**Министерство науки и высшего образования**
**Российской Федерации**
**Министерство науки, высшего образования и инноваций**
**Кыргызской Республики**

**Межгосударственная образовательная организация высшего образования Кыргызско-Российский Славянский университет**

**имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина**

**Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

# Фонд
# оценочных средств

по дисциплине «Метод конечных элементов»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»

Квалификация

бакалавр

2026 г.

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг», по программе бакалавриата КРСУ в соответствии с ФГОС 3++ по дисциплине «Метод конечных элементов».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании

**Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

протокол № 1 от «2 » сентября 2026 г.

Руководитель подразделения

_____ Алсеитов Мирлан Тилегенович
*подпись* *расшифровка подписи*

*Исполнители:*
к.ф.-м.н. _____ Герман Константин Анатольевич
*должность* *подпись* *расшифровка подписи*

к.т.н. _____ Джаманкулов Азамат Кенешбекович
*должность* *подпись* *расшифровка подписи*

---

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель директора по образовательной деятельности
Политехнического института

_____ Комарцов Никита Михайлович
личная подпись расшифровка подписи

---

## Содержание

Сведения о дисциплине
1 Компетенции и результаты обучения
2 Технологическая карта
3 Оценочные материалы блоков A B C D
4 Процедуры и критерии
5 Методические указания

## Сведения о дисциплине

| Показатель | Сведения |
|---|---|
| Название | Метод конечных элементов |
| Направление и профиль | 15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика»; «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» |
| Обучение | Бакалавриат, очная форма, 4 курс; 7 семестр —18 недель, 8 семестр —12 недель |
| Код | Б1.В.1;. |
| Трудоёмкость | 6 ЗЕТ, 216 ч; по 108 ч в каждом семестре. Лекции 32, ПР 50, СРС 99,9, КрТО 2,1, КрЭк 0,3, часы на контроль 31,7. Аудиторные 82, контактные 84,4 ч. |
| Формы контроля | 7 семестр — зачёт; 8 семестр — экзамен. Курсовая работа следует из п. 6.8 раздела 4 и раздела 5.2 РПД; 2 ч КрТО на консультации и приём. |
| Основание | РПД от 3 сентября 2026 г.; учебный план от 26.06.2026, протокол №11; |
| Исполнители | к.ф.-м.н. Герман Константин Анатольевич; к.т.н. Джаманкулов Азамат Кенешбекович — составители РПД. |

| Семестр | Лекции | ПР | СРС | Иная контактная | На контроль | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 16 | 34 | 57,9 | КрТО 0,1 | — | 108 |
| 8 | 16 | 16 | 42 | КрТО 2; КрЭк 0,3 | 31,7 | 108 |
| Итого | 32 | 50 | 99,9 | 2,4 | 31,7 | 216 |

## 1 Компетенции и результаты обучения

ПК-2: Готовностью выполнять научно-исследовательские работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий, широко распространённых в промышленности систем мирового уровня и экспериментального оборудования для проведения механических испытаний.

| Результат из 5.3 РПД | Наблюдаемое действие и этап | Реально включённые средства |
|---|---|---|
| Р1 | Обосновывает идеализацию, материал, нагрузки, связи и элемент; начальный — постановка, базовый — защита выбора | В1–В6, В13–В21, В25–В42; ПР1, ПР6–ПР14; РК1, РК4–РК5; С1, КРС; зачёт ЗБ1–ЗБ3; экзамен ЭБ1–ЭБ5 |
| Р2 | Выводит уравнения, собирает систему и вводит граничные условия; начальный — расчёт, базовый — самостоятельное объяснение | В4–В15, В19–В21; ПР2–ПР5, ПР7; З1–З2; РК1–РК3; зачёт ЗБ1–ЗБ2; КЗ1–КЗ2, КЗ4 |
| Р3 | Выполняет статику, термоупругость, контакт, устойчивость и динамику; начальный — типовая работа, базовый — интеграция | ПР4–ПР16; З1–З8; РК2–РК6; КЗ1–КЗ6; ЭБ1–ЭБ5; КРС |
| Р4 | Проверяет равновесие, эталон и сходимость, объясняет ограничения; начальный — отдельная проверка, базовый — исследование | В22–В24, В36, В42–В48; ПР8, ПР14–ПР16; З3, З5, З8; С1, КРС; все билеты |

Знания проверяются вопросами В, Т, У и D; умения — выводом и решением в З/ПР/РК; владение методами — воспроизводимыми файлами, С1 и курсовой КРС с индивидуальной защитой. Р1–Р4 являются рабочими обозначениями самой РПД, а не официальными индикаторами. Блоки A, B, C относятся к начальному этапу в пределах дисциплины, D — к базовому; общее формирование ПК-2 продолжается в других дисциплинах и практиках.

## 2 Технологическая карта

| Семестр и модуль | Л/ПР/СРС ч | Текущий контроль | Письменный РК | Итого |
|---|---|---|---|---|
| 7, М1; раздел 1; недели 1–4 | 4/6/14 | ПР1–2: до10 | РК1: до10 | 0–20 |
| 7, М2; раздел 2; недели 5–11 | 6/12/23 | ПР3–5: до15 | РК2: до10 | 0–25 |
| 7, М3; раздел 3; недели 12–18 | 6/16/20,9 | ПР6–8: до15; С1: до10 | РК3/КР1: до10 | 0–35 |
| 7, зачёт | КрТО 0,1 | Два вопроса и задача | D7: до20 | 0–20 |
| 7, итог | 108 ч | ПР40 + С1 10 | РК30 + D7 20 | 0–100 |
| 8, М4; раздел 4; недели 1–3 | 4/4/10 | ПР9–10: до10 | РК4: до10 | 0–20 |
| 8, М5; раздел 5; недели 4–7 | 6/6/16 | ПР11–13: до15 | РК5: до10 | 0–25 |

| Семестр и модуль | Л/ПР/СРС ч | Текущий контроль | Письменный РК | Итого |
|---|---|---|---|---|
| 8, М6; раздел 6; недели 8–12 | 6/6/16 | ПР14–16: до15 | РК6/КР2: до10 | 0–25 |
| 8, экзамен | КрЭк 0,3; контроль 31,7 | Два вопроса и задача | D8: до30 | 0–30 |
| 8, итог | 108 ч, включая КрТО2 | ПР40 | РК30 + D8 30 | 0–100 |

Каждая ПР оценивается первично 0–20, в рейтинг семестра входит 0,25 суммы восьми ПР (до40). С1 первично 0–20, множитель0,5 (до10). Каждый РК первично 0–20, множитель0,5 (до10). Зачётное задание первично 0–20; экзамен первично 0–20, множитель1,5 (до30). Формулы: R7=0,25ΣПР1–8+0,5С1+0,5ΣРК1–3+D7; R8=0,25ΣПР9–16+0,5ΣРК4–6+1,5D8. Тесты и опрос служат диагностике без отдельного рейтингового начисления; результат не начисляется дважды.

## 3 Оценочные материалы блоков A B C D

### Блок А Проверка знаний

В1–В48 — основной кодированный банк из раздела 5.3 РПД. У1–У32 и D1–D18 сохраняют дополнительные полные перечни из 5.1. Это пересекающиеся банки одной дисциплины; дополнительные вопросы не дают повторных баллов. Опрос 3–5 минут на вопрос, с собственным конспектом как обратная связь без рейтингового начисления; на аттестации действуют отдельные правила раздела 4.

В1. Какие допущения превращают реальную деталь в линейную статическую модель?

В2. Чем отличаются узел, элемент и степень свободы?

В3. Как обосновать выбор стержневой, плоской или объёмной модели кронштейна?

В4. Как принцип виртуальных работ приводит к слабой форме одномерной задачи?

В5. Каков смысл матриц N, B и D и каковы их размерности для стержня?

В6. Чем различаются существенные и естественные граничные условия?

В7. Выведите матрицу жёсткости линейного стержневого элемента.

В8. Как получить согласованные узловые силы от постоянной распределённой продольной нагрузки?

В9. Как преобразуется матрица стержня плоской фермы из локальных координат в глобальные?

В10. Как собирается глобальная матрица по таблице связности?

В11. Как учесть заданное ненулевое перемещение и восстановить реакции?

В12. Почему система может оказаться вырожденной и как проверить закрепления?

В13. Почему у балочного элемента имеются повороты и эрмитовы функции формы?

В14. Как формируется вектор сил от распределённой поперечной нагрузки?

