

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

МАТЕРИАЛЫ

61 Международной сетевой научно-технической конференции
молодых ученых, аспирантов, магистрантов и студентов
«Научно-инновационные технологии: идеи, исследования и
разработки», посвященной 65-летию КГТУ им.И.Раззакова

Часть I

БИШКЕК

Технологический парк
Издательский центр «Текник» 2019

УДК 539.215+539.374

СРАВНЕНИЕ ДВУХ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Хохлова Ю.А. Ch.ulemkakh_97@mail.ru
КРСУ, г. Бишкек, Кыргызская Республика

COMPARISON TWO CRITERIA OF STRENGTH ROCKS

Khokhlova Yu.A. Ch.ulemkakh 97@mail.ru

Аннотация: Напряженное состояние горных пород в массиве моделируется испытаниями стандартных цилиндрических образцов на установках по схеме Кармана при осевом сжатии с наложением равномерного бокового давления. При этом сжимающие напряжения считаются положительными; по их соотношению в момент разрушения судят о прочности пород. Возникающие главные напряжения могут принимать множество значений, и осуществить весь комплекс опытов с различным соотношением этих компонент невозможно. Поэтому разрабатываются различные методы расчета, по которым можно оценить степень опасности напряженного состояния по постулируемым зависимостям между главными напряжениями, т.е. предсказать прочностные свойства материалов в момент разрушения.

В качестве паспорта прочности горных пород принимается огибающая предельных кругов напряжений на диаграмме Мора в координатах «нормальное – касательное напряжения». Для построения огибающей использована зависимость между максимальным и минимальным главными напряжениями, представленная в виде двух различных критериев прочности. Один из них – это широко известный критерий Хоека-Брауна, другой предложен сравнительно недавно Т.Б.Дуйшеналиевым и К.Т. Койчумановым. Проверена применимость этих критериев при рассмотрении экспериментальных данных А.Н.Ставрогина, полученных испытанием цилиндрических образцов разнообразных пород в условиях трехосного сжатия, а также в случае одноосного растяжения.

Abstract: The stress state of rocks in a massif is modeled by testing standard cylindrical specimens on installations using the Karman scheme for axial compression with superimposed uniform lateral pressure. In this case, the compressive stresses are considered positive; their ratio at the time of fracture is judged on the strength of the rocks. The arising principal stresses can take on a multitude of values, and it is impossible to carry out the whole complex of experiments with different ratios of these components. Therefore, various calculation methods are being developed that can be used to estimate the degree of danger of a stress state by the postulated dependencies between the main stresses, i.e. predict the strength properties of materials at the time of fracture.

The envelope of limit stress circles on the Mohr diagram in the coordinates “normal - shear stress” is taken as a passport of rock strength. To construct the envelope used the relationship between the maximum and minimum principal stresses, presented in the form of two different strength criteria. One of them is the well-known criterion of Hoek-Brown, the other is proposed relatively recently by T.B. Duyshenaliev and K. T. Koichumanov. The applicability of these criteria was checked when considering the experimental data of A.N. Stavrogin obtained by testing cylindrical specimens of various rocks under conditions of triaxial compression, as well as in the case of uniaxial tension.

Ключевые слова: прочность горных пород, огибающая предельных кругов напряжений, критерий прочности, главные напряжения, диаграмма Мора.

Key words: rock strength, envelope of limit stress circles, strength criterion, principal stresses, Mohr diagram.

1. Построение предельных кругов Мора

Напряженные состояния, при которых разрушается материал, могут быть представлены, согласно Мору, предельными кругами в координатах $\sigma - \tau$ (нормальное – касательное напряжения)

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1)$$

где главные напряжения σ_1 , σ_3 соответствуют моменту наступления разрушения.

Уравнение (1) в главных осях тензора напряжения является алгебраическим уравнением второй степени, по инвариантам которого [1] можно заключить, что оно является уравнением гиперболы. Используя это свойство уравнения (1), в монографии [2] соотношение между напряжениями σ_1 и σ_3 представлено в виде:

$$\sigma_3 = A + \sqrt{\sigma_1^2 + B^2} \quad (2)$$

где A и B – материальные константы, подлежащие определению для конкретных материалов.

