Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Министерство образования и науки Кыргызской Республики

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Естественно-технический факультет

Кафедра механики им. Я.И. Рудаева

Фонд
оценочных средств

по дисциплине «**Вариационное исчисление**»

Направление подготовки
15.03.03 – РФ, 650500 – КР Прикладная механика
профиль Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг

Квалификация выпускника
бакалавр

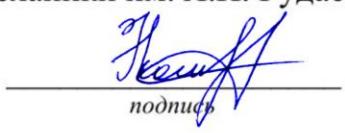
2022

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки «Прикладная механика» по дисциплине «*Вариационное исчисление*».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании кафедры механики им. Я.И. Рудаева

протокол № 1 от 30.08.2022 г.

Заведующий кафедрой механики им. Я.И. Рудаева



подпись Комарцов Н.М.

Исполнители:

Доцент, к.ф.-м.н.  *подпись* Гончарова И.В.

Преподаватель  *подпись* Кулагина М.А.

СОГЛАСОВАНО:

Заместитель декана по учебной работе



подпись Комарцов Н.М.

Вариационное исчисление

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности знать:

1. Функционал
2. Вариация функционала.
3. Необходимое условие экстремума функционала
4. Уравнение Эйлера
5. Метод вариации в задачах с неподвижными границами. Функционалы, зависящие от одной функции
6. Метод вариации в задачах с неподвижными границами. Функционалы, зависящие от нескольких функций
7. Метод вариации в задачах с неподвижными границами. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка одной функции;
8. Метод вариации в задачах с неподвижными границами. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
9. Метод вариации в задачах с неподвижными границами. Функционалы, зависящие от одной функции.
10. Метод вариации в задачах с неподвижными границами. Функционалы, зависящие от нескольких функций.
11. Вариационные задачи на условный экстремум с дополнительными условиями в виде конечных связей
12. Вариационные задачи на условный экстремум с дополнительными условиями в виде дифференциальных уравнений
13. Изопериметрическая задача

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности уметь, владеть:

Вариационные задачи с неподвижными границами

1. Найти вариацию функционала

$$V(y(x)) = \int_0^3 y^2 y'\,dx, \quad y(x) = x^2, \quad y_1(x) = x^3.$$

2. Найти вариацию функционала

$$V(y(x)) = \int_1^e (yy' + xy'^2)\,dx, \quad y = \ln x, \quad \delta y = \frac{\alpha(x-1)}{e-1}.$$

3. Найти вариацию функционала

$$V(y(x)) = \int_1^\pi y'^2 \sin x\,dx, \quad y = \sin x, \quad \delta y = \alpha \cos x.$$

4. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

5. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_1^e (xe^y - ye^x)\,dx, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 1.$$

6. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} e^y (1 + xy')\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

7. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2 + yy')\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

8. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_0^1 y'^2\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

9. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

10. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\,dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5.$$

11. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_0^{x_1} e^x \sqrt{1+y'^2}\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

12. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

13. Исследовать функционал на экстремум

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y(1+y'^2)}\, dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

14. Найти среди линий, соединяющих точки $A(0,1)$ и $B(1,4)$, ту, которая дает минимум функционала

$$V(y(x)) = \int_0^1 (12xy + yy' + y'^2)\, dx.$$

15. Среди линий, соединяющих точки $A(1,0)$ и $B(2,1)$, найти ту, которая дает минимум функционала

$$V(y(x)) = \int_1^2 (xy'^2 - y)\, dx.$$

Вариационные задачи с подвижными границами

1. Исследовать на экстремум функционал

$$V(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = x_1 - 5.$$

2. Среди линий, соединяющих точку $O(0,0)$ с кривой $y^3 = 2 - x$, найти ту, которая дает минимум функционала

$$V(y(x)) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 - y^2)\, dx, \quad y(0) = 0.$$

3. Записать условие трансверсальности для функционала

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{2}(xy' - x'y) - R\sqrt{x'^2 + y'^2} \right) dx.$$

4. Записать условие трансверсальности для функционала

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

5. Записать условие трансверсальности для функционала

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y) e^{arctg\, y'} \sqrt{1+y'^2}\, dx, \quad A(x,y) \neq 0.$$

6. Записать условие трансверсальности для функционала

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \quad z_1 = \varphi(x_1, y_1).$$

7. Исследовать на экстремум функционал

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \quad z_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad z_1 = \psi(x_1, y_1).$$