В15. Когда балка Эйлера — Бернулли недостаточна и требуется учёт сдвига?

В16. Как выбрать между плоским напряжённым и плоским деформированным состояниями?

В17. Почему деформации в CST постоянны внутри элемента?

В18. Как толщина входит в матрицу жёсткости плоской пластины?

В19. Как устроено изопараметрическое отображение Q4 и зачем нужен якобиан?

В20. Как выбирают квадратуру Гаусса и чем опасен неположительный якобиан?

В21. Что означают блокировка и паразитные нулевые моды?

В22. Чем различаются верификация расчёта и валидация модели?

В23. Как построить исследование сеточной сходимости и выбрать контролируемую величину?

В24. Почему максимальное напряжение у острого угла может возрастать при сгущении сетки?

В25. При каких условиях задача допускает осесимметричную постановку?

В26. Как различаются тетраэдральные и гексаэдральные элементы по аппроксимации?

В27. Почему симметрия геометрии сама по себе недостаточна для сокращения модели?

В28. Какие величины задают на срединной поверхности оболочки?

В29. Как проверить нормали, толщину и закрепления оболочечной модели?

В30. Как отличить мембранные усилия и изгибные моменты от напряжений?

В31. Как связаны полная, упругая и температурная деформации?

В32. Почему свободно нагреваемый стержень может иметь нулевые напряжения?

В33. Как проверить реакции полностью закреплённого нагретого стержня?

В34. Как различаются геометрическая и физическая нелинейности?

В35. Как построить шаг метода Ньютона для уравнения равновесия?

В36. Почему сходимость итераций не доказывает физическую достоверность модели?

В37. Как сформулировать условия одностороннего контакта без трения?

В38. Как штрафной параметр влияет на проникновение и обусловленность?

В39. Чем контакт отличается от жёсткого связывания соприкасающихся поверхностей?

В40. Что означают коэффициент критической нагрузки и форма потери устойчивости?

В41. Какие условия необходимы для сравнения с формулой Эйлера?

В42. Почему линейный коэффициент потери устойчивости нельзя автоматически считать запасом реальной детали?

В43. Как получить уравнение $K\varphi = \omega^2 M\varphi$ и перевести $\omega$ в герцы?

В44. Чем различаются согласованная и сосредоточенная матрицы масс?

В45. О чём свидетельствуют нулевые частоты в модели свободного тела или закреплённой конструкции?

В46. Какие данные нужны для расчёта переходного процесса?

В47. Как различаются сходимость по сетке и сходимость по временному шагу?

В48. Почему устойчивость схемы Ньюмарка не гарантирует точности временного отклика?

**Дополнительные текущие вопросы РПД**

У1. В чём заключается идея метода конечных элементов? Как непрерывная механическая система заменяется дискретной моделью?

У2. Что представляют собой узел, конечный элемент, степень свободы и таблица связности?

У3. Какие исходные данные необходимы для построения расчётной модели детали или конструкции?

У4. Как выбирают между стержневой, балочной, плоской, оболочечной и объёмной моделями?

У5. Какие предположения принимаются при решении линейной статической задачи упругости?

У6. Как формулируется принцип виртуальных работ и как он используется при построении уравнений МКЭ?

У7. Что такое слабая форма краевой задачи? Чем различаются существенные и естественные граничные условия?

У8. Каково назначение функций формы? Какие требования предъявляются к аппроксимации перемещений?

У9. Каков физический смысл матриц функций формы, деформаций и упругих свойств материала?

У10. Как выводится матрица жёсткости двухузлового стержневого элемента?

У11. Как преобразуются перемещения, силы и матрица жёсткости элемента при переходе из локальной системы координат в глобальную?

У12. Как выполняются сборка глобальной системы, учёт заданных перемещений и восстановление опорных реакций?

У13. Почему глобальная матрица жёсткости может оказаться вырожденной? Как выявить недостаточные закрепления и механизмы?

У14. Какие узловые неизвестные используются в балочном элементе? Чем различаются модели Эйлера — Бернулли и Тимошенко?

У15. Чем отличаются плоское напряжённое и плоское деформированное состояния? Каковы особенности элементов CST и Q4?

У16. Как проверяют качество сетки и сходимость решения? Чем отличаются концентрация напряжений и сингулярность?

У17. Какие компоненты перемещений, деформаций и напряжений учитываются в пространственной задаче упругости?

У18. Каковы особенности применения тетраэдральных и гексаэдральных конечных элементов?

У19. При каких условиях допускается осесимметричная постановка? Почему симметрии геометрии недостаточно для её применения?

У20. Какие величины характеризуют оболочечную модель? Как влияют толщина, ориентация нормалей и закрепление кромок на результат?

У21. Как связаны полная, упругая и температурная деформации? Как задаётся температура ненапряжённого состояния?

У22. Почему свободное температурное расширение однородного стержня не вызывает продольных напряжений, а ограниченное расширение вызывает?

У23. Чем различаются геометрическая, физическая и контактная нелинейности?

У24. Как формируются вектор невязки и касательная матрица жёсткости в нелинейной задаче?

У25. Как выполняется шаг метода Ньютона? Чем различаются шаг нагружения и итерация равновесия?

У26. Как формулируются условия одностороннего контакта без трения? Чем контакт отличается от жёсткого связывания поверхностей?

У27. Как штрафной параметр влияет на проникновение контактирующих поверхностей и обусловленность системы?

У28. Каков смысл геометрической матрицы жёсткости, коэффициента критической нагрузки и формы потери устойчивости?

У29. Почему линейный расчёт устойчивости идеальной конструкции не определяет автоматически несущую способность реальной детали?

У30. Как формируются согласованная и сосредоточенная матрицы масс? Что характеризуют собственные частоты и формы колебаний?

У31. Какие исходные и начальные условия необходимы для переходного динамического расчёта? Как учитывается демпфирование?

У32. Как проверяется сходимость по временному шагу? Почему устойчивость численной схемы не гарантирует точности динамического отклика?

**Тематические тесты**

Т1–Т16 из РПД. Один верный ответ; верный1, неверный/отсутствующий либо несколько отметок0, частичных баллов нет. Т1–Т8 —7 семестр, Т9–Т16 —8. Время10 минут на половину или20 на весь банк; без источников, консультаций и ИИ. Исправление до сдачи должно однозначно отменять прежнюю отметку. Суммы0–8 или0–16 фиксируются диагностически, не добавляются к рейтингу. Порогов допуска по тесту нет.

Т1. В линейной статической модели при постоянных связях и материале удвоение нагрузки приводит к… А. удвоению перемещений; Б. четырёхкратному росту перемещений; В. неизменным перемещениям.

Т2. Матрица B связывает… А. напряжения и температуры; Б. узловые перемещения и деформации; В. нагрузки и плотность.

Т3. Продольная жёсткость двухузлового стержня постоянного сечения равна… А. $EA \cdot L$; Б. $EI/L^3$; В. $EA/L$.

Т4. Ненулевая реакция в узле с заданным перемещением вычисляется… А. по исходным K и F после решения; Б. только по изменённой единичной строке матрицы; В. как всегда нулевой остаток.

Т5. Классический элемент изгиба Эйлера — Бернулли в плоскости имеет в каждом узле… А. только одно осевое перемещение; Б. поперечное перемещение и поворот; В. только три температуры.

Т6. Для плоского напряжённого состояния тонкой пластины вне особенностей нагрузки принимают… А. $\varepsilon z = 0$ при произвольном $\sigma z$; Б. все деформации нулевыми; В. $\sigma z = \tau xz = \tau yz = 0$.

Т7. Неположительный определитель якобиана в используемой ориентации элемента требует… А. проверки нумерации и геометрии элемента; Б. автоматического принятия результата; В. только изменения цветовой шкалы.

Т8. Верификация расчёта прежде всего проверяет… А. сходство изображения с фотографией; Б. корректность численного решения выбранной задачи; В. только наличие лицензии.

Т9. Осесимметричная модель применима при… А. любой круглой детали независимо от нагрузки; Б. одной плоскости симметрии; В. осесимметричных геометрии, свойствах, нагрузках и связях.

Т10. Изменение нормали оболочки может изменить… А. интерпретацию верхней и нижней поверхностей и направления давления; Б. модуль упругости материала автоматически; В. физические единицы времени.

Т11. Равномерно нагретый свободно расширяющийся однородный стержень имеет… А. обязательно напряжение $E\alpha\Delta T$; Б. температурную деформацию без осевого напряжения; В. нулевую температурную деформацию.

