Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Министерство науки, высшего образования и инноваций
Кыргызской Республики

Межгосударственная образовательная организация высшего образования Кыргызско-Российский Славянский университет

имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта

Фонд
оценочных средств

по дисциплине «Вычислительная механика»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»

Квалификация

бакалавр

2026 г.

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг», по программе бакалавриата КРСУ в соответствии с ФГОС 3++ по дисциплине «Вычислительная механика».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании

Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта

протокол № 1 от «2 » сентября 2026 г.

Руководитель подразделения

_____ Алсеитов Мирлан Тилегенович
подпись *расшифровка подписи*

Исполнители

к.ф.-м.н. _____ Герман Константин Анатольевич
должность *подпись* *расшифровка подписи*

к.т.н. _____ Джаманкулов Азамат Кенешбекович
должность *подпись* *расшифровка подписи*

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель директора по образовательной деятельности
Политехнического института

_____ Комарцов Никита Михайлович
личная подпись расшифровка подписи

Содержание

1 Перечень компетенций и этапы их формирования

2 Технологическая карта дисциплины

3 Типовые контрольные задания и оценочные материалы

4 Процедуры и критерии оценивания

5 Методические указания для обучающихся

Приложение 1 Дополнительные тренировочные материалы

Сведения о дисциплине

Показатель	Сведения
Наименование и индекс	Вычислительная механика. Цикл Б1.В.1.ДВ.03. Индекс Б1.В.1.ДВ.03.01 в пункте 2.2.1 относится к названной там дисциплине «Численные методы в прикладной механике». Отдельный индекс для «Вычислительной механики» в разделе 2 не указан.
Программа	15.03.03 — РФ, 650500 — КР, «Прикладная механика». Профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг». Бакалавриат, очная форма.
Периоды	6-й семестр, 3-й курс, 16 недель, зачёт. 7-й семестр, 4-й курс, 18 недель, экзамен. Всего 252 ч, 7 ЗЕТ.
Основание	РПД от 03.09.2026, учебный план от 26.06.2026, протокол № 11. РПД одобрена 02.09.2026, протокол № 1, срок действия 2026–2032 уч. гг.
Исполнители	к.ф.-м.н. Герман Константин Анатольевич и к.т.н. Джаманкулов Азамат Кенешбекович, составители РПД.

1 Перечень компетенций и этапы их формирования

ПК-2. Готовностью выполнять научно-исследовательские работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий, широко распространённых в промышленности систем мирового уровня и экспериментального оборудования для проведения механических испытаний.

Уровень 1	Требование РПД	Средства
Знать	Основные направления и специфику выполнения расчетно-экспериментальных работ с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий в области прикладной механики.	В1–40, Т1–10
Уметь	Выполнять расчетно-экспериментальные работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий.	ПР1–16, РК1–2, З1–8
Владеть	Методами проведения расчетно-экспериментальных работ в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий.	ПР1–16 и РГЗ1–2 с защитой

6-й семестр формирует основы численного решения и конечно-разностного расчёта. 7-й семестр развивает эти умения в задачах динамики, МКЭ и МГЭ. Текущие работы проверяют отдельные действия, РК — письменное решение двух задач, зачёт и экзамен — итоговое применение методов. Проверяется вычислительная часть ПК-2, включая численный эксперимент. Работа на высокопроизводительной системе и механические испытания с оборудованием отдельными средствами дисциплины не предусмотрены.

Пункт	Результат обучения	Семестр и задания
3.1.1	основные понятия, методы и задачи вычислительной механики	6–7: В1–3, В23, В40, ПР1, ПР16
3.1.2	принципы построения математических и численных моделей механических систем	6–7: В13–16, В31–33, ПР5, ПР11
3.1.3	основные численные методы решения задач механики	6–7: В4–12, В25–30, ПР2–4, ПР9–10
3.1.4	основы метода конечных элементов и области его применения	7: В31–38, ПР11–15, З7–8
3.1.5	методы расчёта напряжений, деформаций, перемещений, устойчивости и динамических характеристик конструкций	6–7: В17–21, В24–28, ПР6–7, ПР9, ПР12–14, РГЗ1–2[1]
3.1.6	методы оценки точности, сходимости и достоверности численных результатов	6–7: В22–24, В38, ПР1, ПР8, ПР15
3.2.1	формулировать расчетную задачу и выбирать адекватную математическую модель механического объекта	6–7: ПР2, ПР6–7, ПР12, З1, З4, РГЗ1–2
3.2.2	выбирать численный метод и обосновывать его применение для решения инженерной задачи	6–7: ПР3–4, ПР8–10, ПР15–16
3.2.3	создавать расчетные модели механических конструкций и задавать граничные условия и нагрузки	6–7: ПР5–7, ПР11, ПР14, РГЗ1–2

Пункт	Результат обучения	Семестр и задания
3.2.4	выполнять численные расчеты напряжённо-деформированного состояния, устойчивости и динамики конструкций	6–7: ПР6–7, ПР9, ПР12–14, З5, З8, РГЗ1–2[1]
3.2.5	анализировать и визуализировать результаты вычислений	6–7: ПР4, ПР8–9, ПР14, РГЗ1–2
3.2.6	оценивать погрешность и достоверность полученных результатов и формулировать инженерные выводы	6–7: ПР1, ПР5, ПР8, ПР14–16, РГЗ1–2
3.3.1	методами математического и численного моделирования механических объектов и процессов	6–7: ПР6–7, ПР9–10, ПР14, РГЗ1–2
3.3.2	навыками применения метода конечных элементов при решении задач прикладной механики	7: ПР11–15, З7–8, РГЗ2
3.3.3	навыками работы с современными программными комплексами вычислительной механики	6–7: ПР3–5, ПР9, ПР14–16, РГЗ1–2
3.3.4	методами анализа и интерпретации результатов численного моделирования	6–7: ПР1, ПР8–9, ПР14–16, РГЗ1–2
3.3.5	навыками верификации и оценки достоверности расчетных моделей и результатов вычислений	6–7: ПР5, ПР8, ПР13–16, РГЗ1–2

[1] Средства подтверждают расчёт напряжений, деформаций, перемещений и динамики. Самостоятельный расчёт потери устойчивости конструкции отсутствует в тематике и заданиях РПД. В приложении 1 для него предусмотрены тренировочные задания ДЗ7 и ДК2. Устойчивость численного алгоритма оценивается по ПР4, ПР9 и З5.

2 Технологическая карта дисциплины

Часы	6-й	7-й	Всего
Лекции	18	16	34
Практические занятия	36	34	70
Иная контактная работа в период обучения	0,1	2	2,1
Контактная работа в сессию	—	0,3	0,3
Контактная работа всего	54,1	52,3	106,4
СРС	53,9	60	113,9
Часы на контроль	—	31,7	31,7
Общая трудоёмкость	108	144	252

В практические часы каждого семестра входят 2 ч интерактивной работы и 2 ч практической подготовки. Это одни и те же часы по ПР8 и ПР10 соответственно.

