Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Министерство науки, высшего образования и инноваций
Кыргызской Республики

Межгосударственная образовательная организация высшего образования Кыргызско-Российский Славянский университет

имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта

Фонд
оценочных средств

по дисциплине «Уравнения математической физики»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»

Квалификация

бакалавр

2026 г.

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг», по программе бакалавриата КРСУ в соответствии с ФГОС 3++ по дисциплине «Уравнения математической физики».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании

Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта

протокол № 1 от «2 » сентября 2026 г.

Руководитель подразделения

_____ Алсеитов Мирлан Тилегенович
подпись *расшифровка подписи*

Исполнители:
к.ф.-м.н. _____ Герман Константин Анатольевич
должность *подпись* *расшифровка подписи*

к.т.н. _____ Джаманкулов Азамат Кенешбекович
должность *подпись* *расшифровка подписи*

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель директора по образовательной деятельности
Политехнического института

_____ Комарцов Никита Михайлович
личная подпись расшифровка подписи

Содержание

1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

2 Технологическая карта дисциплины

3 Типовые контрольные задания и иные оценочные материалы

4 Методические материалы и процедуры оценивания

5 Методические указания для обучающегося

Приложение 1 Формы фиксации результатов

Сведения о дисциплине

Показатель	Сведения
Наименование	Уравнения математической физики; цикл Б1.О.3, полный отдельный индекс в разделе 2 не указан
Направление и профиль	15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика»; «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»
Обучение	Бакалавриат, очная форма, курс 3, семестр 5; 17 2/6 недель
Трудоёмкость	4 ЗЕТ, 144 ч: лекции 24, практические 34, СРС 85,9, иная контактная работа 0,1; контактная работа всего 58,1 ч
Аттестация	Зачёт с оценкой, семестр 5; лабораторные и курсовая работа не предусмотрены
Основание	РПД утверждена 03.09.2026, одобрена 02.09.2026, протокол № 1; учебный план 26.06.2026, протокол № 11; срок действия 2026–2032
Исполнители	к.ф.-м.н. Герман Константин Анатольевич; к.т.н. Джаманкулов Азамат Кенешбекович — составители РПД;

1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

ОПК 1

ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;

Уровень 1	Формулировка РПД	Средства и этап
Знать	Способен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации проблем естественнонаучных и общеинженерных знаний	A1.1–60, A2.1–12 — начальный; D1.1–30 — базовый
Уметь	Способен применять стратегию работы на основе совместного обсуждения целей и направлений деятельности для реализации методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	B1–19; C1–3; РК1–3 — начальный; D2(B1–18) — базовый
Владеть	Способен реализовать и корректировать и применять стратегию использования естественнонаучных и общеинженерных знаний, учитывая методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.	B19: обсуждение и корректировка плана; C1–3: индивидуальный расчёт и защита — начальный; D2 — базовый

Пункт РПД	Результат обучения	Точные средства
3.1.1 Знать	типы задач, решаемых с помощью уравнений математической физики; знать основные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными	A1.1–60; A2.1–12; D1.1–30
3.2.1 Уметь	уметь использовать основные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также применять эти знания и методы к описанию и решению прикладных задач	B1–18; РК1–3; C1–3; D2
3.3.1 Владеть	иметь навыки применения методов математического моделирования динамических технологических процессов для решения теоретических и практических задач	B6–11,B16–17,B19; C1,C3; D2(B6–11,B16–17)

2 Технологическая карта дисциплины

Предложение для согласования с учётом объёма обязательных работ и отдельной аттестации: текущий и рубежный контроль 80, зачёт 20. Опросы 6; тест 6; 18 практических задач 18; три письменных РК 30; одна РГР 10; две компьютерные работы 10. Итого до зачёта 80, после зачёта 100. Исходные 100 баллов текущих работ не суммируются со вторыми 100 баллами аттестации.

Модуль	Состав и пересчёт	Мин.	Макс.	Срок
М1, раздел 1 РПД	B1–5: 50×0,1=5; опрос 1: 5×0,6=3; РК1: 10	0	18	Недели 1–5
М2, разделы 2–3	B6–11: 60×0,1=6; опрос 2: 5×0,6=3; РК2: 10; C1: 15×2/3=10	0	29	Недели 6–11

Модуль	Состав и пересчёт	Мин.	Макс.	Срок
М3, разделы 4–5	В12–18: 70×0,1=7; тест: 12×0,5=6; РК3: 10; С2 и С3: 30/3=10	0	33	Недели 12–17 2/6
До зачёта	18+29+33	0	80	Семестр 5
Зачёт с оценкой	D: 100×0,2	0	20	По расписанию
Итог	80+20	0	100	Семестр 5

Сроки ориентировочные. К письменным РК допускаются все независимо от посещаемости и выполнения других работ, п. 3.3 Положения. Посещение и активность фиксируются для обратной связи без дополнительных баллов. Начальные решения В15–16 служат обучению; в С2–3 оцениваются воспроизводимый код, расширенные проверки, сгущение сеток и защита без двойного начисления за одно действие.