Т12. В методе Ньютона поправку находят из уравнения… А. $M\Delta u = 0$ при любой задаче; Б. $\Delta u = r$ без размерных коэффициентов; В. $Kt\Delta u = r$.

Т13. Контакт без трения позволяет передавать… А. сжимающую нормальную реакцию при активном контакте; Б. произвольное касательное усилие сцепления; В. растягивающую реакцию через раскрытый зазор.

T14. Линейный коэффициент критической нагрузки характеризует… А. точную предельную нагрузку любой реальной детали; Б. потерю устойчивости в принятой идеализированной постановке; В. только предел текучести материала.

T15. Связь частоты f и круговой частоты ω имеет вид… А. $f = 2\pi\omega$; Б. $f = \omega^2$; В. $f = \omega/(2\pi)$.

T16. Уменьшение временного шага при неизменной сетке проверяет… А. чувствительность временного решения к дискретизации по времени; Б. только точность геометрической модели; В. наличие всех материальных параметров.

**Блок В Проверка умений**

З1–З8 — полный кодированный набор из раздела 5.3; проверочные ответы перенесены в приложение преподавателя. Н, мм, МПа используются в статических задачах, если не оговорено иное; З8 —Н, м, кг, с. В задачах на сравнение сеток критерий3% является учебным условием, не нормативным допуском реального проектирования.

**З1**

Сборка системы двух стержней Два соосных стержня соединены последовательно: узлы 1–2–3, u1 = 0. Для обоих E = 210000 МПа и L = 500 мм; A1 = 200 мм², A2 = 100 мм². В узле 3 приложена сила F = 10000 Н вдоль положительной оси. Составьте элементные и глобальную матрицы, найдите u2, u3, усилия, напряжения и реакцию. Проверьте равновесие.

**З2**

Балочная модель и аналитическая проверка Консоль Эйлера — Бернулли длиной L = 1000 мм имеет E = 210000 МПа, $I = 8\cdot10^6$ мм⁴ и расстояние до крайнего волокна y = 20 мм. На свободном конце действует поперечная сила F = 1000 Н. Определите модуль прогиба и поворота конца, максимальные изгибающий момент и напряжение; поясните проверку конечно-элементного решения. Примите малые перемещения, постоянные E и I.

**З3**

Интерпретация сеточной сходимости Для одной и той же линейной модели кронштейна получены результаты трёх последовательно сгущённых сеток. Число элементов: 1000, 4000, 16000. Перемещение точки контроля: 0,800; 0,880; 0,900 мм. Напряжение в фиксированной точке вдали от угла: 150; 158; 160 МПа. Максимальное напряжение у идеально острого закреплённого угла: 210; 295; 418 МПа. Вычислите относительное изменение двух первых величин для последних двух сеток по отношению к последней сетке. Объясните, что можно утверждать о достоверности.

**З4**

Температурные деформации и реакции Однородный стержень: L = 1000 мм, A = 200 мм², E = 210000 МПа, $\alpha = 12\cdot10^{-6}$ 1/К. Температура равномерно повышается на 50 К относительно ненапряжённого состояния. Найдите удлинение и напряжение при одном закреплённом и одном свободном конце; затем напряжение и опорные реакции при закреплении обоих концов. Продольная ось направлена слева направо.

**З5**

Один шаг нелинейного решения Для нелинейной пружины внутренняя сила $F_{int}(u) = k\cdot u + \beta\cdot u^3$, где k = 100 Н/мм, β = 10 Н/мм³; внешняя сила $F_{ext}$ = 200 Н. Примите u0 = 1 мм. Используя $r = F_{ext} - F_{int}$ и $K_t = dF_{int}/du$, выполните один шаг Ньютона. Найдите новую невязку и оцените её соответствие учебному относительному допуску 1 % от $F_{ext}$.

**З6**

Проверка штрафного контакта Жёсткий плоский штамп прижат к линейно-упругой детали без трения силой 1000 Н. Для учебной проверки примите равномерное давление на известной площадке 100 мм². Штрафная связь задана законом $p = k_n\cdot\delta$ при проникновении δ

≥ 0; kn = 1000 Н/мм³. Найдите среднее давление и проникновение. Что изменится при десятикратном увеличении kn и почему реальная контактная модель требует дополнительной проверки?

**37**

Критическая сила идеального стержня Идеальный шарнирно опёртый с двух концов стержень длиной L = 2000 мм имеет E = 210000 МПа, I = $8 \cdot 10^6$ мм⁴. Материал остаётся линейно-упругим. Найдите силу Эйлера и коэффициент критической нагрузки относительно эталонной сжимающей силы P0 = 100000 Н. Поясните физический смысл формы потери устойчивости.

**38**

Частоты и временная проверка Двухмассовая линейная система: m1 = m2 = 2 кг, M = diag(2, 2) кг; K = [[4000, −2000], [−2000, 2000]] Н/м. Найдите собственные круговые частоты и частоты в герцах. Для дополнительной проверки временной схемы рассмотрите отдельную одномассовую систему: m = 2 кг, k = 2000 Н/м, демпфирование отсутствует, u(0) = 0, u̇(0) = 0, с t = 0 действует постоянная сила 10 Н. Запишите точный отклик и предложите порядок сравнения с численным решением.

**Практические работы**

ПР1–ПР16 соответствуют всем строкам практических занятий РПД и её собственной нумерации в разделе5.3. Ниже приведена авторская конкретизация полных условий; она не выдаётся за отдельное утверждённое пособие. Общий результат каждой работы: условие и эскиз с координатами, данные/единицы, допущения и элемент, расчёт или исполняемый файл, проверка, инженерный вывод и индивидуальное объяснение. Рейтинг каждой работы первично0–20 по единой пятикомпонентной шкале раздела4. Для повторяемых полей допустим точный указатель на предыдущий файл с перечнем изменений.

**ПР1 Модель кронштейна**

РПД 1.2, 7 семестр, 2 академических часа. Консольный прямой кронштейн: прямоугольный брус длиной 200 мм по x, шириной 20 мм по y, высотой 10 мм по z. Сталь E=210000 МПа, ν=0,3. Торец x=0 закреплён; на x=200 равномерно распределена суммарная сила 100 Н в направлении −z. Искомые величины — прогиб свободного торца и σx вдали от закрепления. Предложите балочную и объёмную идеализации; укажите необходимые данные для оболочечной альтернативы, нагрузки, связи, единицы и ограничения. Эскиз выполните с координатами. Сравните прогиб с оценкой Эйлера — Бернулли. Это полностью заданный вариант задания 1 раздела 5.1 РПД.

**ПР2 Слабая форма и стержневой элемент**

РПД 1.4, 7 семестр, 4 академических часа. Прямой стержень 0≤x≤500 мм, E=210000 МПа, A=200 мм². Для первой постановки u(0)=0, концевая сила P=10000 Н, распределённая продольная нагрузка q=0. Выведите слабую форму, $N_1$,$N_2$, B и матрицу жёсткости линейного элемента. Во второй постановке добавьте постоянную q=2 Н/мм и получите согласованный вектор узловой нагрузки. Реализуйте элемент в доступной вычислительной среде, проверьте симметрию, размерности и нулевую энергию жёсткого переноса. Показать отличие естественного условия от заданного перемещения. Соответствует заданию 2 раздела 5.1 с авторским дополнением нагрузки.

**ПР3 Плоская стержневая система**

РПД 2.2, 7 семестр, 4 академических часа. Плоская ферма: узлы 1=(0;0), 2=(500;0), 3=(500;500) мм; элементы 1–3 и 2–3, E=210000 МПа, A=100 мм² у обоих. Узлы 1 и 2 закреплены по x,y; в узле 3 Fx=1000 Н, Fy=0. Выведите преобразование координат, локальные/глобальные матрицы, соберите систему и найдите перемещения, усилия и реакции.

Подтвердите равновесие и знак растяжения/сжатия. При отключении элемента 2–3 объясните изменение ранга. Модель состоит из шарнирных стержней без изгибной жёсткости.

**ПР4 Сборка и реакции**

РПД 2.4, 7 семестр, 4 академических часа. Выполните З1. Отдельный вариант заданного перемещения: те же стержни, $u_1=0$, $u_3=0{,}1$ мм, внешняя узловая сила в узле 2 равна нулю; силовую нагрузку 10000 Н из З1 в этом варианте не прикладывать. Найдите $u_2$, усилия и обе реакции; продемонстрируйте изменение правой части при исключении известной ненулевой степени свободы. Сравните с аналитической совместностью.