Таким образом, формула (2) представляет собой один из возможных критериев прочности горных пород.

Определение констант A и B можно осуществить следующим образом.

Рассмотрим случай одноосного сжатия. Тогда $\sigma_3 = 0$, а напряжение σ_1 равно пределу прочности на сжатие (σ_c), т.е. $\sigma_1 = \sigma_c$. В этом случае из формулы (2) следует:

$$A^2 - B^2 = \sigma_c^2 \quad (3)$$

Вид напряженного состояния характеризуется параметром c равным отношению минимального главного напряжения к максимальному, т.е. $c = \sigma_3 / \sigma_1$. Используя этот параметр и формулу (2) с учетом (3) выразим константу A :

$$A = \frac{(c^2 - 1)\sigma_1^2 + \sigma_c^2}{2c\sigma_1} \quad (4)$$

В формуле (4) напряжение σ_1 можно выбрать при каком-либо конкретном виде напряженного состояния, осуществленного в эксперименте. Тогда это напряжение будет служить « опорной точкой » для определения константы A согласно (4). Затем константа B находится из формулы (3). В итоге (при известных константах A и B) при произвольном виде напряженного состояния напряжение σ_1 представим в виде:

$$\sigma_1(c) = \frac{-Ac + \sqrt{A^2 - (1 - c^2)B^2}}{1 - c^2} \quad (5)$$

Согласно теории прочности Мора, сопротивления сдвигу (τ) в плоскости разрушения зависит от нормального напряжения (σ) к этой плоскости. По экспериментальным данным трехосного сжатия по схеме Кармана ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) строят в координатах $\tau \text{--} \sigma$ круги (Мора) предельных напряженных состояний, центр (O_c) и радиус (R) которых определяются выражениями:

$$O_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (6)$$

Используя теорему о существовании огибающей к семейству кругов Мора, на основании выше приведённых зависимостей получим координаты огибающей в виде:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 (\sigma_1 + 2c(\sigma_1)'_c)}{\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)'_c}; \quad \tau = \frac{\sigma_1(1-c)}{\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)'_c} * \sqrt{\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)'_c} \quad (7)$$

где

$$(\sigma_1)'_c = \frac{\partial \sigma_1}{\partial c} = \frac{c(2A^2 - (1-c^2)B^2) - A(1+c^2)\sqrt{A^2 - (1-c^2)B^2}}{(1-c^2)^2 \sqrt{A^2 - (1-c^2)B^2}} \quad (8)$$

Зависимость (2) (при найденных выше указанным образом константах A и B) позволяет определить предел прочности на растяжение:

$$\sigma_p = A + B \quad (9)$$

Аналогичный по структуре критерий предложен в работе [3] в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{A_h \sigma_3 + B_h^2} \quad (10)$$

Соотношение (10) представим алгебраическим уравнением второй степени:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 - A_h\sigma_3 - B_h^2 = 0 \quad (11)$$

В соответствие с классификацией уравнение второй степени [1] уравнение (11) (судя по его инвариантам) является уравнением параболы.

Как и при рассмотрении критерия (2), используя в качестве « опорных точек » случай одноосного сжатия и какой либо конкретный вид напряженного состояния, получим выражения констант A_h и B_h :

$$B_h = \sigma_c; \quad A_h = \frac{\sigma_1^2(1-c)^2 - \sigma_c^2}{\sigma_1 c} \quad (12)$$

При известных константах A_h и B_h для построения в случае трехосного сжатия кругов Мора, огибающей к ним и предела прочности на растяжение получим:

$$(\sigma_1)_h = \frac{A_h c + \sqrt{A_h^2 c^2 + 4(1-c)^2 B_h^2}}{2(1-c)^2} \quad (13)$$

$$(\sigma_1)'_c = \frac{A_h^2 c(1+2c-2c^3) + 4(1-c)^3 B_h^2 + \sqrt{A_h^2 c^2 + 4(1-c)^2 B_h^2}}{2(1-c)^4 \sqrt{A_h^2 c^2 + 4(1-c)^2 B_h^2}} \quad (14)$$

$$\sigma_p = \frac{A_h - \sqrt{A_h^2 + 4\sigma_c^2}}{2} \quad (15)$$

Для проверки критериев прочности (2) и (10) использованы экспериментальные данные испытаний на трехосное сжатие, представленные в монографии [4]. В качестве примера на рис. 1 приведены соответствующие сравнения для талькохлорита.

