac{19}{15}c, \quad x_3 = c, \quad \text{т. е. собственный вектор имеет вид: } x = \left(\frac{33}{15}c, \frac{19}{15}c, c \right).$$

Следовательно, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $x = \left(\frac{33}{15}c, \frac{19}{15}c, c \right)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{33}{15} \div \frac{19}{15} \div 1$ или $33 \div 19 \div 15$.

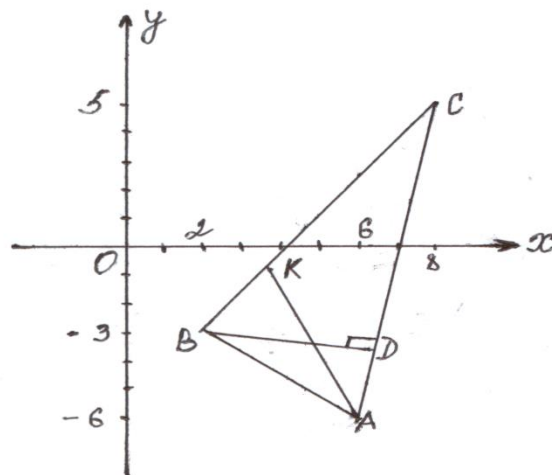
По условию суммарный доход этих стран равен 402 усл. ден. ед, следовательно $\frac{33}{15}c + \frac{19}{15}c + c = 402$, решение данного уравнения: $c = 90$.

Таким образом, равновесный вектор национальных доходов $x = (198, 114, 90)$ ден. ед.

Ответ. $x = (198, 114, 90)$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА № 3

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(6;-6)$, $B(2;-3)$, $C(8;5)$. Требуется: 1) составить уравнение стороны AB ; 2) найти длину стороны AB ; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B ; 4) вычислить расстояние от вершины C до стороны AB ; 5) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC ; 6) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC ; 7) найти площадь треугольника ABC ; 8) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.



Решение:

1. Для составления уравнения стороны AB используем формулу

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ где } A(6;-6), B(2;-3): \frac{y - (-6)}{-3 - (-6)} = \frac{x - 6}{2 - 6} \text{ или } \frac{y + 6}{3} = \frac{x - 6}{-4}$$

$$\text{или } -4y - 24 = 3x - 18 \text{ или } 3x + 4y + 6 = 0.$$

2. Для нахождения длины AB используем формулу

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} :$$

$$d = |\vec{AB}| = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-3 - (-6))^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 (\text{ед. дл.}).$$

3. Для составления уравнения высоты BD используем условие

$$\text{перпендикулярности прямых } BD \text{ и } AC, \text{ т.е. формулу } k_2 = -\frac{1}{k_1} : k_{BD} k_{AC} = -1$$

$$\text{Найдем } k_{AC}, \text{ используя формулу } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad k_{AC} = \frac{5 - (-6)}{8 - 6} = \frac{11}{2};$$

$$k_{BD} = -\frac{1}{11/2} = -\frac{2}{11}. \text{ Составим уравнение высоты } BD \text{ по формуле}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ зная, что } k_{BD} = -\frac{2}{11} \text{ и что она проходит через точку } B(2;-3).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

Получим: $y - (-3) = -\frac{2}{11}(x - 2)$ или $11y + 33 = -2x + 4$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид: $2x + 11y + 29 = 0$.

4. Расстояние от вершины $C(8;5)$ до стороны AB , уравнение которой было найдено в п.1: $3x + 4y + 6 = 0$, найдем по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Получим:

$$d = \frac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ (ед.дл.)}.$$

5. Составим, например, уравнение средней линии MN треугольника ABC . Найдем середину (т. M) стороны CB и середину (т. N) стороны CA , используя формулы $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{8 + 2}{2} = 5; \quad y_M = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1;$$

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{6 + 8}{2} = 7; \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-6 + 5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $M(5;1)$, $N(7;-\frac{1}{2})$

Составим уравнение MN , используя формулу $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$: $\frac{y - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{x - 5}{7 - 5}$

или $\frac{y - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{x - 5}{2}$ или $\frac{y - 1}{-3} = \frac{x - 5}{4}$ или $4y - 4 = -3x + 15$ или $3x + 4y - 19 = 0$.