Сем.	Модуль	Лекции	Л / ПР / СРС	Контроль
6	1 Надёжность вычислений	1.1, 1.3, 1.5, 1.7	8 / 16 / 24	ПР1–4, В1–12
6	2 МКР в механике	2.1, 2.3, 2.5, 2.7	10 / 20 / 29,9	ПР5–8, В13–24, РГЗ1, РК1
7	3 Дифференциальные и нелинейные задачи	3.1, 3.3	4 / 10 / 14	ПР9–10, В25–30
7	4 МКЭ в плоской упругости	4.1, 4.3, 4.5, 4.7	8 / 16 / 31	ПР11–14, В31–38, РГЗ2, РК2
7	5 Граничные методы и выбор технологии	5.1, 5.3	4 / 8 / 15	ПР15–16, В39–40

Средство	6-й семестр	7-й семестр	Баллы	Срок
ПР	ПР1–8	ПР9–16	0–40	После темы, 0–5 за каждую работу
РГЗ	РГЗ1	РГЗ2	0–10	До аттестации, включая защиту
РК	РК1	РК2	0–10	После лекции 8 и 14 соответственно
Аттестация	Зачёт	Экзамен	0–40	По расписанию
Семестровый рейтинг	Самостоятельный	Самостоятельный	0–100	Сумма четырёх строк

РК1 проводится в рамках ПР8. РК2 проводится после лекции о линейном треугольнике (пункт 4.5 РПД), в рамках ПР13. Точные даты объявляются в начале семестра. Диагностические ответы в рейтинг отдельно не включаются. Баллы каждого семестра подсчитываются отдельно.

3 Типовые контрольные задания и оценочные материалы

Блок А Проверка знаний

В1–В24 относятся к зачёту, В25–В40 — к экзамену. При экзамене вопросы первого семестра могут использоваться для уточнения обоснования решателя и анализа ошибок.

В1. Чем отличаются ошибка математической модели, дискретизации и решения линейной системы?

В2. Почему малая невязка не всегда означает малую ошибку решения?

В3. Как влияет масштабирование переменных на интерпретацию относительных допусков?

В4. Какие условия обеспечивают существование корня и сходимость бисекции?

В5. Чем метод секущих отличается от метода хорд с фиксированным концом?

В6. Когда метод Ньютона теряет квадратичную сходимость и как ограничить его шаг?

В7. Зачем в исключении Гаусса выбирать главный элемент?

В8. Когда LU разложение можно повторно использовать для новой нагрузки?

В9. Какие свойства матрицы требуются методу Холецкого?

В10. Как определяются итерационные формулы Якоби и Зейделя?

В11. Как связан спектральный радиус итерационной матрицы со сходимостью?

В12. Для каких матриц допустим стандартный метод сопряженных градиентов?

В13. Как из ряда Тейлора получить центральную разность второй производной?

В14. Как вводятся условия Неймана и почему важен порядок граничной аппроксимации?

В15. Что требуется для разрешимости чистой задачи Неймана?

В16. Как получается пятиточечная схема уравнения Пуассона?

В17. Каков физический смысл функции напряжений Прандтля?

В18. Как по функции Прандтля вычисляются напряжения и крутящий момент?

В19. Какие условия задаются на оси симметрии при расчете кручения?

В20. Какие две граничные связи нужны при изгибе пластины?

В21. Чем шарнирное опирание прямой стороны отличается от защемления?

В22. Как оценить наблюдаемый порядок по трем сеткам?

В23. В каких случаях сгущение сетки не улучшает результат?

В24. Почему напряжения могут сходиться медленнее перемещений?

В25. Как преобразуется уравнение колебаний в систему первого порядка?

В26. Чем локальная погрешность шага отличается от глобальной погрешности интегрирования?

В27. Почему явный Эйлер непригоден для длительного расчета незатухающих колебаний с постоянным шагом?

В28. Какова роль шага в устойчивости и точности метода Рунге — Кутты?

В29. В чем заключается метод стрельбы и как проявляется его чувствительность?

В30. Как строится Якобиан дискретной нелинейной краевой задачи?

В31. Какие условия называются существенными и естественными в слабой постановке?

В32. Как связаны слабая форма задачи и метод Галеркина?

В33. Как выбирается плоское напряженное или плоское деформированное состояние?

В34. Почему в матрице B нужно согласовать инженерную сдвиговую деформацию с матрицей упругости?

В35. Какие свойства имеют функции формы линейного треугольника?

В36. Почему матрица жесткости отдельного свободного треугольника вырождена?

В37. Как вычисляются узловые реакции после исключения закрепленных степеней свободы?

В38. Что проверяет тест постоянной деформации и чего он не доказывает?

В39. Почему в МГЭ снижается размерность дискретизации, но возникает плотная матрица?

В40. Какие проверки и исходные данные должны входить в паспорт инженерного расчета?

Тестовые задания

В каждом вопросе выберите один ответ. Т1–Т5 используются в зачёте, Т6–Т10 — в экзамене. На комплект отводится 8 минут в рамках общего времени. Верный одиночный выбор приносит 1 балл, пустой, неверный или множественный ответ — 0.

Т1. Каков порядок центральной разности второй производной на равномерной сетке для достаточно гладкой функции?

А первый; Б второй; В третий.

Т2. Что гарантирует сходимость бисекции для непрерывной функции с разными знаками на концах интервала?

А сохранение интервала с корнем; Б положительность производной; В положительная определенность.

Т3. Зачем контролируют обусловленность СЛАУ?

А для определения единиц длины; Б для выбора цвета графика; В для оценки чувствительности решения.

Т4. Какое условие требуется стандартному методу сопряженных градиентов?

А произвольная прямоугольная матрица; Б симметричная положительно определенная матрица; В нулевая диагональ.

Т5. Что задается на оси симметрии четной гладкой функции Прандтля?

А нулевая нормальная производная; Б обязательно нулевое значение функции; В заданный прогиб пластины.

Т6. Какова глобальная точность классического RK4 для гладкой задачи при устойчивом выборе шага?

А $O(h)$; Б $O(h^2)$; В $O(h^4)$.

Т7. Какие граничные условия в слабой форме называют существенными?

А предписанные перемещения; Б заданные поверхностные силы; В только свободные края.

Т8. Как распределены деформации в линейном треугольнике при линейной кинематике?

А квадратично; Б постоянны внутри элемента; В всегда равны нулю.

Т9. Почему система свободного упругого тела вырождена?

А из-за наличия движений жесткого тела; Б из-за выбора единиц СИ; В потому что любая матрица жесткости нулевая.

Т10. Какова типичная особенность классического МГЭ для линейной однородной задачи?

А объемная сетка обязательна и матрица диагональная; Б сетка только по времени; В дискретизируется граница и матрица обычно плотная.

Блок В Расчётные задачи и практические работы

31 Нелинейная пружина

При силе 3 Н закон силы пружины имеет вид $F(u) = u + u^3$, где численное значение u задано в мм и коэффициенты согласованы с этими единицами. Найти равновесие на [0; 2] мм бисекцией и методом Ньютона до абсолютной невязки 10^{-6} Н. Для Ньютона начать с 1 мм. Сравнить критерии остановки.

32 Прямой и итерационный методы

Решить СЛАУ методом Гаусса и методом Зейделя из нулевого приближения до относительной невязки 10^{-6}. Объяснить достаточное условие сходимости. $4x - y = 2$; $-x + 4y - z = 4$; $-y + 3z = 7$

33 Узловое уравнение Пуассона

На единичном квадрате решить $-\Delta u = 4$ при $u = 0$ на границе, шаг $h = 0{,}5$. Записать уравнение единственного внутреннего узла. Объяснить, почему это только грубое сеточное приближение.