8. Выяснить, существуют ли ломаные экстремали для функционала

$$V(y(x)) = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx\,?$$

9. Выяснить, существуют ли ломаные экстремали для функционала

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y'^2(1-y')^2\,dx\,?$$

10. Выяснить, существуют ли ломаные экстремали для функционала

$$V(y(x)) = \int_0^4 (y'-1)^2(y'+1)^2\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 2\,?$$

11. Выяснить, существуют ли ломаные экстремали для функционала

$$V(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2)\,dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1\,?$$

12. Исследовать на экстремум функционал

$$V(y(x)) = \int_0^1 e^x(y'^2 + 6y^2 + 12y)\,dx.$$

13. Исследовать на экстремум функционал

$$V(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2)\,dx, \quad y(0) = 0,$$

если граничная точка скользит по прямой $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариационные задачи на условный экстремум

1. Решить изопериметрическую задачу

$$V(y(x)) = \int_0^{\pi} y'^2\,dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad \int_0^{\pi} y\sin x\,dx = 1.$$

2. Решить изопериметрическую задачу

$$V(y(x)) = \int_0^{\pi} y'^2\,dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1`, \quad \int_0^{\pi} y\cos x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Решить изопериметрическую задачу

$$V(y(x)) = \int_0^{1} (y'^2 + x^2)\,dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^{1} y^2\,dx = 2.$$

4. Решить изопериметрическую задачу

$$V(y(x)) = \int_0^{1} (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\,dx,$$

$$y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1,$$

$$\int_0^{1} (y'^2 - xy' - z'^2)\,dx = 2.$$

5. Из кривых длиной l, соединяющих точки $M_1(-a,0)$ и $M_2(a,0)$, определить ту, которая вместе с осью Ox ограничивает наибольшую площадь. При этом $l > 2a$.
6. Соединить две неизвестные точки M_1 и M_2, лежащие на оси Ox, кривой наименьшей длины, ограничивающей вместе с осью Ox площадь данной величины S.
7. Среди линий, соединяющих точки $A(0,0)$ и $B\left(1,\frac{1}{4}\right)$, найти ту, которая реализует экстремум функционала $V(y(x)) = \int_0^{1} y'^2\,dx$ при условии $\int_0^{1} (y - y'^2)\,dx = \frac{1}{12}$.
8. Среди кривых длиной l, соединяющих точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, найти ту, центр тяжести которой лежит наиболее низко.
9. Найти форму тяжелой однородной нити длины l, один конец которой закреплен в точке $B(x_1, y_1)$, а другой конец находится на оси Oy.
10. Определить кривую, соединяющую точку $A(0,b)$ и произвольную точку оси Ox, которая при вращении вокруг оси Ox имеет наименьшую площадь поверхности вращения. Фигура, ограниченная искомой кривой и осями Ox, Oy имеет площадь S.

Образцы контрольных работ

Контрольная работа №1

1) Найти экстремаль функционала $v[y(x)]=\int_1^2\left(15+3y'^2+6yy'+3y^2\right)dx$, удовлетворяющую условиям $y(1)=1,\ y(2)=0$

2) Исследовать на экстремум функционал $v[y(x)]=\int_{-1}^0\left(xy^2y'-xy\right)dx$,

$y(-1)=1,\ y(0)=3.$

3) Найти экстремаль функционала $v[y(x)]=\int_0^1\left(3x^2+2y''^2-2\right)dx$, удовлетворяющую условиям $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=1,\ y'(1)=1$

Контрольная работа №2

1. Найти кривую, на которой функционал

$$v[y(x)]=\int_0^{\pi/3}\left(3y^2-3y'^2\right)dx$$

может достигать экстремума, если ее левый конец фиксирован в точке $A(0;1)$, а правый находится на прямой $x=\frac{\pi}{3}$.

2. Найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x+1$.

Контрольная работа №3

1. Найти экстремаль функционала $v[y(x),z(x)]=\int_0^1\left(y'^2+z'^2+3\right)dx$,

удовлетворяющую граничным условиям: $y(0)=-1,\ z(0)=0,\ y(1)=-1,\ z(1)=1$

и уравнению связи $z+y-2x^2+x+1=0$

2. Найти экстремаль функционала $v[y(x)]=\int_0^{\pi}y'^2dx$,

удовлетворяющую граничным условиям: $y(0)=1,\ y(\pi)=-1$ и интегральной связи $\int_0^{\pi}y(x)\cos x dx=\frac{\pi}{2}$