Таблица 1. Экспериментальные и расчетные главные напряжения и координаты огибающей к предельным кругам Мора при трехосном сжатии

№	σ_1 (эксп) МПа $9,81^{-1}$	c	σ_1 (расч) МПа $9,81^{-1}$	$\Delta\sigma_1\%$
1	945	0	945	0
2	1320	0.069	1248.02	-5.45
3	1420	0.116	1500.51	5.67
4	1730	0.178	1890.54	9.28
5	2340	0.233	2292.02	-2.05
6	2790	0.321	3056.59	9.56
7	3820	0.407	3990.54	4.46
8	5480	0.51	5480	0

$$\Delta\sigma_1\% = \frac{\sigma_1(\text{расч}) - \sigma_1(\text{эксп})}{\sigma_1(\text{эксп})} * 100\%$$

№	σ (эмп) МПа $9,81^{-1}$	τ (эмп) МПа $9,81^{-1}$	σ (расч) МПа $9,81^{-1}$	τ (расч) МПа $9,81^{-1}$	$\Delta\sigma\%$	$\Delta\tau\%$
1	200	390	187,60	376,94	-6,20	-3,35
2	400	540	367,71	497,89	-8,07	-7,80
3	500	600	536,60	591,15	7,32	-1,48
4	720	700	822,74	720,55	14,27	2,94
5	1200	880	1140,74	835,75	-4,94	-5,03
6	1700	980	1788,96	1011,92	5,23	3,26
7	2540	1120	2625,54	1169,14	3,37	4,39
8	4000	1320	4011,90	1336,72	0,30	1,27

$$\Delta\sigma\% = \frac{\sigma(\text{расч}) - \sigma(\text{эмп})}{\sigma(\text{эмп})} * 100\%$$

$$\Delta\tau\% = \frac{\tau(\text{расч}) - \tau(\text{эмп})}{\tau(\text{эмп})} * 100\%$$

№	$(\sigma_1)_h$ МПа $9,81^{-1}$	$(\Delta\sigma_1)_h\%$	σ_h МПа $9,81^{-1}$	τ_h МПа $9,81^{-1}$
1	945	0	28,69	162,14
2	1108,99	-15,99	207,08	343,15
3	1249,85	-11,98	347,30	427,32
4	1485,30	-14,14	556,06	520,61
5	1758,49	-24,85	781,61	602,73
6	2385,69	-14,49	1283,74	755,47
7	3369,78	-11,79	2076,30	954,80
8	5480	0	3829,04	1306,71

$$(\Delta\sigma_1)_h \% = \frac{(\sigma_1)_h - \sigma_1(\text{ЭКСП})}{\sigma_1(\text{ЭКСП})} * 100\%$$