34 Изгиб шарнирно опертой пластины

В безразмерных координатах единичного квадрата задана жесткость $D = 1$ и нагрузка $q = 4\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Задать условия шарнирного опирания прямых сторон, найти и проверить точное решение и наметить разностный алгоритм через два уравнения Пуассона.

35 Устойчивость шага и колебания

Для $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ построить систему первого порядка. Выполнить один шаг явного Эйлера с $h = 0{,}1$, вычислить энергию и объяснить поведение при длительном интегрировании.

36 Нелинейная краевая задача

На $[0; 1]$ решить $-u'' + u^3 = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, где $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \sin^3(\pi x)$. Составить разностную невязку и Якобиан, описать шаг Ньютона и проверить решение на двух сетках.

37 Стержень из двух конечных элементов

Стержень длиной 2 м закреплен слева, справа приложена осевая сила 1000 Н. Осевые жесткости одинаковых по длине элементов: $EA = 10^6$ Н. Найти перемещения трех узлов, реакцию и продольные силы.

38 Линейный треугольник

Заданы узлы (0;0), (1;0), (0;1) м и перемещения $u = 0{,}001x$, $v = -0{,}0003y$. Для плоского напряженного состояния $E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}3$ найти функции формы, постоянные деформации и напряжения. Пояснить проверку жесткого перемещения.

Практические работы

ПР1–8 выполняются в 6-м семестре, ПР9–16 — в 7-м. Данные ниже конкретизируют содержание занятий РПД. Для каждой работы представьте исходные данные, ход расчёта, воспроизводимый файл, проверку и вывод.

ПР1 Погрешность и обусловленность

Пункт РПД 1.2. Аудиторный объём 4 ч. Для $A_1 = [[4,-1,0],[-1,4,-1],[0,-1,3]]$ и $A_2 = [[1,1],[1,1,0001]]$ взять x^* из единиц и $b = Ax^*$. Для обеих систем исследовать $\delta b = 10^{-6} e_2$ и приближение $x^* + 10^{-3}(e_1 - e_2)$. Вычислить κ_∞, относительные ошибку и невязку, показать эффект возмущения.

ПР2 Нелинейная пружина

Пункт РПД 1.4. Аудиторный объём 4 ч. Выполнить З1. Для обоих методов ограничить число шагов 100, сохранять журнал. Бисекцию начать с середины отрезка, для Ньютона учитывать исходное приближение отдельно. Сопоставить остановку по невязке и по ширине интервала или изменению u.

ПР3 Прямые решатели и повторные нагрузки

Пункт РПД 1.6. Аудиторный объём 4 ч. Для матрицы ПР1 A_1 решить две задачи с правыми частями (2,4,7) и (1,0,1). Построить LU с частичным выбором ведущего элемента и переиспользовать множители. Сравнить с Холецким, обосновать его применимость.

ПР4 Итерационные методы

Пункт РПД 1.8. Аудиторный объём 4 ч. Для матрицы A_1 и первой правой части ПР3 сравнить Якоби, Зейделя, SOR при $\omega = 1{,}2$ и библиотечный CG. Старт нулевой, допуск $\|b - Ax\|_2 / \|b\|_2 \le 10^{-8}$, предел 500 шагов. Построить график невязки, оценить спектральные радиусы Якоби и Зейделя.

ПР5 Разностное решение Пуассона

Пункт РПД 2.2. Аудиторный объём 4 ч. На единичном квадрате решить $-\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$, $u = 0$ на границе, на сетках $N \times N$ интервалов при $N = 4, 8, 16$. Сравнить с $u^* = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Вывести пятиточечную схему, указать число неизвестных и максимум узловой ошибки.

ПР6 Кручение прямоугольного бруса

Пункт РПД 2.4. Аудиторный объём 4 ч. Взять a = 0,02 м, b = 0,03 м, G = 80 ГПа, θ = 0,01 рад/м. Использовать постановку и контрольные точки РГЗ1 на сетке 8×12. Представить поле, касательные напряжения и момент. Проверить симметрию и размерности.

ПР7 Изгиб пластины

Пункт РПД 2.6. Аудиторный объём 4 ч. Для З4 на сетках N = 4, 8, 16 решить две задачи Пуассона. Для выбранного знака вспомогательной переменной записать обе системы. Дать значения прогиба в центре, ошибки и вывод о сходимости.

ПР8 Исследование сходимости МКР

Пункт РПД 2.8. Аудиторный объём 8 ч. Для ПР5 взять N = 8, 16, 32. Сравнить значения в центре, оценить порядок по трём сеткам и экстраполировать результат. Сопоставить прямой решатель и CG с допусками 10^{-3} и 10^{-9}. Объяснить, почему один собственный мод сетки может не выявить влияния допуска. Повторить сравнение с f, дополненной 0,1 на каждом внутреннем узле. Командное обсуждение 2 ч, отчёт индивидуальный.

ПР9 Численное интегрирование колебаний

Пункт РПД 3.2. Аудиторный объём 4 ч. Решить $u'' + u = 0$ с данными З5 на $0 \le t \le 20$ методом Эйлера и RK4. Взять h = 0,2; 0,1; 0,05. Сравнить с (cos t, −sin t). Построить графики энергии и фазовой ошибки, указать ошибку на t = 20.

ПР10 Колебания и нелинейная краевая задача

Пункт РПД 3.4 и 3.5. Аудиторный объём 6 ч. За 4 ч продолжить ПР9 на $u'' + 0{,}2u' + u = 0$ с теми же начальными данными. Для стрельбы на [0;1] взять u(0) = 1, u(1) = 0 и начальные наклоны 0 и −1, применить RK4 при h = 0,05. За 2 ч решить З6 на N = 8, 16, начиная с нуля. Обосновать демпфирование Ньютона, сверить Якобиан направленной разностью, остановка при $\|F\|_\infty \le 10^{-9}$. В части 3.4 предусмотрены 2 ч интерактивной практической подготовки.

ПР11 Стержень в МКЭ

Пункт РПД 4.2. Аудиторный объём 4 ч. Решить З7. Получить слабую форму, построить две локальные матрицы и глобальную систему. Проверить реакции и равенство $2U = Pu_2$.

ПР12 Два плоских состояния

Пункт РПД 4.4. Аудиторный объём 4 ч. Для E = 200 ГПа, ν = 0,3 и $(\varepsilon_x, \varepsilon_\gamma, \gamma_{x\gamma}) = (0{,}001; -0{,}0003; 0{,}0002)$ составить обе матрицы D и вычислить напряжения, включая σz для плоской деформации. Объяснить выбор модели полосы.

ПР13 Линейный треугольник

Пункт РПД 4.6. Аудиторный объём 4 ч. Для элемента З8 толщиной 0,005 м получить N_i, B, K_e и спектр. Проверить два переноса, малый поворот и поле З8. При расчёте использовать Па и м.

ПР14 Сборка полосы

Пункт РПД 4.8. Аудиторный объём 4 ч. Выполнить оба теста РГЗ2 на сетках 4×2 и 8×4 для L = 0,20 м, p = 1 МПа, остальных параметрах РГЗ2. Вывести реакции и среднее перемещение правого торца, сравнить энергию.

ПР15 МКР и скалярный МКЭ

Пункт РПД 5.2. Аудиторный объём 4 ч. Решить задачу ПР5 на N = 4, 8, 16 также скалярным МКЭ. Разбить каждую ячейку диагональю из нижнего левого в верхний правый угол. Для интеграла нагрузки взять три точки с барицентрическими координатами (2/3,1/6,1/6) и

перестановки, вес каждой $A_e/3$. Сопоставить ошибки, число неизвестных, ненулевых элементов и паспорт расчёта.