3 Типовые контрольные задания и иные оценочные материалы

Блок А Проверка знаний

А1 Контрольные вопросы РПД

Все 60 вопросов шести направлений раздела 5.1 РПД. Два оцениваемых опроса по 5–10 минут: опрос 1 — вопросы 1–18, опрос 2 — 19–47; преподаватель выбирает один развёрнутый вопрос и уточнение. Критерии одного ответа: понятия и формулы 0–2, объяснение условий и метода 0–2, пример или уточнение 0–1; максимум 5×0,6=3 рейтинговых. Вопросы 48–60 обсуждаются формирующе и входят в тест, РК3, С2–3, D. Конспект во время ответа не используется.

Направление 1

А1.1 Чем уравнения с частными производными отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений?

А1.2 Как определяются порядок и линейность уравнения с частными производными?

А1.3 Какие законы и допущения используются при выводе одномерного уравнения теплопроводности?

А1.4 Как выводится уравнение малых поперечных колебаний струны? Какие факторы определяют скорость распространения волны?

А1.5 Какие физические процессы описывают уравнения Лапласа и Пуассона?

А1.6 Как классифицируется уравнение $Au_{xx}+2Bu_{x\gamma}+Cu_{\gamma\gamma}+\ldots=0$ по знаку B^2-AC?

А1.7 Что называют характеристиками и каноническим видом уравнения?

А1.8 Чем различаются задача Коши, краевая и начально-краевая задачи?

А1.9 Каков физический смысл условий Дирихле, Неймана и Робина?

А1.10 Что означает корректность задачи? Как проверяется согласование начальных и граничных условий?

Направление 2

А1.11 В чём заключается метод разделения переменных и каковы ограничения его применения?

А1.12 Как из уравнения с частными производными получается задача на собственные значения?

А1.13 Что представляют собой собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля?

А1.14 При каких условиях собственные функции ортогональны? Как учитывается весовая функция?

А1.15 Как вычисляются коэффициенты разложения функции по собственным функциям?

А1.16 Когда используются синусные и косинусные ряды Фурье?

А1.17 Как гладкость исходной функции влияет на сходимость её ряда Фурье?

А1.18 Что происходит при усечении ряда и как оценивается точность приближённого решения?

Направление 3

А1.19 Какие начальные данные необходимы для решения задачи Коши для волнового уравнения?

А1.20 Как записывается формула Даламбера и как интерпретируются её составляющие?

А1.21 Что означают область зависимости и область влияния начальных данных?

А1.22 Как проявляется конечная скорость распространения возмущений?

А1.23 Как определяются собственные формы и частоты струны с закреплёнными концами?

А1.24 Как начальное перемещение и начальная скорость определяют модальные коэффициенты?

А1.25 Как распределённая нагрузка включается в уравнения для модальных координат?

А1.26 При каких условиях возникает резонанс? Каковы ограничения модели без демпфирования?

А1.27 Как записывается энергия колебаний струны и при каких условиях она сохраняется?

Направление 4

А1.28 Какие начальные и граничные условия необходимы для задачи теплопроводности на конечном отрезке?

А1.29 Как выделение стационарной составляющей позволяет получить однородные граничные условия?

А1.30 Как строится решение задачи теплопроводности методом Фурье?

А1.31 Почему высокочастотные температурные моды затухают быстрее низкочастотных?

А1.32 Как изменяется постановка задачи при теплоизоляции концов стержня?

А1.33 Как учитываются внутренние источники тепла?

А1.34 Что представляет собой фундаментальное решение уравнения теплопроводности?

А1.35 Как решение задачи Коши выражается через свёртку с тепловым ядром?

А1.36 В чём состоит принцип максимума и как он применяется для оценки решения?

А1.37 При каких условиях сохраняется интеграл температуры по пространству и как он связан с тепловым балансом?

Направление 5

А1.38 Что называют гармонической функцией?

А1.39 Как формулируются свойство среднего и принцип максимума для гармонических функций?

А1.40 Как строится решение задачи Дирихле в прямоугольнике методом разделения переменных?

А1.41 Как используется принцип суперпозиции при неоднородных данных на нескольких сторонах области?