6. Для составления уравнения прямой, проходящей через точку $A(6;-6)$ параллельно прямой BC , используем условие параллельности двух прямых $k_1 = k_2$. Найдем угловой коэффициент прямой BC по формуле

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B};$$

$$k_{BC} = \frac{5 - (-3)}{8 - 2} = \frac{4}{3}. \text{ Тогда } k = k_{BC} = \frac{4}{3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Образцы выполнения типовых расчетов

Уравнение искомой прямой найдем по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y - (-6) = \frac{4}{3}(x - 6) \text{ или } 3y + 18 = 4x - 24 \text{ или } 4x - 3y - 42 = 0.$$

7. Площадь треугольника ABC найдем по формуле $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

$$: S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 - 6 & -3 - (-6) \\ 8 - 6 & 5 - (-6) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-44 - 6| = 25 \text{ (кв. ед).}$$

9. Для вычисления угла A треугольника ABC используем формулу $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Найдем сначала k_{AB} , зная уравнение AB : $3x + 4y + 6 = 0$.

Преобразуем это уравнение к виду $y = kx + b$: $4y = -3x - 6$ или $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$.

Отсюда $k_{AB} = -\frac{3}{4}$. Угловой коэффициент прямой AC был найден в п.3:

$k_{AC} = \frac{11}{2}$. Заметим, что $k_1 = k_{AC}$, $k_2 = k_{AB}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{11}{2}}{1 + (-\frac{3}{4}) * \frac{11}{2}} = 2 \text{ или } A = \operatorname{arctg} 2 \approx 1,11 \text{ рад.}$$

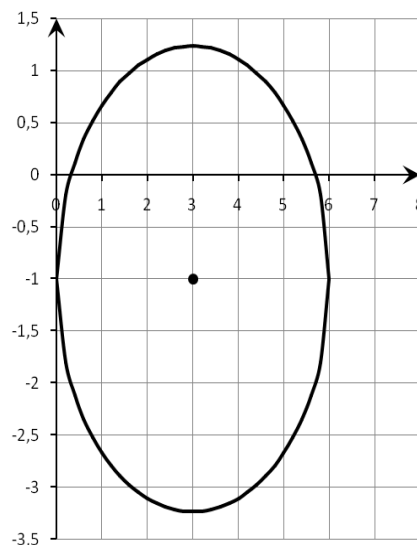
Задача 2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

Решение. Преобразуем данное уравнение кривой,

так

как



$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 5(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) + 9 = 5(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) + 9(y^2 + 2 \cdot 1y + 1 - 1) + 9 = 5(x - 3)^2 - 45 + 9(y + 1)^2 - 9 + 9 = 0,$$

то уравнение можно написать в виде:

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 - 45 = 0$$

или

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

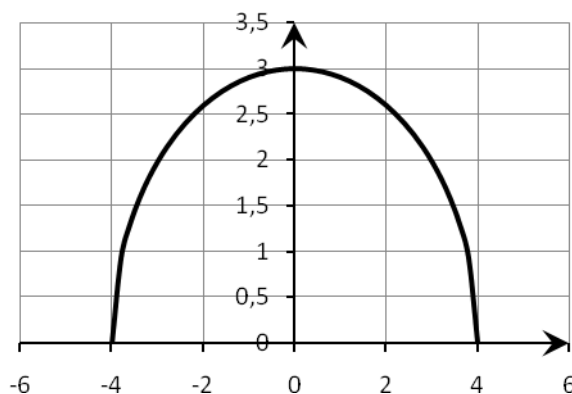
Получили каноническое уравнение эллипса, его центр симметрии находится в точке $(3; -1)$, полуоси $a = 3$, $b = \sqrt{5}$

б) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим: $y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$ или

$$y^2 = 9 - \frac{9}{16}x^2, \quad \frac{9}{16}x^2 + y^2 = 9, \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 - \text{каноническое уравнение эллипса с}$$

центром в начале координат и полуосями, равными $a = 4$, $b = 3$. Так как, по условию, в уравнении перед радикалом стоит знак «+», то исходное уравнение определяет часть эллипса, расположенную выше оси Ox .

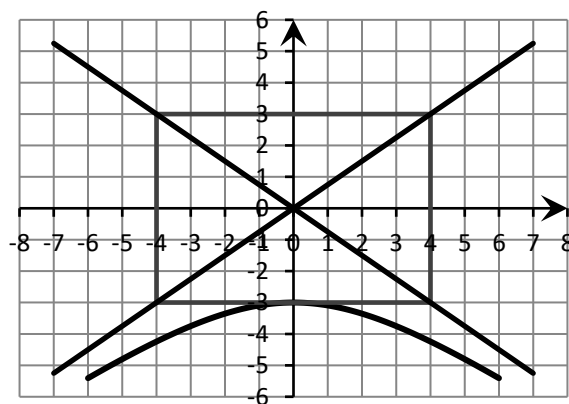


в) $y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 + x^2}$. Возведем обе

стороны уравнения в квадрат. Получим: $y^2 = \frac{9}{16}(16 + x^2)$ или $y^2 = 9 + \frac{9}{16}x^2$,

$$-\frac{9}{16}x^2 + y^2 = 9, \quad -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 -$$

каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями, равными $a = 4$, $b = 3$. Так как, по условию, в уравнении перед радикалом стоит знак «-», то исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенную ниже оси Ox .