ПР16 Граничный метод для Лапласа

Пункт РПД 5.4. Аудиторный объём 4 ч. На квадрате $[0;1]^2$ задано $\Delta u = 0$, $u = x$ на границе. Разбить каждую сторону на $m = 2, 4, 8$ постоянных панелей. По алгоритму ниже восстановить нормальную производную q, u в точках (0,5; 0,5) и (0,25; 0,5), проверить суммарный поток и плотность матриц.

Алгоритм для ПР16

Пронумеруйте панели против часовой стрелки и возьмите точки коллокации в их серединах. Для каждой панели задайте длину ℓ, центр и внешнюю единичную нормаль n. На панели j значения u_j и $q_j = \partial u/\partial n$ постоянны. u_j берите по условию в центре.

Для пары точка x и источник y используйте $g(x,y) = -\ln|x-y|/(2\pi)$ и $\partial g/\partial n_\gamma = -(y-x)\cdot n_\gamma/(2\pi|x-y|^2)$. В G_{ij} и H_{ij} внесите интегралы этих ядер по панели j. Для $i \neq j$ используйте квадратуру Гаусса на отрезке с 16 узлами. Для $i = j$ внесите $G_{ii} = \ell[1-\ln(\ell/2)]/(2\pi)$ и $H_{ii} = 1/2$ с учётом свободного члена.

Решите $Gq = Hu$. Для внутренней точки x сформируйте две строки интегралов с той же квадратурой, без свободного члена. Вычислите u(x) как разность потенциалов G(x)q и H(x)u. Сравните q с нормальной производной заданного линейного поля, u — с точным полем. Сохраните невязку, поток $\Sigma q_j \ell_j$ и долю ненулевых элементов. Углы не используются как точки коллокации.

Рубежные контрольные работы

РК1 Письменная работа

Время 90 минут. Разрешён непрограммируемый калькулятор. Представьте вывод формул, вычисления и проверку. Каждая задача оценивается из 5 баллов.

З2. Решить СЛАУ методом Гаусса и методом Зейделя из нулевого приближения до относительной невязки 10^{-6}. Объяснить достаточное условие сходимости. 4x - y = 2; -x + 4y - z = 4; -y + 3z = 7

З3. На единичном квадрате решить $-\Delta u = 4$ при $u = 0$ на границе, шаг $h = 0,5$. Записать уравнение единственного внутреннего узла. Объяснить, почему это только грубое сеточное приближение.

РК2 Письменная работа

Время 90 минут. Разрешён непрограммируемый калькулятор. Представьте вывод формул, вычисления и проверку. Каждая задача оценивается из 5 баллов.

З5. Для $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ построить систему первого порядка. Выполнить один шаг явного Эйлера с $h = 0,1$, вычислить энергию и объяснить поведение при длительном интегрировании.

З8. Заданы узлы (0;0), (1;0), (0;1) м и перемещения $u = 0,001x$, $v = -0,0003y$. Для плоского напряженного состояния $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$ найти функции формы, постоянные деформации и напряжения. Пояснить проверку жесткого перемещения.

Блок C Расчётно-графические задания и защита

Номер n от 1 до 20 назначает преподаватель. В каждой строке ниже приведены индивидуальные значения. Для остальных параметров используйте условия соответствующего РГЗ.

n	a, м	b, м	L, м	p, МПа
1	0,021	0,0315	0,205	1,05
2	0,022	0,033	0,21	1,1
3	0,023	0,0345	0,215	1,15
4	0,024	0,036	0,22	1,2
5	0,025	0,0375	0,225	1,25
6	0,026	0,039	0,23	1,3
7	0,027	0,0405	0,235	1,35
8	0,028	0,042	0,24	1,4
9	0,029	0,0435	0,245	1,45
10	0,03	0,045	0,25	1,5
11	0,031	0,0465	0,255	1,55
12	0,032	0,048	0,26	1,6
13	0,033	0,0495	0,265	1,65
14	0,034	0,051	0,27	1,7
15	0,035	0,0525	0,275	1,75
16	0,036	0,054	0,28	1,8
17	0,037	0,0555	0,285	1,85
18	0,038	0,057	0,29	1,9
19	0,039	0,0585	0,295	1,95
20	0,04	0,06	0,3	2

РГЗ1 Кручение прямоугольного бруса

Для индивидуального варианта n от 1 до 20 задать $a = 0{,}02 + 0{,}001n$ м, $b = 1{,}5a$, $G = 80$ ГПа, интенсивность закручивания $\theta = 0{,}01$ рад/м. Область сечения: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Решить задачу функции напряжений с нулевым значением на границе.

$-\Delta\varphi = 2G\theta$; $\tau_x z = \partial\varphi/\partial y$; $\tau_y z = -\partial\varphi/\partial x$; $T = 2\iint \varphi \, dA$

Использовать вложенные прямоугольные сетки с числом интервалов (8,12), (16,24), (32,48). Найти крутящий момент и напряжения в одинаковых физических контрольных точках; сравнить жесткость T/θ. Не подменять исследование сходимости сравнением максимумов в разных узлах.

Проверки: симметрия функции, знак положительного крутящего момента, размерности φ в Н/м, напряжений в Па и T в Н·м; относительная невязка не выше 10^{-8} либо доказанное отсутствие влияния итерационного допуска на вывод о сетке.

Проверить реализацию на круглом сечении с известной функцией либо отдельным гладким тестом Пуассона; при использовании теста он не считается эталоном прямоугольного сечения.

Представить постановку, схему сетки, описание граничных условий, алгоритм, файл вычислений, таблицу трех сеток, поля функции и напряжений, вывод о точности. Защита: объяснить отличие невязки от погрешности и восстановить одну компоненту напряжений.

Зафиксируйте C = (a/2,b/2), P = (a/2,b/4) и Q = (a/4,b/2). В C представьте φ, в P и Q обе компоненты напряжений. Примените центральные разности во внутренних узлах и составное правило трапеций для T.

РГЗ2 Плоская упругая полоса

Для варианта n: длина L = 0,20 + 0,005n м, высота H = 0,10 м, толщина t = 0,005 м, E = 200 ГПа, ν = 0,3. Плоское напряженное состояние; на правом торце равномерная растягивающая нагрузка p = (1 + 0,05n) МПа; верхняя и нижняя стороны свободны. На левой стороне задать только u = 0; в нижнем левом углу дополнительно v = 0. Это закрепление допускает однородное поперечное сжатие и исключает жесткие движения.

Построить сетки прямоугольных ячеек 4 × 2, 8 × 4, 16 × 8 с разбиением каждой ячейки на два линейных треугольника. Собрать матрицу, согласованный вектор нагрузки, решить систему, восстановить деформации, напряжения и реакции. Отдельно проверить случай жесткого переноса на одном элементе.

Для исследования сеточной сходимости выполнить второй расчет той же полосы: слева задать u = v = 0 по всей стороне, справа приложить равномерную касательную нагрузку q = p/10 по вертикали. Сравнить среднее вертикальное перемещение правого торца и энергию на трех сетках. В точках углов закрепления не использовать пиковые напряжения как критерий сходимости. Проверить баланс вертикальных сил и моментов.

Представить постановки двух тестов, сетки, таблицы сравнения, файл расчета, баланс сил и моментов, графики перемещений и вывод о роли закреплений. Защита: объяснить матрицу B, выбор плоского состояния и причину вырожденности незакрепленной модели.