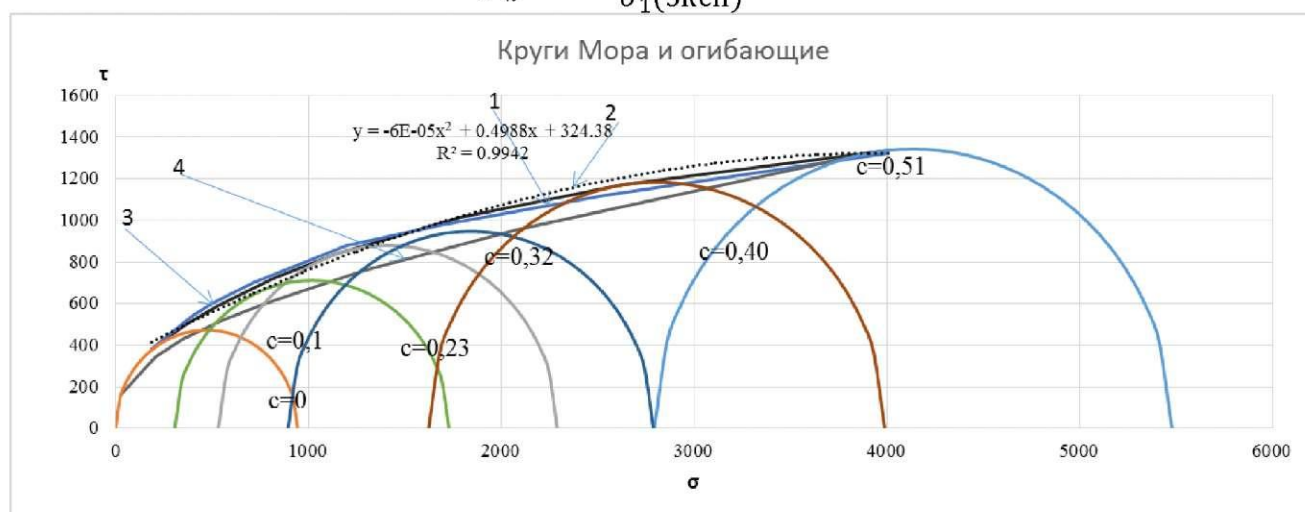


Рис.1. Круги Мора и огибающие к ним для талькохлорита.

1 - Расчетная огибающая при использовании критерия прочности (2); 2 - аппроксимация линией тренда огибающей 1; 3 - эмпирическая огибающая; 4 - Расчетная огибающая при использовании критерия прочности (10).

Круги Мора построены по экспериментальным данным, эти круги (как видно из таблицы) практически совпадают с расчетными при использовании критерия прочности (2) почти при всех видах напряженного состояния (c), за исключением $c = 0,178$, $c = 0,321$ (для которых наблюдается незначительное отклонение расчетных данных от экспериментальных).

Как видно из рис. 1 прочность данной горной породы лучше отражается критерием (2), чем критерием (10), который заметно занижает пределы прочности при трехосном сжатии. Кроме этой породы исследованы также Песчаник Д-8, Песчаник П-03, Мрамор П, Известняк (Эстонсланец), Диабаз. Такая ситуация наблюдается для всех выше перечисленных горных пород за исключением отображения прочностных свойств Известняка (Эстонсланца). Для последнего картина сопоставления огибающих построенных по сравниваемым двум критериям представлена на рис. 2.

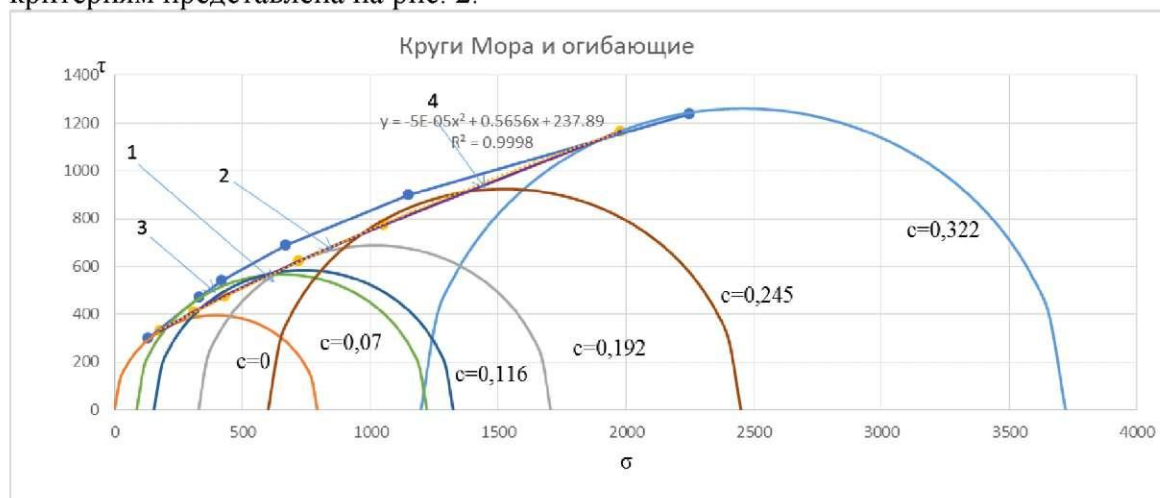


Рис.2. Круги Мора и огибающие к ним для Известняка (Эстонсланца).