Задача 3. Найти расстояние от точки $M_0(-12, 7, -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3, 4, -7)$, $M_2(1, 5, -4)$, $M_3(-5, -2, 0)$.

Решение.

Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получим:

$$\begin{vmatrix} x + 3 & y - 4 & z + 7 \\ 1 + 3 & 5 - 4 & -4 + 7 \\ -5 + 3 & -2 - 4 & 0 + 7 \end{vmatrix} = 25(x + 3) - 34(y - 4) - 22(z + 7) = 25x - 34y - 22z + 57 = 0$$

Тогда используя формулу $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, в которой

$A = 25, B = -34, C = -22, D = 57$, и $x_0 = -12, y_0 = 7, z_0 = -1$, получим:

$$d = \frac{|25 \cdot (-12) - 34 \cdot 7 - 22 \cdot (-1) + 57|}{\sqrt{25^2 + (-34)^2 + (-22)^2}} = \frac{459}{\sqrt{2265}} \text{ (ед. дл.)}$$

Задача 4. Найти угол между плоскостями $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y + 5z - 16 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями находим по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Координаты нормальных векторов заданных плоскостей соответственно равны: $n_1 = (1; -3; 0)$ и $n_2 = (2; -1; 5)$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 5}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}} = \frac{5}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Задача 5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1}$ с плоскостью $x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Для нахождения точки пересечения от уравнения прямой в каноническом виде переходим к уравнению прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = t, \\ \frac{y-4}{-2} = t, \\ \frac{z-5}{1} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 3, \\ y = -2t + 4, \\ z = t + 5 \end{cases}$$

Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости, получим равенство

$$t + 3 - 2(-2t + 4) + t + 5 - 6 = 0 \text{ из которого вытекает, что } 6t - 6 = 0, \text{ т. е. } t = 1.$$

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} x = t + 3 = 1 + 3 = 4, \\ y = -2t + 4 = -2 \cdot 1 + 4 = 2, \\ z = t + 5 = 1 + 5 = 6. \end{cases} \text{ точка пересечения имеет}$$

координаты $(4, 2, 6)$.

Контрольная работа по разделу «Матрицы. Определители. СЛАУ»

Задание. 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти $AB + 3AE$.

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1-3 & 12-2 & 15-4-2 \\ 4+4+3 & 8-8 & 10-16+2 \\ 2-3 & 4 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3AE = 3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 12 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$AB + 3AE = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 12 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 6 \\ 17 & 12 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений а) с помощью обратной матрицы; б) методом Крамера; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме данная система будет иметь вид: $AX = B$.

Решение данного матричного уравнения находится по формуле: $X = A^{-1}B$

Находим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 8 + 2 = -17.$$

Приложение 10. Образец решения контрольных работ

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица, которая по алгоритму, изложенному в §3, имеет вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя значения в формулу $X = A^{-1}B$, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -48 + 10 - 13 \\ 6 + 20 - 26 \\ -60 + 55 + 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т. е. решение системы $(3; 0; -2)$.

б) Определитель системы $\det A = -17 \neq 0$, следовательно, существует единственное решение системы.

Вычислим вспомогательные определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 13 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -51; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 34.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-17} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{34}{-17} = -2,$$

т. е. решение системы $(3; 0; -2)$.

в) Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array} \right).$$

Элемент $a_{11} = -2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Преобразование проведем методом Гаусса, используя правило прямоугольников:

Приложение 10. Образец решения контрольных работ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 34 & -68 \end{array}\right) \div 34 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

На основе последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2 \cdot (-2) = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

т. е. решение системы $(3; 0; -2)$.

Ответ: $(3; 0; -2)$.

Задание 3. Найти любые два базисных решения системы:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составив расширенную матрицу системы, проводим преобразования Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{7} & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 20 & -8 & -12 & 40 \\ 0 & 10 & -4 & -6 & 20 \end{array}\right) \div 4 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & \textcircled{5} & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ранг полученной системы равен двум, следовательно, число базисных переменных равно 2, число свободных переменных определим по формуле $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Определим число возможных базисов по формуле

Приложение 10. Образец решения контрольных работ

$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, получим $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Базисными переменными

могут быть следующие группы: x_1, x_2 ; x_1, x_3 ; x_1, x_4 ; x_2, x_3 ; x_2, x_4 ; x_3, x_4 .

Выясним, образуют ли переменные x_1, x_2 базис. Так как базисный минор, т. е. определитель матрицы из коэффициентов при этих переменных

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 35 \neq 0, \text{ то } x_1, x_2 \text{ образуют базис, свободные переменные } x_3, x_4$$

приравняем нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 = -1, \\ 5x_2 = 10, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, т. е. первое базисное решение будет $(1, 2, 0, 0)$.