Каждую прямоугольную ячейку разделите диагональю из нижнего левого в верхний правый угол. Во втором тесте касательная нагрузка направлена вдоль +y. Момент считайте относительно нижнего левого угла. Среднее перемещение правого торца определите интегрированием по его длине.

Блок D Промежуточная аттестация

В каждом билете два теоретических вопроса, одна расчётная задача и комплект тестов из блока A. Теория — до 20 баллов, задача — до 15, тесты — до 5. Для большой сеточной задачи на аттестации достаточно корректной схемы, системы и описания проверок.

Билет 1 6-й семестр Зачёт

B2. Почему малая невязка не всегда означает малую ошибку решения?

B13. Как из ряда Тейлора получить центральную разность второй производной?

З1. При силе 3 Н закон силы пружины имеет вид $F(u) = u + u^3$, где численное значение u задано в мм и коэффициенты согласованы с этими единицами. Найти равновесие на [0; 2] мм бисекцией и методом Ньютона до абсолютной невязки 10^{-6} Н. Для Ньютона начать с 1 мм. Сравнить критерии остановки.

Тесты T1–T5 из блока A.

Билет 2 6-й семестр Зачёт

В7. Зачем в исключении Гаусса выбирать главный элемент?

В17. Каков физический смысл функции напряжений Прандтля?

З2. Решить СЛАУ методом Гаусса и методом Зейделя из нулевого приближения до относительной невязки 10^{-6}. Объяснить достаточное условие сходимости. $4x - y = 2$; $-x + 4y - z = 4$; $-y + 3z = 7$

Тесты Т1–Т5 из блока А.

Билет 3 6-й семестр Зачёт

В11. Как связан спектральный радиус итерационной матрицы со сходимостью?

В20. Какие две граничные связи нужны при изгибе пластины?

З3. На единичном квадрате решить $-\Delta u = 4$ при $u = 0$ на границе, шаг $h = 0{,}5$. Записать уравнение единственного внутреннего узла. Объяснить, почему это только грубое сеточное приближение.

Тесты Т1–Т5 из блока А.

Билет 4 6-й семестр Зачёт

В18. Как по функции Прандтля вычисляются напряжения и крутящий момент?

В22. Как оценить наблюдаемый порядок по трем сеткам?

З4. В безразмерных координатах единичного квадрата задана жесткость $D = 1$ и нагрузка $q = 4\pi^4 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Задать условия шарнирного опирания прямых сторон, найти и проверить точное решение и наметить разностный алгоритм через два уравнения Пуассона.

Тесты Т1–Т5 из блока А.

Билет 1 7-й семестр Экзамен

В26. Чем локальная погрешность шага отличается от глобальной погрешности интегрирования?

В33. Как выбирается плоское напряженное или плоское деформированное состояние?

З5. Для $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ построить систему первого порядка. Выполнить один шаг явного Эйлера с $h = 0{,}1$, вычислить энергию и объяснить поведение при длительном интегрировании.

Тесты Т6–Т10 из блока А.

Билет 2 7-й семестр Экзамен

В29. В чем заключается метод стрельбы и как проявляется его чувствительность?

В35. Какие свойства имеют функции формы линейного треугольника?

З6. На $[0; 1]$ решить $-u'' + u^3 = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, где $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \sin^3(\pi x)$. Составить разностную невязку и Якобиан, описать шаг Ньютона и проверить решение на двух сетках.

Тесты Т6–Т10 из блока А.

Билет 3 7-й семестр Экзамен

В31. Какие условия называются существенными и естественными в слабой постановке?

В39. Почему в МГЭ снижается размерность дискретизации, но возникает плотная матрица?

З7. Стержень длиной 2 м закреплен слева, справа приложена осевая сила 1000 Н. Осевые жесткости одинаковых по длине элементов: $EA = 10^6$ Н. Найти перемещения трех узлов, реакцию и продольные силы.

Тесты Т6–Т10 из блока А.

Билет 4 7-й семестр Экзамен

В37. Как вычисляются узловые реакции после исключения закрепленных степеней свободы?

В40. Какие проверки и исходные данные должны входить в паспорт инженерного расчета?

З8. Заданы узлы (0;0), (1;0), (0;1) м и перемещения $u = 0{,}001x$, $v = -0{,}0003y$. Для плоского напряженного состояния $E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}3$ найти функции формы, постоянные деформации и напряжения. Пояснить проверку жесткого перемещения.

Тесты Т6–Т10 из блока А.

4 Процедуры и критерии оценивания

Диагностика проводится устно в течение 3–5 минут на занятии либо письменно по отдельным тестам. Преподаватель фиксирует, верно ли указаны метод, ограничение применимости и способ проверки. Диагностические результаты служат обратной связью.

ПР выполняются в аудитории и в отведённые часы СРС. Допустимы конспект, документация и вычислительная среда из РПД. Защита занимает до 5 минут в пределах соответствующих занятий или консультации. Студент запускает файл и поясняет одну формулу и независимую проверку.

Критерий ПР	Условие полного балла
Постановка	Исходные данные, единицы, модель и ограничения заданы согласованно.
Алгоритм	Расчёт воспроизводим, уравнения и операции корректны.
Результат	Искомые величины приведены в нужных единицах и согласованы с моделью.
Проверка	Выполнено независимое сравнение, проверен баланс или исследована сетка.
Защита	Обучающийся объясняет ход расчёта и ограничения вывода.

За каждый критерий ПР ставится 1 балл за полное выполнение, 0,5 за частичное выполнение с исправимыми пробелами, 0 за отсутствие результата или принципиальную ошибку. Исправленная работа проверяется по тем же критериям.

К письменной РК допускаются все обучающиеся независимо от посещаемости и выполнения других работ. На каждую задачу отводится ориентировочно 45 минут. Оценка за задачу: постановка 0–1, алгоритм 0–2, вычисления 0–1, проверка 0–1. За алгоритм ставится 1 при верной схеме с пробелом и 2 за завершённую применимую последовательность. В критериях из одного балла 1 ставится за выполнение и 0 за отсутствие или существенную ошибку. Ошибка переноса числа учитывается в критерии, где она возникла. Компьютерная проверка возможна после сдачи.

Критерий РГЗ	Наблюдаемый результат
Постановка	Геометрия, нагрузка, условия и единицы соответствуют варианту.
Алгоритм	Файл запускается, дискретизация, сборка и решатель воспроизводимы.
Проверка	Эталон, невязка, симметрия, баланс сил или моментов проверены согласно условию.
Сетки	Три сетки сопоставлены по одинаковым величинам, вывод учитывает ограничения.
Отчёт и защита	Есть паспорт, таблицы и графики, обучающийся объясняет расчёт самостоятельно.

По каждому критерию РГЗ выставляются 0, 1 или 2 балла за отсутствие или принципиальную ошибку, частичное и полное выполнение соответственно. Условие принятия по РПД — от 6 из 10 при ненулевых баллах за алгоритм и проверку. РГЗ выполняется в СРС, защищается индивидуально до аттестации, ориентир 5–7 минут в рамках занятий или консультации. Допустимы вычислительная среда, конспект и справочные материалы с указанием источников. Доработка допускается.