1 - Расчетная огибающая при использовании критерия прочности (2); 2 - аппроксимация линией тренда огибающей 1; 3 - эмпирическая огибающая [4]; 4 - Расчетная огибающая при использовании критерия прочности (10).

Круги Мора построены по экспериментальным данным, эти круги (как видно из рисунка) практически совпадают с расчетными как при использовании критерия прочности (2), так и при использовании критерия прочности (10), почти при всех видах напряженного состояния (c), за исключением $c = 0,116$, $c = 0,245$ (для которых наблюдается незначительное отклонение расчетных данных от экспериментальных). Однако, как показано ниже, критерий (2) точнее отражает предел прочности на растяжение, чем критерий (10).

2. Определение предела прочности на растяжение

Согласно формулам (3), (4), (9) для талькохлорита получено:

$$A = -3815.35 \text{ МПа } 9,81^{-1}; B = 3696.5 \text{ МПа } 9,81^{-1}; \sigma_p = -118.88 \text{ МПа } 9,81^{-1}$$

Экспериментальное значение предела прочности на растяжение:

$$\sigma_p = -130 \text{ МПа } 9,81^{-1}$$

Согласно критерию (10), используя формулу (12), получено:

$$A_h = 2260.37 \text{ МПа } 9,81^{-1}; B_h = 945 \text{ МПа } 9,81^{-1}; \sigma_p = -343 \text{ МПа } 9,81^{-1}$$

Это значение для σ_p значительно отличается от его экспериментального значения.

Согласно формулам (3), (4), (9) для известняка (эстонска) получено:

$$A = -4915.65 \text{ МПа } 9,81^{-1}; B = 4851.52 \text{ МПа } 9,81^{-1}; \sigma_p = -64.22 \text{ МПа } 9,81^{-1}$$

Экспериментальное значение предела прочности на растяжение:

$$\sigma_p = -38 \text{ МПа } 9,81^{-1}$$

Согласно критерию (10), используя формулу (12), получено:

$$A_h = 4786.97 \text{ МПа } 9,81^{-1}; B_h = 792 \text{ МПа } 9,81^{-1}; \sigma_p = -127.63 \text{ МПа } 9,81^{-1}$$

Это значение для σ_p заметно отличается от его экспериментального значения.

Вывод

Критерий прочности Дуйшеналиева – Койчуманова лучше отражает прочностные свойства рассмотренных горных пород, чем критерий Хоека – Брауна, как в случаях неравномерного трехосного сжатия, так и при одноосном растяжении.

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.— 832 с
2. Дуйшеналиев Т.Б., Койчуманов К.Т. Уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений. Бишкек: Илим. 2006. 130 с.
3. Hoek E., Brown E.T. Empirical Strength Criterion for Rock Masses. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 1980. 106, No. ASCE 15715. Pp.1013–1025.
4. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. Москва: Недра. 1979. 305 с.

МАТЕРИАЛЫ

61 Международной сетевой научно-технической конференции
молодых ученых, аспирантов, магистрантов и студентов
«Научно-инновационные технологии: идеи, исследования и
разработки», посвященной 65-летию КГТУ им.И.Раззакова

Часть I

Ответственный за выпуск

Курманалиев Б.К.

Технический редактор и
компьютерная верстка

Кыргызбекова Н.К.
Эркинбек к. Ж.

Подписано к печати 15.05.2019. Формат бумаги 70 x100¹/₆. Бумага офс.
Печать офс. Объем 32 п.л. Тираж 200 экз. Заказ 53.
Технологический парк, Издательский центр “Текник”
Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова
720044, Бишкек, ул. Сухомлинова, 20.
Тел.: 54-29-43, e-mail: beknur@mail.ru