Рассмотрим следующую группу переменных x_1, x_3 . Так как базисный

минор $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, то x_1, x_3 образуют базис, тогда свободные

переменные x_2, x_4 . Приравнявая свободные переменные нулю, получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_3 = -1, \\ -2x_3 = 10, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -3$, $x_3 = -5$, т. е. второе базисное решение будет $(-3, 0, -5, 0)$.

Ответ: $(1, 2, 0, 0)$, $(-3, 0, -5, 0)$.

Контрольная работа по разделу «Матричная алгебра»

Задание 1. Вектор $x = (4; 0; -12)$ в «старом» базисе (e_1, e_2, e_3) задан своими координатами. Найти координаты этого вектора в «новом» базисе (e_1^*, e_2^*, e_3^*) если «новые» базисные векторы имеют координаты: $e_1^* = (1, 2, 1)$, $e_2^* = (2, 3, 4)$, $e_3^* = (3, 4, 3)$.

Решение. Матрица перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e_1^*, e_2^*, e_3^*)

имеет вид:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

где в 1-м столбце – координаты вектора e_1^* , во 2-м – координаты вектора e_2^* , в 3-м – координаты вектора e_3^* в «старом» базисе.

Находим обратную матрицу
$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

и по формуле $x^* = A^{-1}x$, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -28 + 12 \\ -8 - 24 \\ 20 + 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -16 \\ -32 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\vec{x}^* = -4e_1 - 8e_2 + 8e_3$.

Задание 2. Найти матрицу перехода от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

Решение. Столбцами матрицы перехода служат координаты нового вектора в старом базисе. Матрица перехода имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе

(e_1, e_2, e_3) задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти образ $y = \tilde{A}(x)$ вектора

$$x = -e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Решение. Используем формулу $y = Ax$, получим:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $y = e_1 + 3e_2 + 4e_3$.

Задание 4. Найти собственные значения и один собственный вектор линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$\left| \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решим это уравнение, найдя определитель.

$$-\lambda(5-\lambda)(-1-\lambda) - 6 + 6 + 3\lambda - 2(5-\lambda) + 6(-1-\lambda) = 0,$$

Раскроем скобки и приведем подобные, получим:
 $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda - 16 = 0$. Согласно следствию из теоремы Безу, целые корни данного уравнения следует искать среди делителей свободного члена. При подстановке в уравнение значения $\lambda = 2$ получим тождество, следовательно, значение $\lambda = 2$ является корнем и кубическое уравнение можно представить в виде: $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0$.

Решение последнего уравнения представимо в виде:

Приложение 10. Образец решения контрольных работ

$$\begin{cases} \lambda - 2 = 0, \\ \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 4. \end{cases}$$

Собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$ найдены.

Найдем собственный вектор $\vec{x}^1 = (x_1, x_2, x_3)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг системы уравнений равен 2, т.е. число базисных неизвестных 2. А так как число неизвестных системы равно 3, то число свободных неизвестных равно 1. Система имеет бесчисленное множество решений. Базисный минор $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, т.е. x_1 и x_3 – базисные переменные,

x_2 – свободная.

Таким образом, $x_3 = 0$, $3x_1 = -6x_2$, $x_1 = -2x_2$. Пусть $x_2 = c_1$, где c_1 – любое не равное нулю действительное число. Тогда $x_1 = -2c_1$, $x_2 = c_1$, $x_3 = 0$. Значит, $\vec{x}^1 = (-2c_1; c_1; 0)$, где $c_1 \neq 0$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Оценка промежуточной аттестации:

- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ
- 20 баллов - Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Критерии оценивания вопросов для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

баллы	Критерии
8-10	глубоко и прочно усвоил теоретический материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, усвоил методы линейной алгебры и аналитической геометрии проведения исследований и анализа их результатов
5-7	понимает содержание основных методов линейной алгебры и аналитической геометрии, грамотно излагает их суть, допуская незначительные неточности в формулировках определений и теорем
1-3	допускает неточности в формулировках определений, теорем; недостаточно владеет теоретическим материалом
0	не знает основных понятий и методов линейной алгебры и аналитической геометрии.

Критерии оценивания заданий для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

баллы	Критерии
20-16	владеет математическими методами, разносторонними навыками и приемами решения практических задач, уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 85-100 % практических заданий)
15-11	умеет применять математические методы, но допускает недочеты и ошибки при решении практических задач, недостаточно уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 50-85 % практических заданий)
10-6	испытывает затруднения при решении практических заданий (в билете решено 30-50 % практических заданий)
5-0	не владеет математическим инструментарием, допускает грубые ошибки при решении практических задач (в билете решено менее 30 % практических заданий)