Зачёт и экзамен

По РПД на подготовку отводится 60 минут, на устный ответ — до 15 минут. Контактные нормативы составляют 0,1 акад. ч на зачёт и 0,3 акад. ч на экзамен. Для согласования предложена единая письменная подготовка 60 минут, включая 8 минут на тесты, с уточнениями до 4 минут на зачёте и до 12 минут на экзамене. Письменное время планируется в рамках СРС на зачёте и часов контроля на экзамене без увеличения трудоёмкости. До согласования действует процедура, установленная РПД и расписанием.

Допускается непрограммируемый калькулятор. На письменной части фиксируют ответы на тесты, два теоретических ответа и расчётную задачу. Тесты выполняются одновременно. При устном уточнении оценивается тот же ответ в пределах того же критерия.

Часть	**Критерий**	**Баллы**
Теория, за вопрос	Корректность понятий	0–3
Теория, за вопрос	Метод и применимость	0–4
Теория, за вопрос	Пример или проверка	0–3
Задача	Постановка	0–3
Задача	Алгоритм	0–5
Задача	Вычисления или дискретная система	0–4
Задача	Проверка и вывод	0–3
Тесты	Один верный ответ на вопрос	0–5

Для критериев с максимумом 3, 4 или 5: 0 — отсутствует или принципиально неверно, 1 — верен один существенный шаг, 2 — верна основа, но пропущены существенные детали. Для максимума 4 или 5 оценка 3 означает рабочий результат с заметным недочётом. Для максимума 5 оценка 4 означает рабочий результат с небольшим недочётом. Максимум выставляется за полный, корректный и обоснованный результат.

Итог равен сумме баллов ПР, РГЗ, РК и аттестации. Рабочие баллы сохраняются с шагом 0,5. Для применения целочисленной шкалы предлагается округлять только итог один раз: 0,5 вверх. Экзамен по Положению: 85–100 «отлично», 70–84 «хорошо», 60–69 «удовлетворительно», менее 60 «неудовлетворительно». Для зачёта предложено согласовать порог 60 баллов. Статус принятия РГЗ фиксируется отдельно.

5 Методические указания для обучающихся

СРС по РПД	Объём	План работы
1.9	24 ч	ПР1–4. Сначала классификация ошибок и пример с возмущением, затем журналы поиска корня и решения систем.
2.9	29,9 ч	ПР5–8, РГЗ1. Постановка и границы, независимый тест, три сетки и сравнение крутильной жёсткости.
3.6	14 ч	ПР9–10. Графики энергии и фазы, проверка Якобиана, различие шага и допуска.
4.9	31 ч	ПР11–14, РГЗ2. Слабая форма, сборка и закрепления, тест постоянной деформации, сетки и баланс.
5.5	15 ч	ПР15–16. Сравнение объёмной и граничной моделей, паспорт и область применимости.

Перед расчётом запишите физические предположения, уравнение и граничные условия. Проверьте одну строку матрицы вручную. Укажите абсолютный или относительный допуск, норму невязки и предельное число шагов. В отчёте отделите вычислительную ошибку от ограничения математической модели.

Для сеточных работ сопоставляйте одни и те же точки или интегральные характеристики. Сохраняйте параметры сеток, единицы, реакции и энергию. Для CST проверьте порядок узлов, положительную площадь, инженерный сдвиг и свободные перемещения. При вырождении сначала проверьте связность и закрепления.

Паспорт расчёта включает постановку, допущения, данные, единицы, сетку, алгоритм, допуски, программу и версию, команду запуска, контрольные величины и вывод. Используйте одну среду из РПД: Python с NumPy, SciPy и Matplotlib, GNU Octave, MATLAB или Mathcad Prime. На аттестацию подготовьте определения, условия применимости методов и краткое обоснование проверки.

Источники заданий и методики

Рабочая программа «Вычислительная механика», КРСУ, 03.09.2026, разделы 3–6 и 8. Вопросы, тесты, задачи, РГЗ и состав билетов основаны на её оценочных материалах. Наборы данных ПР и алгоритм ПР16 конкретизированы для ФОС. Критерии и процедуры сопоставлены с Положением о фонде оценочных средств КРСУ. Дополнительный источник — приложенный «Фонд оценочных средств по вычислительной механике» (Vychislitelnaya_mehanika_FOS.docx).

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.

Приложение 1 Дополнительные тренировочные материалы

Материалы адаптированы из приложенного ФОС по вычислительной механике. Используйте их для самостоятельной проверки и разбора на консультации. Баллы рубрик здесь предназначены для самопроверки, в семестровый рейтинг не входят.

Дополнительные вопросы

От инженерного объекта к расчётной модели

ДВ1. Какие допущения позволяют заменить деталь стержнем, плоским телом или объёмной моделью?

ДВ2. Какие данные нужны для воспроизводимого расчёта и как разграничить источники ошибок?

Краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела

ДВ3. Как связаны равновесие, кинематика и определяющее соотношение в задаче упругости?

ДВ4. Как получить слабую форму для стержня и какие граничные условия возникают естественно?

Конечные разности для одномерной краевой задачи

ДВ5. Как вывести центральную разностную формулу второй производной и оценить её порядок?

ДВ6. Как задать концевую силу в разностной схеме и проверить решение на серии сеток?

Линейные системы в расчётах механических конструкций

ДВ7. Когда допустим метод сопряжённых градиентов и зачем нужен предобусловливатель?

ДВ8. Почему малая невязка может сочетаться с большой ошибкой решения?

Стержневой конечный элемент и сборка системы

ДВ9. Как получить и собрать матрицу жёсткости двухузлового стержневого элемента?

ДВ10. Как учитывать заданное ненулевое перемещение и восстанавливать реакции?

Расчёт плоских ферм и балок

ДВ11. Как преобразовать жёсткость стержня фермы из локальной системы в глобальную?

ДВ12. Чем отличаются неизвестные ферменного и балочного элементов и когда балочная модель теряет точность?

Плоская задача упругости и треугольный элемент

ДВ13. Как выбрать между плоским напряжённым состоянием и плоской деформацией?

ДВ14. Как восстановить напряжения линейного треугольника и учесть толщину?

Изопараметрические элементы и численное интегрирование

ДВ15. Каков смысл матрицы Якоби изопараметрического отображения?

ДВ16. Как искажение элемента и выбор квадратуры влияют на результат?

Верификация статического расчёта и сеточная сходимость

ДВ17. Как организовать сеточную проверку для перемещений и напряжений?

ДВ18. Как отличить концентрацию напряжений от сингулярности и выбрать контролируемую величину?

Выбор пространственной расчётной модели

ДВ19. По каким признакам выбирают объёмные элементы вместо оболочечной или плоской модели?

ДВ20. Как проверить передачу нагрузки и исключить искусственное упрочнение сопряжением?

Нелинейное равновесие и метод Ньютона

ДВ21. Как записать итерационный шаг Ньютона для нелинейного равновесия?

ДВ22. Какие причины несходимости проверяют до уменьшения шага нагрузки?

Упругопластический расчёт при монотонном нагружении

ДВ23. Чем отличаются модуль упругости, модуль упрочнения и касательный модуль диаграммы?

ДВ24. Как вычислить остаточную деформацию после упругой разгрузки?

Односторонний контакт без трения

ДВ25. Как записать условия одностороннего контакта без трения?

ДВ26. Как увеличение штрафной жёсткости влияет на проникновение и обусловленность?

Линейный анализ потери устойчивости

ДВ27. Как формируется спектральная задача линейной потери устойчивости?

ДВ28. Почему коэффициент критической нагрузки не равен универсальному запасу прочности реальной детали?