**ПР5 Балка и плоская рама**

РПД 2.6, 7 семестр, 4 академических часа. Выполните З2 и составьте матрицу одного элемента с неизвестными ($v_1,\theta_1,v_2,\theta_2$). Дополнительно плоская Г-рама: узлы 1=(0;0), 2=(0;1000), 3=(1000;1000) мм; узел 1 защемлён, соединения жёсткие, элементы 1–2 и 2–3 с E=210000 МПа, A=200 мм², $I=8\cdot10^6$ мм⁴. В узле 3 Fy=−1000 Н, Fx=0, момент=0. Используйте растяжение и изгиб Эйлера — Бернулли; составьте 3 степени свободы в узле, решите, восстановите реакции и сравните концевой прогиб с балкой З2. Представьте исходную модель/скрипт и проверку энергии либо аналитическую оценку.

**ПР6 Пластина и CST**

РПД 3.2, 7 семестр, 4 академических часа. Прямоугольник $0\le x\le100$ мм, $0\le y\le50$ мм, толщина 2 мм, E=210000 МПа, $\nu=0{,}3$. На правом торце нормальное растягивающее напряжение 10 МПа; на левом ux=0, в точке (0;0) дополнительно uy=0; верхняя/нижняя кромки свободны. Плоское напряжённое состояние. Составьте две сетки CST: 2 треугольника по диагонали и регулярную 4×2 по ячейкам с двумя треугольниками в каждой. Найдите ux(100;0), uy(100;50), σx и реакции; выведите B одного треугольника. Обсудите ошибки постановки в формате мозгового штурма 2 ч внутри 4 ч, затем сдайте индивидуальный расчёт.

**ПР7 Q4 и качество сетки**

РПД 3.4, 7 семестр, 6 академических часа. Используйте прямоугольник, материал и толщину ПР6. Для patch test задайте на всех граничных узлах перемещения ux=(10/210000)x, uy=−(0,3·10/210000)y. Постройте Q4-сетки 1×1 и 2×2; у второй сместите единственный внутренний узел из (50;25) в (60;25) мм при неизменной границе. Выведите $N_i(\xi,\eta)$, якобиан и B; проверьте положительность detJ в точках интегрирования и отсутствие вырождения. Сопоставьте деформации и напряжения. Для отдельного свободного прямоугольного Q4 сравните ранг матрицы при квадратуре 2×2 и одноточечной; объясните дополнительные нулевые моды без их жёсткого подавления произвольными связями.

**ПР8 Концентратор и сходимость**

РПД 3.6, 7 семестр, 6 академических часа. Выполните З3, затем подготовьте расчёт РИЗ С1 по полной постановке ниже. На занятии сравните минимум три сетки, способ снятия величин и сообщения решателя. Численные выводы по выданной таблице З3 и по собственному расчёту С1 не смешивать. В ПР8 оцениваются корректность первичного расчёта и чтения полей, в С1 — самостоятельное уточнение, воспроизводимость и обоснованный итог.

**ПР9 3D и осесимметрия**

РПД 4.2, 8 семестр, 2 академических часа. Толстостенная открытая втулка a=10, b=20 мм, длина по z 100 мм, E=210000 МПа, $\nu=0{,}3$; внутреннее давление 10 МПа, внешнее 0; торцы свободны, осевая сила отсутствует, малые деформации. Сравните осесимметричную и 3D-модели: радиальное перемещение и окружное напряжение на внутренней поверхности в среднем сечении. Исключите только движения жёсткого тела и сохраните возможность

осевого сокращения; в осесимметрии достаточно $u_z=0$ в одной точке как отсчёта. Укажите ограничения симметрии и проверку по Ламе для $\sigma_z=0$. 2 ч командной работы входят в занятие, отчёт и защита индивидуальные.

**ПР10 Оболочечная панель**

РПД 4.4, 8 семестр, 2 академических часа. Прямоугольная консольная панель длиной 100 мм по x, шириной 20 мм, толщиной 1 мм, $E=210000$ МПа, $\nu=0{,}3$. Кромка $x=0$ защемлена, остальные свободны; постоянное давление 0,0001 Н/мм² направлено по $-z$. Малые перемещения, линейная упругость. Задайте срединную поверхность, нормаль, толщину и локальные оси; найдите прогиб в середине свободной кромки и напряжения верхней/нижней поверхностей. Сравните с оценкой консольной полосы и проверьте сетку. Объясните различие точного решения пластины и полосовой оценки; при смене нормали не менять физическое направление нагрузки.

**ПР11 Термоупругий расчёт**

РПД 5.2, 8 семестр, 2 академических часа. Выполните З4 и комплексную задачу КЗ4 ниже. Введите температуру отсчёта и отдельно температурную/упругую деформации. Для составного стержня соберите температурный вектор, восстановите N, σ и реакции. Сопоставьте свободное и ограниченное расширение. При линейном расчёте устойчивость и изгиб здесь исключены условием.

**ПР12 Нелинейное равновесие**

РПД 5.4, 8 семестр, 2 академических часа. Выполните З5. Продолжите итерации Ньютона с обновлением касательной до $|r|/200\le 0{,}01$; дополнительно сравните прямую подачу 200 Н и два шага 100+100 Н с переносом сошедшегося состояния. В протоколе храните нагрузку, u, r, Kt, поправку и число итераций. Малость невязки не считать доказательством верности принятого закона материала.

**ПР13 Контакт без трения**

РПД 5.6, 8 семестр, 2 академических часа. Выполните З6. Затем добавьте начальный зазор $g_0=0{,}02$ мм между тем же штампом и основанием. Перемещение замыкания $d\ge 0$ направлено на сближение: до $d=g_0$ давление нулевое, после $p=k_n(d-g_0)$. При перемещении $d=0{,}025$ мм найдите давление и реакцию для обоих значений $k_n$ из З6. Отличайте задачу с заданной силой и заданным перемещением. Запишите односторонние условия для идеального контакта и поясните проверку активной зоны.

**ПР14 Устойчивость стержня**

РПД 6.2, 8 семестр, 2 академических часа. Выполните З7 и КЗ5. Используйте геометрическую матрицу балочного элемента для постоянной сжимающей продольной силы, шарниры $v(0)=v(L)=0$, повороты свободны. Рассмотрите 1, 2, 4, 8 равных элементов; найдите первый положительный коэффициент относительно $P_0=100000$ Н и форму. Не добавляйте осевые ограничения, мешающие исходной равномерной силе в реальной CAE-постановке. Сравните критическую силу с Эйлером и обсудите условность амплитуды.

**ПР15 Собственные частоты**

РПД 6.4, 8 семестр, 2 академических часа. Выполните частотную часть З8 и найдите две формы, нормируя первую компоненту каждой к 1 либо массово. Для связи с конечным элементом выведите согласованную $M_e=\rho AL/6\cdot[[2,1],[1,2]]$ и сосредоточенную $\rho AL/2\cdot I$ для продольного стержня, поясните единицы. Отдельный тест: $E=210000$ МПа, $A=100$ мм², $L=1000$ мм, $\rho=7{,}85\cdot10^{-9}$ Н·с²/мм⁴, левый конец закреплён, справа свободно; сравните первую частоту для 1, 2, 4, 8 элементов двух типов масс с аналитической продольной частотой $c/(4L)$, $c=\sqrt{(E/\rho)}$. Этот тест является авторской конкретизацией темы.

**ПР16 Переходная динамика**

РПД 6.6, 8 семестр, 2 академических часа. Выполните временную часть 38. Для отдельной одномассовой задачи реализуйте Ньюмарк β=1/4, γ=1/2 на 0–1 с при Δt=0,01;0,005;0,0025 с; нагрузка 10 Н считается включённой при t=0+, начальное ускорение вычисляется из равновесия. Сравните перемещение в общих моментах, фазу, максимум абсолютной ошибки и баланс полной энергии с работой силы. Дополнительно выполните КЗ6 модальным разложением двухмассовой системы; собственные формы и коэффициенты сохраните. КР2 (РК6) в конце этого занятия — 60 минут; файлы анализа подготовьте заранее в СРС, на занятии представьте и объясните один расчётный шаг.

**Дополнительные задания раздела 5.1**

Для разведения нумерации задания текущего контроля5.1 обозначены УЗ1–УЗ8, комплексные —КЗ1–КЗ6. УЗ1 и УЗ2 содержат ту же основу, что ПР1–ПР2; полностью заданные варианты ниже заменяют отсутствующий геометрический вариант, не меняя тему.