А1.42 Каково условие совместности задачи Неймана для уравнения Пуассона?

А1.43 Почему решение чистой задачи Неймана определяется с точностью до постоянной?

А1.44 Как записывается оператор Лапласа в полярных координатах?

А1.45 Какие требования предъявляются к решению уравнения Лапласа в центре круга?

А1.46 Почему осесимметричное решение в кольцевой области содержит логарифм радиуса?

А1.47 Что представляет собой функция Грина и как она используется для решения неоднородной краевой задачи?

Направление 6

А1.48 Как аппроксимируются первая и вторая производные на равномерной сетке?

А1.49 Как формируется разностная система для одномерной задачи Пуассона?

А1.50 Как строится пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа?

А1.51 Как учитываются граничные условия в разностной системе?

А1.52 Чем различаются аппроксимация, устойчивость и сходимость численного метода?

А1.53 Каково условие устойчивости явной схемы для одномерного уравнения теплопроводности?

А1.54 Чем отличаются явная и неявная схемы? Когда применяется метод прогонки?

А1.55 Как строится первый временной слой разностного решения волнового уравнения?

А1.56 Каков смысл условия Куранта? Что называют численной дисперсией?

А1.57 Как выполняется проверка численного решения по аналитическому эталону и на последовательности сеток?

А1.58 Как получается слабая постановка одномерной задачи теплопроводности?

А1.59 Чем различаются существенные и естественные граничные условия?

А1.60 Как формируются локальная матрица линейного конечного элемента и глобальная система?

А2 Тестовые задания

12 заданий дополнительного ФОС; 20 минут после завершения курса. Один правильный ответ. Запишите одну букву: верно 1 первичный балл, неверно, нет ответа или несколько — 0. Пересчёт ×0,5, максимум 6 рейтинговых. Конспекты, формулы, программные средства и Интернет не используются.

А2.1 Тип уравнения $u_{xx}+2u_{x\gamma}+u_{\gamma\gamma}=0$:

А — эллиптический; Б — параболический; В — гиперболический; Г — не определяется.

А2.2 Условие теплоизоляции границы при $k>0$:

А — $u=0$; Б — $\partial u/\partial n=0$; В — $u_t=0$; Г — $\Delta u=0$.

А2.3 Начальные данные для волнового уравнения второго порядка по времени:

А — только перемещение; Б — только скорость; В — перемещение и скорость; Г — перемещение и ускорение.

А2.4 Для непрерывности теплового решения при $u(0,t)=g(t)$, $u(x,0)=\varphi(x)$ необходимо:

А — $\varphi(0)=g(0)$; Б — $\varphi'(0)=g'(0)$; В — $\varphi(L)=g(0)$; Г — $\varphi(0)=0$ всегда.

А2.5 Собственные значения $X''+\lambda X=0$, $X(0)=X(L)=0$:

А — $\lambda_n=n\pi/L$; Б — $\lambda_n=(n\pi/L)^2$, $n\geq 1$; В — $\lambda_n=0$ для всех n; Г — $\lambda_n=-(n\pi/L)^2$.

А2.6 При затухании тепловых мод $\exp[-\alpha(n\pi/L)^2 t]$ быстрее затухает:

А — n=1; Б — n=2; В — n=3; Г — все одинаково.

А2.7 Решение чистой задачи Неймана для уравнения Пуассона в связной области при совместных данных:

А — единственно без дополнительных условий; Б — определено до постоянной; В — всегда отсутствует; Г — обязательно равно нулю.

А2.8 Периодическая по углу гармоническая функция в круге должна в центре:

А — быть ограниченной для регулярной задачи; Б — обязательно обращаться в бесконечность; В — содержать ln r; Г — иметь произвольный скачок.

А2.9 Условие устойчивости стандартной одномерной явной схемы тепла:

А — $\alpha\Delta t/h^2\leq 1/2$; Б — $\alpha\Delta t/h^2\geq 1/2$; В — $c\Delta t/h\leq 2$; Г — ограничений нет.

А2.10 Условие устойчивости стандартной центральной схемы волны на равномерной сетке:

А — $c\Delta t/h\leq 1$; Б — $c\Delta t/h\geq 1$; В — $\alpha\Delta t/h^2\leq 1/2$; Г — $\Delta t=h^2$ всегда.

А2.11 Основной способ оценить сеточную сходимость:

А — увеличить число знаков вывода; Б — сравнить решения на последовательности сгущающихся сеток; В — изменить цвет графика; Г — выполнить расчёт только на одной сетке.

А2.12 В слабой форме тепловой задачи заданный граничный поток является:

А — существенным условием; Б — естественным условием; В — начальным условием; Г — условием периодичности.