Собственные частоты и формы колебаний

ДВ29. Как записать задачу собственных колебаний и интерпретировать нормированную форму?

ДВ30. Чем отличаются согласованная и сосредоточенная массы и откуда берутся нулевые частоты?

Переходный динамический расчёт

ДВ31. Как задать начальные условия и выполнить шаг схемы Ньюмарка?

ДВ32. Чем отличаются устойчивость и точность интегрирования и как выбрать шаг по времени?

Валидация и организация вычислительного исследования

ДВ33. В чём различие верификации и валидации и что нужно для сравнения с измерениями?

ДВ34. Как исследовать чувствительность и обеспечить воспроизводимость параметрического расчёта?

Дополнительные тесты

ДТ1–ДТ10 и ДТ11–ДТ20 образуют два комплекта по 20 минут. Выберите ровно один ответ в каждом вопросе. За правильный одиночный выбор начисляется 1 первичный балл. Пустой, множественный или неверный ответ даёт 0.

Комплект 1

ДТ1. Какой набор образует полную краевую задачу линейной упругости?

А) Только форма детали и сетка Б) Только модуль упругости и сила В) Равновесие, кинематика, закон материала и граничные условия Г) Только допускаемое напряжение

ДТ2. Какое условие соответствует плоскому напряжённому состоянию в плоскости xy?

А) $\varepsilon z=0$ при произвольном σz Б) $\sigma z=\tau xz=\tau yz=0$ В) Все деформации равны нулю Г) $\sigma x=\sigma y=0$

ДТ3. При каком свойстве закреплённой линейной системы применим стандартный метод сопряжённых градиентов?

А) Симметрия и положительная определённость матрицы Б) Произвольная несимметричная матрица В) Любая вырожденная матрица Г) Наличие только диагональных элементов

ДТ4. Как изменяется осевая жёсткость EA/L стержня, если его длину увеличить вдвое при прочих равных?

А) Возрастает вдвое Б) Не меняется В) Возрастает вчетверо Г) Уменьшается вдвое

ДТ5. Какие узловые неизвестные имеет плоский балочный элемент Эйлера — Бернулли при изгибе?

А) Только осевое перемещение Б) Только давление В) Поперечный прогиб и угол поворота Г) Только напряжение Мизеса

ДТ6. Как распределены деформации в трёхузловом линейном треугольнике при стандартной постановке малых деформаций?

А) Постоянны внутри элемента Б) Обязательно равны нулю В) Всегда квадратичны Г) Зависят только от толщины

ДТ7. Что означает отрицательный определитель Якоби при ожидаемой положительной ориентации изопараметрического элемента?

А) Повышенную точность Б) Отсутствие напряжений В) Обязательную пластичность Г) Нарушение ориентации или недопустимую геометрию элемента

ДТ8. Как сравнивают напряжения при исследовании сеточной сходимости у гладкого концентратора?

А) Берут любой максимум в любом месте Б) Используют одну физическую точку или согласованную область и одинаковую процедуру извлечения В) Сравнивают только цветовые карты Г) Изменяют одновременно материал и сетку

ДТ9. Что непосредственно проверяет малая алгебраическая невязка?

А) Точность геометрической модели Б) Достоверность закона материала В) Удовлетворение дискретной системе с заданной точностью Г) Согласие с экспериментом

ДТ10. Когда центральная разность для второй производной имеет погрешность порядка h^2?

А) Для любого разрывного решения Б) Для достаточно гладкого решения на равномерной сетке во внутренних узлах В) Только при нулевой нагрузке Г) Только для одной фиксированной сетки

Комплект 2

ДТ11. Что используется в полной итерации Ньютона для равновесия?

А) Только матрица масс Б) Произвольная постоянная сила В) Только начальная жёсткость без невязки Г) Текущая касательная жёсткость и невязка сил

ДТ12. По какому модулю разгружается одномерная билинейная упругопластическая модель при упругой разгрузке?

А) По модулю упругости E Б) По нулевому модулю В) По плотности материала Г) Всегда по касательному модулю пластической ветви

ДТ13. Какая нормальная сила допустима в одностороннем контакте без сцепления?

А) Произвольное растяжение Б) Только касательная сила В) Сжимающая сила или ноль Г) Только отрицательная масса

ДТ14. Что обычно происходит при чрезмерном увеличении штрафной жёсткости контакта?

А) Всегда уменьшается время решения Б) Обязательно исчезает сеточная ошибка В) Контакт становится растягивающим Г) Проникновение уменьшается, но обусловленность может ухудшиться

ДТ15. Коэффициент потери устойчивости $\lambda=3$ получен для опорной силы 10 кН. Какова критическая сила этой линейной модели?

А) 3 кН Б) 30 кН В) 10/3 кН Г) 13 кН

ДТ16. Как записывается задача свободных колебаний без демпфирования?

А) $K\varphi=\omega^2 M\varphi$ Б) $K\varphi=\omega M\varphi$ без квадрата для круговой частоты В) $M\varphi=0$ для всех мод Г) $K+M=0$

ДТ17. Что означает амплитуда нормированной собственной формы?

А) Максимальный эксплуатационный прогиб Б) Обязательную амплитуду резонанса В) Абсолютную погрешность частоты Г) Масштаб выбранной нормировки

ДТ18. Как изменится частота одномассовой системы при увеличении массы вчетверо с неизменной жёсткостью?

А) Возрастёт вчетверо Б) Не изменится В) Уменьшится вдвое Г) Уменьшится вчетверо

ДТ19. Что следует из устойчивости схемы Ньюмарка с $\beta=1/4$ и $\gamma=1/2$ для линейной недемпфированной системы?

А) Любой шаг даёт точный отклик Б) Устойчивость не отменяет исследования точности по шагу времени В) Можно не задавать начальные условия Г) Динамическую задачу можно заменить статикой

ДТ20. Какое действие относится к валидации физической модели?

А) Сопоставление с измерениями с учётом их неопределённости Б) Повторный запуск того же файла В) Уменьшение только алгебраической невязки Г) Проверка имени выходного файла

Дополнительные расчётные задачи

Каждая задача оценивается из 20 тренировочных баллов. В каждой позиции рубрики полный балл означает верное решение с объяснением, половина — правильный способ с исправимой неточностью, 0 — отсутствие или принципиальную ошибку. Одна исходная арифметическая ошибка учитывается в месте её возникновения.

ДЗ1 Составной стержень

Два соосных участка последовательно соединены. Левый конец закреплён, к правому приложена растягивающая сила $F=30$ кН. Для первого участка $L1=600$ мм, $A1=300$ мм²; для второго $L2=400$ мм, $A2=200$ мм²; $E=200000$ МПа. Распределённых нагрузок нет. Найдите перемещения узлов, напряжения и реакцию. Запишите глобальную матрицу до закрепления.

Оценивание из 20 баллов. Схема и единицы — 4; матрица и закрепление — 6; перемещения и напряжения — 6; реакция и баланс — 4.

ДЗ2 Разностная схема

Рассмотрите безразмерную краевую задачу $u''=-1$ при $0\le x\le 1$, $u(0)=u(1)=0$. Для $h=0{,}25$ запишите дискретную систему и найдите внутренние значения. Сравните их с $u(x)=x(1-x)/2$. Объясните, можно ли по этому примеру доказать второй порядок сходимости на произвольном решении.