**УЗ1**

Консольный прямой кронштейн: прямоугольный брус длиной 200 мм по x, шириной 20 мм по y, высотой 10 мм по z. Сталь E=210000 МПа, ν=0,3. Торец x=0 закреплён; на x=200 равномерно распределена суммарная сила 100 Н в направлении −z. Искомые величины — прогиб свободного торца и σx вдали от закрепления. Предложите балочную и объёмную идеализации; укажите необходимые данные для оболочечной альтернативы, нагрузки, связи, единицы и ограничения. Эскиз выполните с координатами. Сравните прогиб с оценкой Эйлера — Бернулли. Это полностью заданный вариант задания 1 раздела 5.1 РПД.

**УЗ2**

Прямой стержень $0 \le x \le 500$ мм, E=210000 МПа, A=200 мм². Для первой постановки u(0)=0, концевая сила P=10000 Н, распределённая продольная нагрузка q=0. Выведите слабую форму, $N_1, N_2$, B и матрицу жёсткости линейного элемента.

**УЗ3**

Сборка системы двух стержней Два соосных стержня соединены последовательно: узлы 1–2–3, u1 = 0. Для обоих E = 210000 МПа и L = 500 мм; A1 = 200 мм², A2 = 100 мм². В узле 3 приложена сила F = 10000 Н вдоль положительной оси. Составьте элементные и глобальную матрицы, найдите u2, u3, усилия, напряжения и реакцию. Проверьте равновесие.

**УЗ4**

Для трёх последовательно сгущённых сеток перемещение одной точки 0,800;0,880;0,900 мм. Вычислите относительные изменения по соседним сеткам со знаменателем на более мелкой сетке, сравните с учебным критерием 3% и укажите пределы вывода.

**УЗ5**

Температурные деформации и реакции Однородный стержень: L = 1000 мм, A = 200 мм², E = 210000 МПа, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Температура равномерно повышается на 50 К относительно ненапряжённого состояния. Найдите удлинение и напряжение при одном закреплённом и одном свободном конце; затем напряжение и опорные реакции при закреплении обоих концов. Продольная ось направлена слева направо.

**УЗ6**

Один шаг нелинейного решения Для нелинейной пружины внутренняя сила $F_{int}(u) = k \cdot u + \beta \cdot u^3$, где k = 100 Н/мм, β = 10 Н/мм³; внешняя сила Fext = 200 Н. Примите u0 = 1 мм. Используя r = Fext − Fint и Kt = dFint/du, выполните один шаг Ньютона. Найдите новую невязку и оцените её соответствие учебному относительному допуску 1 % от Fext.

**УЗ7**

Критическая сила идеального стержня Идеальный шарнирно опёртый с двух концов стержень длиной L = 2000 мм имеет E = 210000 МПа, $I = 8 \cdot 10^6$ мм⁴. Материал остаётся линейно-упругим. Найдите силу Эйлера и коэффициент критической нагрузки относительно эталонной сжимающей силы P0 = 100000 Н. Поясните физический смысл формы потери устойчивости.

**УЗ8**

Частоты и временная проверка Двухмассовая линейная система: m1 = m2 = 2 кг, M = diag(2, 2) кг; K = [[4000, −2000], [−2000, 2000]] Н/м. Найдите собственные круговые частоты и частоты в герцах.

**КЗ1**

Используйте З1: выведите элементные матрицы, связность и глобальную систему; решите и восстановите усилия/реакции; проверьте аналитически. Отдельно удвойте $A_2$ и объясните изменение $u_2$,$u_3$.

**КЗ2**

Балочная модель и аналитическая проверка Консоль Эйлера — Бернулли длиной L = 1000 мм имеет E = 210000 МПа, $I = 8 \cdot 10^6$ мм⁴ и расстояние до крайнего волокна y = 20 мм. На свободном конце действует поперечная сила F = 1000 Н. Определите модуль прогиба и поворота конца, максимальные изгибающий момент и напряжение; поясните проверку конечно-элементного решения. Примите малые перемещения, постоянные E и I. Дополнительно составьте матрицу одного кубического балочного элемента и полный комплект граничных условий; проверьте аналитически и укажите пределы модели.

**КЗ3**

Используйте полное условие РИЗ С1 ниже. Обоснуйте плоское напряжённое состояние, элемент, минимальные связи и три сетки; получите перемещения/напряжения в фиксированных точках, баланс и сходимость. Работа на компьютере либо защита заранее выполненного собственного расчёта.

**КЗ4**

Два соосных стержня 1–2 и 2–3 с $L_1=L_2=500$ мм, $A_1=A_2=200$ мм², $u_1=u_3=0$. $E_1=210000$, $E_2=70000$ МПа, $\alpha_1=12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_2=23 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹. Оба нагреты на 50 К относительно ненапряжённого состояния; внешней силы в узле 2 нет. Соберите систему с температурной нагрузкой, найдите $u_2$, напряжения и реакции; проверьте совместность. Изгиб и устойчивость не учитывать.

**КЗ5**

Критическая сила идеального стержня Идеальный шарнирно опёртый с двух концов стержень длиной L = 2000 мм имеет E = 210000 МПа, $I = 8 \cdot 10^6$ мм⁴. Материал остаётся линейно-упругим. Найдите силу Эйлера и коэффициент критической нагрузки относительно эталонной сжимающей силы P0 = 100000 Н. Поясните физический смысл формы потери устойчивости. Постройте балочную модель 1,2,4,8 элементов; определите первый положительный коэффициент/форму, сопоставьте с Эйлером и объясните влияние начальной кривизны. Полная CAE-модель не требуется на письменном экзамене: защищаются собственные предварительные файлы.

**КЗ6**

Двухмассовая система M=diag(2;2) кг, K=[[4000,−2000],[−2000,2000]] Н/м, C=0. Найдите частоты и нормированные формы. С t=0+ F=(0;10) Н, u(0)=u̇(0)=0. Запишите уравнения

движения, модальное решение и алгоритм на 0–1 с; проверьте временную сходимость. Предъявите выбранную нормировку и правила восстановления физического отклика.

**Письменные рубежные работы**

РК3 сохраняет исходную КР1, РК6 —исходную КР2. Остальные четыре работы дополняют контроль по всем модулям. Это письменные задания в пределах соответствующих ПР; подготовка больших файлов проводится в СРС. Для ручного расчёта разрешены калькулятор и чистый справочник формул без готовых решений; интернет, ИИ и консультации не используются. Каждый вопрос0–5, задача0–10; максимум20 первичных,10 рейтинговых. Полные условия указанных З приведены выше; преподаватель выдаёт копию вместе с текстом РК.

**РК1**

7; раздел 1. ПР2; 60 минут. Два письменных вопроса В4 и В6 (по 5), расчёт: N, B, K для E=210000 МПа, A=200 мм², L=500 мм; постоянная q=2 Н/мм, согласованный вектор нагрузки (10).

**РК2**

7; раздел 2. ПР5; 60 минут. Два письменных вопроса В9 и В14 (по 5), расчёт З2 (10).

**РК3**

7; раздел 3. ПР8; 60 минут. Исходная КР1 РПД: З1 (10), письменные В10 и В23 (по 5).

**РК4**

8; раздел 4. ПР10; 45 минут. Письменные В25 и В29 (по 5). Расчёт (10): втулка с a=10, b=20 мм, внутренним давлением 10 МПа и E=210000 МПа, ν=0,3, σz=0. Используйте σr=A−B/r², σθ=A+B/r²; определите A,B из давлений, σθ(a) и u(a) по u=((1−ν)Ar+(1+ν)B/r)/E; укажите ограничения.

**РК5**

8; раздел 5. ПР13; 60 минут. Расчёт З5 (10), расчёт З6 (10), с объяснением нелинейности и проверки.

**РК6**

8; раздел 6. ПР16; 60 минут. Исходная КР2 РПД: З4 (10), частотная часть З8 (10); программная временная реализация не требуется.