Оценивание из 20 баллов. Разностная формула и границы — 5; система — 5; решение — 5; объяснение точного совпадения и ограничения — 5.

ДЗ3 Консольная балка

Консоль длиной L=1000 мм нагружена поперечной силой F=100 Н на свободном конце. E=200000 Н/мм², I=83333,333 мм⁴. Используя модель Эйлера — Бернулли, найдите модуль прогиба конца и модули поперечной реакции и момента заделки. Укажите две проверки конечноэлементного решения.

Оценивание из 20 баллов. Модель и единицы — 4; формула прогиба — 6; реакции — 6; проверки — 4.

ДЗ4 Сеточная оценка

В одинаковой точке получены перемещения: u(h)=1,800 мм, u(h/2)=1,950 мм, u(h/4)=1,9875 мм. Предположите асимптотический закон u(h)=u*+Ch². Оцените u*, абсолютную и относительную ошибки на самой мелкой сетке; проверьте наблюдаемый порядок по трём значениям.

Оценивание из 20 баллов. Порядок — 5; экстраполяция — 5; ошибки — 5; ограничения — 5.

ДЗ5 Нелинейное равновесие

Для пружины Fвнутр(u)=ku+αu³ заданы k=1000 Н/мм, α=100 Н/мм³, F=1100 Н. Запишите итерацию Ньютона с невязкой r=F−Fвнутр и выполните два шага от u0=0. Найдите точное равновесие подбором и сравните с u2.

Оценивание из 20 баллов. Невязка и касательная — 6; два шага — 6; точный корень — 4; критерий остановки — 4.

ДЗ6 Упругопластический стержень

Задана одномерная билинейная диаграмма монотонного растяжения: E=200000 МПа, σy=250 МПа; наклон пластической ветви по полной деформации Et=2000 МПа. Стержень длиной L=1000 мм доведён до полной деформации ε=0,003 и разгружен до нулевого напряжения по модулю E. Найдите напряжение перед разгрузкой, остаточную деформацию и удлинение.

Оценивание из 20 баллов. Предел упругой деформации — 4; напряжение — 6; разгрузка и остаточная деформация — 6; удлинение и смысл Et — 4.

ДЗ7 Устойчивость стержня

Прямой идеальный шарнирно опёртый стержень имеет L=1000 мм, E=200000 Н/мм², I=10000 мм⁴. Нагрузка сжимающая, сечение постоянно. Найдите критическую силу Эйлера и коэффициент к опорной силе F0=5000 Н. Объясните, как изменится сила при удвоении длины.

Оценивание из 20 баллов. Схема и расчётная длина — 4; критическая сила — 6; коэффициент и изменение длины — 6; ограничения — 4.

ДЗ8 Частота и переходный отклик

Линейная одномассовая система без демпфирования: m=10 кг, k=40000 Н/м. При нулевых начальных перемещении и скорости в момент t=0 внезапно прикладывают постоянную силу F0=100 Н. Найдите круговую и обычную частоты, статическое перемещение и максимальное перемещение. Предложите три шага времени для проверки численного интегрирования.

Оценивание из 20 баллов. Частоты и период — 6; статическое значение — 4; отклик и максимум — 6; исследование шага — 4.

ДЗ9 Сопоставление с измерениями

Учебные измерения прогиба консоли при силах 50, 100 и 150 Н составляют соответственно 1,00; 2,02; 2,98 мм. Абсолютная неопределённость каждого измерения ±0,05 мм. Мо-

дель даёт 0,95; 1,90; 2,85 мм. Найдите абсолютные и относительные расхождения по центральным значениям и проверьте попадание расчёта в измерительные интервалы. Достаточно ли этого для окончательного вывода о валидации?

Оценивание из 20 баллов. Разности — 4; проценты — 4; интервалы — 6; обоснованная интерпретация — 6.

ДК1 Составной стержень и сеточная проверка

Самостоятельная письменная тренировка, 90 минут. Сначала оформите постановку и расчёт, затем при необходимости проверьте значения калькулятором или вычислительным файлом. Выполните один вариант целиком.

Часть А, 10 баллов. Используйте схему ДЗ1 и E = 200 000 МПа. По данным варианта соберите систему, найдите перемещения, напряжения и реакцию. Часть Б, 6 баллов. Решите задачу ДЗ2 на h = 0,5 и h = 0,25. Запишите системы и объясните характер узловой ошибки. Часть В, 4 балла. Для трёх значений из таблицы выполните оценку как в ДЗ4.

Вар.	F кН	L1 / L2 мм	A1 / A2 мм²	u(h); u(h/2); u(h/4) мм
1	30	600 / 400	300 / 200	1,800; 1,950; 1,9875
2	20	500 / 500	200 / 400	0,900; 0,975; 0,99375
3	40	800 / 200	400 / 200	2,700; 2,925; 2,98125

Рубрика ДК1: часть А — сборка и границы 4, перемещения и напряжения 4, реакция и баланс 2; часть Б — системы 2, значения 2, объяснение 2; часть В — порядок и экстраполяция 2, ошибка и ограничение вывода 2. Половинные баллы применяются по общему правилу рубрик.

ДК2 Устойчивость и динамика

Выполните один вариант. Подготовьте воспроизводимый файл, таблицы, графики и краткое объяснение результатов. Для самопроверки защиту можно отрепетировать за 10–15 минут.

Часть А. Для идеального шарнирно опёртого стержня при E = 200 000 Н/мм² найдите первую критическую нагрузку на сетках с 2, 4 и 8 балочными элементами и сопоставьте с формулой Эйлера. На концах закрепите поперечные перемещения, повороты свободны. Укажите форму и допущения модели. Для балочного элемента с кубическими функциями Эрмита интегрируйте $EI \cdot N''^{T}N''$ для упругой матрицы и $N'^{T}N'$ для геометрической матрицы единичной сжимающей силы.

Часть Б. Для одномассовой системы из таблицы задайте нулевые начальные перемещение и скорость. При t = 0 приложите постоянную ступенчатую силу F_0. Интегрируйте без демпфирования до 2T по Ньюмарку с $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ и шагами T/20, T/40, T/80. Сопоставьте отклик и фазу с аналитическим решением. Часть В. Используйте данные ДЗ9, чтобы объяснить ограничения сопоставления с измерениями.

Вар.	L мм	I мм⁴	m кг	k Н/м	F0 Н
1	1000	10000	10	40000	100
2	1500	20000	20	80000	200
3	800	8000	5	45000	90

Рубрика ДК2: постановка и единицы обеих моделей — 4; расчёт критической силы и три сетки — 5; частоты, динамический отклик и три шага — 5; сопоставление с измерениями

и ограничения — 3; архив расчёта, подписанные графики и индивидуальная защита — 3. Для сеток и шагов представить относительные изменения контролируемого результата; если сеточный ответ совпадает с эталоном уже на грубой модели, объяснить причину, не придумывая ненулевую ошибку.

Дополнительные ситуации для разбора

ДС1 Вырожденная матрица

Плоская свободная деталь имеет только одно закрепление по x. Решатель сообщает о вырожденной матрице.

ДС2 Рост максимального напряжения

При уточнении сетки у острого внутреннего угла максимум напряжения растёт, а перемещение сходится.

ДС3 Несходимость контакта

Увеличение штрафа в 1000 раз уменьшило проникновение и резко увеличило число итераций.

ДС4 Мнимая точность динамики

На грубом шаге схема Ньюмарка не расходится, но момент максимума отличается от аналитического.