**Блок С Проверка владения методами**

**С1 Расчётно исследовательское задание**

Постройте линейную упругую модель гладкой пластины с центральным круглым отверстием: длина 200 мм по x, ширина 100 мм по y, толщина 2 мм, радиус отверстия 10 мм; E = 210000 МПа, ν = 0,3. На торцах x = ±100 мм задайте наружные равномерные растягивающие напряжения 10 МПа. Остальные кромки свободны. Используйте полную плоскую модель и минимальные связи для исключения движений жёсткого тела: ux = uy = 0 в точке (−100; 0), uy = 0 в точке (100; 0). Примите координатное начало в центре отверстия. Эти связи совместимы с симметрией выбранного нагружения; их влияние на локальные поля у точек связи следует исключить из анализа концентрации. Для не менее трёх сеток с локальным уточнением у отверстия представьте число элементов, оценку качества, относительное перемещение торцов по точкам (−100; 0) и (100; 0), σx в фиксированной точке (0; 15) мм, окружное напряжение у отверстия в точке (0; 10) мм и баланс сил. Вычисляйте величины одним и тем же способом на всех сетках. Приложите исходные файлы; обоснуйте выбранный элемент и плоское напряжённое состояние. Сравните с номинальным

напряжением и поясните, почему коэффициент 3 для бесконечной пластины нельзя безусловно требовать от данной конечной геометрии.

Задание С1 продолжается в СРС раздела3; предварительная реализация —ПР8, затем самостоятельные исправления, дополнительная проверка и защита итогового воспроизводимого пакета. Шкала0–20 первичных, до10 в R7. Требуется не более3% относительного изменения между двумя последними сетками по каждой контролируемой величине, со знаменателем на более мелкой сетке; при неудовлетворении выполняется дальнейшее исследование. Это показатель качества и предмет объяснения, а не автоматический отдельный порог зачёта. Сохранить одинаковые координаты и способ экстраполяции/усреднения на всех сетках.

| Этап С1 | Продукт | Срок | Оценивание |
|---|---|---|---|
| С1.1 | Модель, единицы, материал, минимальные связи, пробная сетка | Начало раздела3 | В составе С1 |
| С1.2 | Три сетки, качество, одинаковые точки и способ чтения | ПР8 и СРС | В составе С1 |
| С1.3 | Самостоятельная проверка, исходные файлы и обоснованный итог | Конец7 семестра | Пять критериев по0–4, всего20 |

**КРС Курсовая работа**

Основание —раздел5.2 и строка6.8 раздела4 РПД; консультации и приём в8 семестре, КрТО2 ч. В отсутствии отдельного утверждённого задания предлагается готовый вариант КРС по теме5: «Влияние радиуса центрального отверстия на напряжения и сходимость решения». Исследование развивает С1, но самостоятельные результаты8 семестра оцениваются отдельно; простое повторное представление С1 не считается курсовой.

Полное задание КРС: пластина200×100×2 мм, центр в начале координат; E=210000 МПа, ν=0,3, линейное плоское напряжённое состояние. На x=±100 мм наружные равномерные тяги10 МПа, прочие кромки свободны. Связи как в С1: ux=uy=0 в(−100;0), uy=0 в(100;0). Сравните радиусы r=5,10,15 мм; для каждого не менее трёх последовательных сеток с локальным уточнением. Не меняйте наружные размеры, нагрузку и материал. Измеряемые величины: относительное перемещение торцов по центру; σx в фиксированной общей для всех геометрий точке(0;20) мм; окружное напряжение у отверстия в(0;r); силы на торцах и баланс. Укажите элементы, порядок, качество и одинаковый способ снятия полей. Для каждой геометрии исследуйте стабилизацию последних двух значений по учебному3%; при отсутствии стабилизации уточните сетку или объясните ограничение. Сопоставьте максимальное окружное напряжение с номинальным по полному сечению и по нетто-сечению; не объявляйте коэффициент3 точным эталоном для конечной пластины. Сформулируйте инженерный вывод о влиянии радиуса без утверждения реальной прочности материала, предел текучести которого не задан.

Представить отчёт с постановкой, обзором методики и точными ссылками на использованные источники, таблицами9 и более сеточных расчётов, графиками и ограничениями; приложить модели/скрипты, параметры решения, исходные и обработанные данные, инструкцию воспроизведения. На защите до10 минут показать один вариант, объяснить выбор сетки и способ сравнения, ответить на вопрос об изменении радиуса. Объём отчёта определяется достаточностью свидетельств, не числом страниц. В2 ч КрТО выделяются консультации и защита по локальному графику без добавления часов. Работа выполняется в42 ч СРС8 семестра в составе указанных тематических заданий; конкретная детализация ниже предложена для согласования.

| Этап КРС | Результат | Срок8 семестра |
|---|---|---|
| КРС1 | Паспорт, 3 геометрии, выбранные величины/единицы и пробный расчёт | Недели1–3 |
| КРС2 | Проверка алгоритма и сеток, сравнение с С1, прослеживаемые файлы | Недели4–7 |
| КРС3 | Все варианты, сводные графики, выводы и инструкция | Недели8–11 |
| КРС4 | Сдача и индивидуальная защита | Неделя12 по графику |

Курсовая оценивается отдельно: пять критериев по0–4, сумма SKPC≤20; RKPC=5SKPC, максимум100. Критерии: обоснование модели; корректность всех данных/связей/сеток; получение и представление сравнимых результатов; равновесие и исследование сходимости; воспроизводимость и самостоятельная защита. Итоговая шкала Положения85/70/60. Дополнительных минимальных баллов по отдельным критериям не вводится. Эта схема предложена для согласования, отдельно от R8.

**Все темы курсовых работ из РПД**

1. Конечно-элементный расчёт ступенчатого стержня при растяжении и сжатии с проверкой по аналитическому решению.

2. Разработка программы расчёта плоской фермы методом конечных элементов.

3. Исследование напряжённо-деформированного состояния консольной балки при различных видах нагружения.

4. Конечно-элементный расчёт плоской рамы и исследование влияния жёсткости её элементов на перемещения.

5. Исследование концентрации напряжений в пластине с круглым отверстием.

6. Влияние формы отверстия на распределение напряжений в растягиваемой пластине.

7. Конечно-элементный анализ кронштейна при различных способах закрепления.

8. Исследование влияния радиуса галтели на концентрацию напряжений в ступенчатой детали.

9. Сравнение треугольных и четырёхугольных конечных элементов при решении плоской задачи упругости.

10. Исследование влияния размера и порядка конечных элементов на точность расчёта инженерной детали.

11. Сопоставление балочной и объёмной конечно-элементных моделей при расчёте изгиба балки.

12. Расчёт толстостенной цилиндрической втулки под внутренним давлением в осесимметричной и пространственной постановках.

13. Конечно-элементный расчёт тонкой пластины при поперечном нагружении.

14. Исследование влияния рёбер жёсткости на прогибы и напряжения тонкостенной панели.

15. Термоупругий расчёт стержневой конструкции при различных условиях ограничения температурного расширения.

16. Исследование температурных напряжений в составной детали из материалов с различными коэффициентами теплового расширения.

17. Определение критической нагрузки сжатого стержня методом конечных элементов при различных условиях закрепления.

18. Определение собственных частот и форм колебаний балки с сосредоточенной массой.

19. Исследование переходных колебаний конструкции при внезапном приложении нагрузки.

20. Конечно-элементный анализ контактного взаимодействия двух упругих деталей без трения.

Перечень тем сохранён полностью. Готовый к выдаче числовой вариант этого ФОС относится к теме5. Выбор другой темы допускается по отдельному согласованному индивидуальному заданию с полными исходными данными; само название темы не выдаётся за готовую расчётную задачу.

**Блок D Промежуточная аттестация**

**Общие вопросы раздела 5.1 РПД**

D1. Последовательность решения инженерной задачи методом конечных элементов: от физической модели до проверенного результата.

D2. Принцип виртуальных работ и получение конечно-элементных уравнений в перемещениях.

D3. Функции формы и требования к аппроксимации. Связь узловых перемещений с деформациями и напряжениями.

D4. Вывод матрицы жёсткости и вектора нагрузки двухузлового стержневого элемента.

D5. Локальные и глобальные координаты. Построение модели плоской фермы.

D6. Сборка глобальной системы, задание нулевых и ненулевых перемещений, определение реакций.

D7. Балочные элементы и расчёт рам. Границы применимости различных балочных моделей.

D8. Плоская упругость: выбор постановки, матрица упругости, особенности треугольных и четырёхугольных элементов.

D9. Изопараметрическое отображение, матрица Якоби и численное интегрирование.

D10. Влияние размера, порядка и искажения конечных элементов на точность и вычислительные затраты.

D11. Пространственные, осесимметричные и оболочечные модели: условия выбора и особенности интерпретации результатов.

D12. Термоупругая задача: температурные деформации, ограничение расширения и проверочные случаи.

D13. Нелинейное равновесие: невязка, касательная жёсткость, шаги нагружения и критерии сходимости.

D14. Контакт без трения: односторонние ограничения, штрафной подход и проверка контактного решения.

D15. Линейная потеря устойчивости: предварительное нагружение, критические коэффициенты и ограничения модели.

D16. Собственные колебания: матрицы жёсткости и масс, собственные значения, формы и нормировка.

D17. Переходные динамические процессы: начальные условия, демпфирование, прямое интегрирование и модальное разложение.

D18. Верификация и валидация. Проверка равновесия, сопоставление с эталоном, сеточная и временная сходимость, воспроизводимость расчёта.

**Зачёт в седьмом семестре**

ЗБ1–ЗБ3 образуют готовый типовой комплект: два вопроса по5 и задача10, всего20 первичных баллов. Формы зачёта/экзамена подтверждены титульной таблицей РПД; её про-

ектные оговорки не отменяют эту запись. Для оценивания зачёта применяется предложенный R7 и порог60 по Положению; при R7≥60 —«зачтено», иначе —«не зачтено». Отдельный порог10/20 и обязательные минимумы по вопросам/задаче из проектного текста РПД не применяются как дополнительные условия.

**ЗБ1**

Вопросы: В7 — Выведите матрицу жёсткости линейного стержневого элемента. В10 — Как собирается глобальная матрица по таблице связности?

Задача З1: Сборка системы двух стержней Два соосных стержня соединены последовательно: узлы 1–2–3, u1 = 0. Для обоих E = 210000 МПа и L = 500 мм; A1 = 200 мм², A2 = 100 мм². В узле 3 приложена сила F = 10000 Н вдоль положительной оси. Составьте элементные и глобальную матрицы, найдите u2, u3, усилия, напряжения и реакцию. Проверьте равновесие.

Поясните проверку, единицы и ограничения результата.

**ЗБ2**

Вопросы: В13 — Почему у балочного элемента имеются повороты и эрмитовы функции формы? В16 — Как выбрать между плоским напряжённым и плоским деформированным состояниями?

Задача З2: Балочная модель и аналитическая проверка Консоль Эйлера — Бернулли длиной L = 1000 мм имеет E = 210000 МПа, $I = 8 \cdot 10^6$ мм⁴ и расстояние до крайнего волокна y = 20 мм. На свободном конце действует поперечная сила F = 1000 Н. Определите модуль прогиба и поворота конца, максимальные изгибающий момент и напряжение; поясните проверку конечно-элементного решения. Примите малые перемещения, постоянные E и I.

Поясните проверку, единицы и ограничения результата.

**ЗБ3**

Вопросы: В20 — Как выбирают квадратуру Гаусса и чем опасен неположительный якобиан? В23 — Как построить исследование сеточной сходимости и выбрать контролируемую величину?

Задача З3: Интерпретация сеточной сходимости Для одной и той же линейной модели кронштейна получены результаты трёх последовательно сгущённых сеток. Число элементов: 1000, 4000, 16000. Перемещение точки контроля: 0,800; 0,880; 0,900 мм. Напряжение в фиксированной точке вдали от угла: 150; 158; 160 МПа. Максимальное напряжение у идеально острого закреплённого угла: 210; 295; 418 МПа. Вычислите относительное изменение двух первых величин для последних двух сеток по отношению к последней сетке. Объясните, что можно утверждать о достоверности.

Поясните проверку, единицы и ограничения результата.

**Экзамен в восьмом семестре**

ЭБ1–ЭБ5 сохраняют все пять билетов РПД: базовый вопрос, специальный вопрос и задача. Максимум20 первичных, множитель1,5 в R8. В ЭБ5 используется только частотная часть З8; программный временной расчёт защищается в ПР16/КЗ6. Выдаваемый билет содержит полные тексты условий ниже. Применяется итоговая шкала R8, а не автономная шкала17/14/10 из проектного текста РПД.

**ЭБ1**

Базовый вопрос В8: Как получить согласованные узловые силы от постоянной распределённой продольной нагрузки?

Специальный вопрос В31: Как связаны полная, упругая и температурная деформации?

Задача З4: Температурные деформации и реакции Однородный стержень: L = 1000 мм, A = 200 мм², E = 210000 МПа, α = 12·10⁻⁶ 1/К. Температура равномерно повышается на 50 К относительно ненапряжённого состояния. Найдите удлинение и напряжение при одном закреплённом и одном свободном конце; затем напряжение и опорные реакции при закреплении обоих концов. Продольная ось направлена слева направо.

Поясните проверку и пределы интерпретации; для З8 дополнительно назовите порядок проверки временной сходимости без реализации на экзамене.

**ЭБ2**

Базовый вопрос В11: Как учесть заданное ненулевое перемещение и восстановить реакции?

Специальный вопрос В35: Как построить шаг метода Ньютона для уравнения равновесия?

Задача З5: Один шаг нелинейного решения Для нелинейной пружины внутренняя сила Fint(u) = k·u + β·u³, где k = 100 Н/мм, β = 10 Н/мм³; внешняя сила Fext = 200 Н. Примите u0 = 1 мм. Используя r = Fext − Fint и Kt = dFint/du, выполните один шаг Ньютона. Найдите новую невязку и оцените её соответствие учебному относительному допуску 1 % от Fext.

Поясните проверку и пределы интерпретации; для З8 дополнительно назовите порядок проверки временной сходимости без реализации на экзамене.

**ЭБ3**

Базовый вопрос В17: Почему деформации в CST постоянны внутри элемента?

Специальный вопрос В38: Как штрафной параметр влияет на проникновение и обусловленность?

Задача З6: Проверка штрафного контакта Жёсткий плоский штамп прижат к линейно-упругой детали без трения силой 1000 Н. Для учебной проверки примите равномерное давление на известной площадке 100 мм². Штрафная связь задана законом p = kn·δ при проникновении δ ≥ 0; kn = 1000 Н/мм³. Найдите среднее давление и проникновение. Что изменится при десятикратном увеличении kn и почему реальная контактная модель требует дополнительной проверки?

Поясните проверку и пределы интерпретации; для З8 дополнительно назовите порядок проверки временной сходимости без реализации на экзамене.

**ЭБ4**

Базовый вопрос В23: Как построить исследование сеточной сходимости и выбрать контролируемую величину?

Специальный вопрос В42: Почему линейный коэффициент потери устойчивости нельзя автоматически считать запасом реальной детали?

Задача З7: Критическая сила идеального стержня Идеальный шарнирно опёртый с двух концов стержень длиной L = 2000 мм имеет E = 210000 МПа, I = 8·10⁶ мм⁴. Материал остаётся линейно-упругим. Найдите силу Эйлера и коэффициент критической нагрузки относительно эталонной сжимающей силы P0 = 100000 Н. Поясните физический смысл формы потери устойчивости.

Поясните проверку и пределы интерпретации; для З8 дополнительно назовите порядок проверки временной сходимости без реализации на экзамене.

**ЭБ5**

Базовый вопрос В24: Почему максимальное напряжение у острого угла может возрастать при сгущении сетки?

Специальный вопрос В43: Как получить уравнение Kφ = ω²Mφ и перевести ω в герцы?

Задача З8: Частоты и временная проверка Двухмассовая линейная система: m1 = m2 = 2 кг, M = diag(2, 2) кг; K = [[4000, −2000], [−2000, 2000]] Н/м. Найдите собственные круговые частоты и частоты в герцах.

Поясните проверку и пределы интерпретации; для З8 дополнительно назовите порядок проверки временной сходимости без реализации на экзамене.

## 4 Процедуры и критерии

ПР выполняется в указанных часах с подготовкой/доработкой в СРС. Разрешены конспект, калькулятор и доступная вычислительная среда по РПД: Python/NumPy/SciPy, CalculiX и Gmsh, либо Ansys/COMSOL при наличии лицензии. Допустима эквивалентная среда при сохранении проверяемых действий. Собственный программный код достаточен для малых систем; цветовая карта без исходных файлов и объяснения не подтверждает воспроизводимость. При защите студент повторяет одно действие и предсказывает изменение результата при изменении одного параметра.

| Средство | Проведение | Баллы и фиксация |
|---|---|---|
| Опрос В/У | 3–5 минут на вопрос; обратная связь | Без отдельных рейтинговых баллов |
| Тест Т | 10 минут на8 вопросов;20 на16, один ответ | Первичные0/1, диагностическая сумма |
| ПР1–ПР16 | Индивидуальный файл/расчёт, отчёт и уточнение до5 минут внутри занятия; подготовка в СРС | Пять критериев0–4, всего20; ×0,25 в семестр |
| РК1–РК6 | Письменно в ПР; РК4 —45 минут, остальные60; единые разрешённые средства | Первичные0–20; ×0,5 |
| С1 | Доработанный пакет и защита до5 минут в ПР8 по готовности | Первичные0–20; ×0,5 |
| КРС | Отчёт и файлы, защита до10 минут в пределах КрТО2 ч по графику | Первичные0–20; ×5, отдельный рейтинг |
| Зачёт D7 | 30 минут самостоятельной подготовки в резерве СРС; до4 минут уточнения и0,5 фиксации в КрТО0,1 ч | Два вопроса по5 и задача10, первичные20 |
| Экзамен D8 | 40 минут подготовки; до12 минут ответа и1,5 фиксации в КрЭк0,3 ч; подготовка в часах на контроль31,7 | Два вопроса по5 и задача10, первичные20; ×1,5 |

Регламент предложен для согласования с расписанием и нормированием контактных часов:0,1 академического часа=4,5 минуты,0,3=13,5 минуты. Он сокращает проектные10/15 минут ответа РПД до пределов указанных норм без добавления контактных часов. Зачётная подготовка30 минут входит в выделенный1 ч СРС раздела3, остальные30 минут резерва —повторение/организация. Экзаменационные40 минут подготовки входят в31,7 ч на контроль, остальное время этой позиции используется на подготовку к экзамену по графику; не добавляется к42 ч СРС.

На РК и аттестации разрешены непрограммируемый калькулятор и согласованный лист формул без решённых задач; при обоснованной необходимости —одинаково доступная вычислительная среда. Чужие решения, консультации, интернет и ИИ не используются. В С1/КРС источники разрешены с точными ссылками, самостоятельность проверяется объяснением файлов. Порядок доработки и повторного контроля определяется локальным графиком; исправление заменяет предыдущий результат по тем же критериям и не добавляет баллы сверх максимума.

| Теоретический ответ | Наблюдаемые признаки |
|---|---|
| 5 | Верные определения и зависимости, предпосылки, область и проверочный пример; самостоятельное объяснение |
| 4 | Основное верно, небольшая неточность исправлена после уточнения; смысл формул объяснён |
| 3 | Базовое содержание верно, но неполны предпосылки/проверка, нужна помощь |
| 2 | Частично верные положения, существенные пробелы в связи метода и задачи |
| 1 | Отдельные термины без связного объяснения, существенные ошибки |
| 0 | Нет ответа или он неверен по существу |

| Критерий задачи | Диапазон |
|---|---|
| Постановка и допущения | 0–2 |
| Уравнения/матрицы и граничные условия | 0–3 |
| Вычисления, знаки и единицы | 0–3 |
| Проверка и интерпретация | 0–2 |
| Итого | 0–10 |

За каждое содержательно выполненное действие внутри критерия начисляется1 балл до его максимума. Для постановки —выбор модели и допущения; для уравнений — корректные зависимости, сборка/преобразование и условия; для вычислений — необходимые промежуточные величины, итог и единицы/знаки; для проверки —контроль результата и допустимый вывод. Для З3 вместо матриц оценивается метод сравнения сеток; для З5 —итерационный шаг; для З6 —закон контакта. Описка снижает соответствующий показатель вычислений, одна первичная ошибка не штрафуется повторно за все последующие верные действия с её результатом. Обоснованные альтернативные способы допустимы.

| Каждая ПР и С1 | Максимум |
|---|---|
| Обоснование схемы, допущений и элемента | 4 |
| Материал, единицы, нагрузки, связи и сетка | 4 |
| Получение и представление результата | 4 |
| Равновесие, эталон или сходимость | 4 |
| Воспроизводимые файлы и самостоятельная защита | 4 |
| Итого | 20 |

Каждый из пяти критериев:4 —полностью выполнен и объяснён;3 —небольшая неточность;2 —основа верна, выполнено частично;1 —существенные ошибки;0 —отсутствует или не соответствует критерию. В ПР с несколькими подпунктами критерий оценивает всю работу в указанном диапазоне, максимум не умножается на подпункты. Отсутствие

заранее фиксированного эталона для открытой CAE-задачи не освобождает от равновесия и сходимости. При не достигнутом3% оцениваются фактическое качество исследования и объяснение его ограничений; это не автоматический недопуск.

| Итог R7, R8 или RKPC | Оценка |
|---|---|
| 85–100 | Отлично |
| 70–84 | Хорошо |
| 60–69 | Удовлетворительно |
| Менее60 | Неудовлетворительно |

Для зачёта R7≥60 соответствует «зачтено», R7<60 —«не зачтено». Промежуточные оценки сохраняются точными, итог округляется один раз. Исходные результаты и отчётные величины округляют по смыслу точности, а не для изменения рейтинга. Результаты семестров не складываются в200 и не усредняются самопроизвольно; официальное отражение итоговой дисциплины определяется локальным порядком.

## 5 Методические указания

| Раздел и семестр | СРС ч | Задание и результат |
|---|---|---|
| 1;7 | 14 | Идеализация и слабая форма, вывод N/B/K, подготовка ПР1–2 и РК1 |
| 2;7 | 23 | Преобразование фермы, сборка/реакции, балка/рама; ПР3–5 и РК2 |
| 3;7 | 20,9 | Плоские модели, Q4 и C1:19,9 ч; подготовка к зачёту/организация:1 ч |
| 4;8 | 10 | Осесимметрия и оболочки, ПР9–10; из них3 ч на КРС1 |
| 5;8 | 16 | Термоупругость, итерации и контакт, ПР11–13; из них5 ч на КРС2 |
| 6;8 | 16 | Устойчивость, частоты, время, ПР14–16; из них6 ч на КРС3–4 |
| Итого | 99,9 | 57,9 +42; курсовая14 ч включена в42, не прибавлена сверху |

Детализация времени курсовой и зачётного резерва предложена для согласования внутри неизменных сумм СРС. До ПР повторите линейную алгебру, упругость, виртуальные работы и проверочные формулы. Выпишите выбранную систему единиц: в Н–мм–с Е в Н/мм², плотность в Н·с²/мм⁴; не переносите число из кг/м³ без преобразования. Начните с физической постановки и эскиза, затем выбирайте элемент и сетку.

Сохраняйте геометрию, свойства, нагрузки, связи, таблицу связности и настройки решения в исходных файлах. После решения проверяйте размерности, баланс сил/моментов, невязку и эталон. При сходимости сравнивайте одну и ту же величину в одних координатах с одинаковым способом усреднения; различайте физический концентратор и сингулярность. Масштаб деформированного изображения и тип напряжения должны быть подписаны.

В нелинейных задачах фиксируйте шаг нагрузки и историю итераций. В динамике разделяйте уточнение сетки, времени и модального базиса; сохраняйте начальные условия и баланс энергии с работой внешней силы. На защите объясняйте собственные настройки и пределы результата; завершённый запуск решателя сам по себе не доказывает достоверности.

**Источники**

1. РПД «Метод конечных элементов», КРСУ,3 сентября2026 г., разделы3–5 и8. Из неё взяты компетенция, Р1–Р4, часы, банки В/У/D/Т/З, условия С1 и исходные экзаменационные билеты. ПР, дополнительные РК и готовое задание КРС конкретизированы авторски по темам РПД.

2. Приложенный макет ФОС для направления «Прикладная механика» и Положение о ФОС КРСУ, пп.3.3–3.7. Письменный РК, безусловный допуск к нему и итоговая шкала использованы по Положению.

3. Тухфатуллин Б.А. Численные методы расчёта строительных конструкций. Метод конечных элементов (теория и практика). Томск: Изд-во Томского гос. архит.-строит. ун-та,2013; Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург,2014; Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2015. Библиография перенесена из РПД; прямое заимствование новых условий из непросмотренных изданий не заявляется.

4. Bathe K.J. Finite Element Analysis of Solids and Fluids I. MIT OpenCourseWare,2.092,Fall2009. https://ocw.mit.edu/courses/2-092-finite-element-analysis-of-solids-and-fluids-i-fall-2009/ . Источник для дополнительной проверки общей методики линейного/нелинейного анализа, не для приписывания авторских заданий MIT.

5. Официальная документация CalculiX: https://www.dhondt.de/ ; Gmsh Reference Manual: https://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html ; SciPy sparse linear algebra: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.linalg.html . Фиксируйте версию фактически применённой программы. Наличие у КРСУ конкретной коммерческой лицензии этим ФОС не утверждается.