Блок В Проверка умений

В1–18 — полный банк РПД и дополнительного ФОС. Аналитические задачи выполняются индивидуально, при подготовке разрешены конспект и обычный калькулятор; графики допускаются в доступной системе компьютерной математики. Проверка 3–5 минут: объяснение метода и изменение параметра. Представляются полная постановка, решение, проверки и вывод. В контроле без ПО требуются аналитические выражения и объяснение построения графика, а не готовые рисунки.

Критерий В или одной задачи РК	**Макс.**
Модель условия выбор метода	2
Преобразования и вычисления	4
Проверка уравнения и условий	2
Размерности интерпретация ясность	2
Всего первичных	10

Одна В1–18: 0–10 первичных×0,1=0–1 рейтингового, вместе 18. В19 — формирующая работа по тем же показателям без добавления рейтинга. Графики включены в оценку метода и интерпретации, отдельного максимума не создают. Все символические параметры и

функции считаются заданными в условиях; численные конкретизации добавлены для воспроизводимых графиков и проверок.

B1 Модель теплопроводности

Место в РПД: 1.2. Для однородного стержня постоянного сечения вывести $\rho c_p u_t = k u_{xx} + q(x,t)$, где q — объёмная мощность источника. Левый конец имеет температуру $T_l(t)$, правый теплоизолирован. Задать начальное распределение $\varphi(x)$, условия согласования и размерности величин. Здесь u в К или °C, ρ в кг/м³, c_p в Дж/(кг·К), k в Вт/(м·К), q в Вт/м³; $L>0$. Символические $T_l(t)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции, численное решение не требуется. Дополнительно выведите модель струны с постоянным натяжением $N>0$ и линейной плотностью $\mu>0$, обозначьте допущения и размерности.

B2 Классификация

Место в РПД: 1.4. Определить тип уравнений $u_{xx}+4u_{x\gamma}+u_{\gamma\gamma}=0$; $u_{xx}+2u_{x\gamma}+u_{\gamma\gamma}=0$; $u_{xx}+u_{\gamma\gamma}=0$. Первое привести к каноническому виду с указанием замены переменных. Используйте запись $Au_{xx}+2Bu_{x\gamma}+Cu_{\gamma\gamma}$, $\Delta=B^2-AC$. Переменные и u здесь безразмерны.

B3 Согласование данных

Место в РПД: 1.5. Для $u_t=\alpha u_{xx}$, $0<x<L$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=T_0$, $u(x,0)=\varphi(x)$ проверить согласование $\varphi=0$ и $\varphi=T_0 x/L$. Объяснить последствия несогласованности для непрерывности в угловых точках. $L>0$, $\alpha>0$, $T_0\neq 0$; температуропроводность α соответствует a^2 в формулах РПД.

B4 Собственные функции

Место в РПД: 1.7. Решить $X''+\lambda X=0$, $X(0)=0$, $X'(L)=0$. Найти спектр, проверить ортогональность первых двух функций. $L>0$; X может быть нормирована произвольно. Обязательно проверьте возможность $\lambda\le 0$.

B5 Ряд Фурье

Место в РПД: 1.8. Разложить $\varphi(x)=x(L-x)$, $0<x<L$, в синусный ряд. Сравнить приближения по первым одной, трём и пяти ненулевым гармоникам. Для графиков положите $L=1$ и безразмерные x,u; сравнивайте на $x_j=j/1000$. Ненулевые гармоники считаются по числу членов, а не по максимальному номеру.

B6 Формула Даламбера

Место в РПД: 2.2. Решить $u_{tt}=c^2u_{xx}$ на всей прямой, $u(x,0)=\exp(-x^2/\ell^2)$, $u_t(x,0)=0$. Построить профили и указать направления распространения волн. Для графиков x в м, $c=1$ м/с, $\ell=1$ м, u безразмерна; $t=0,\ 0{,}5,\ 1$ с, $x\in[-4;4]$ м. Укажите область зависимости точки (x_0,t_0).

B7 Свободные колебания

Место в РПД: 2.4. Для закреплённой струны $u_{tt}=c^2u_{xx}$, $0<x<L$, $u(x,0)=A\sin(\pi x/L)+B\sin(3\pi x/L)$, $u_t(x,0)=0$. Найти решение и частоты. Для числовой проверки $L=1$ м, $c=100$ м/с, $A=0{,}001$ м, $B=0{,}0003$ м. Струна закреплена, внешняя нагрузка отсутствует.

B8 Вынужденные колебания

Место в РПД: 2.5. При нулевых начальных данных и закреплённых концах решить $u_{tt}=c^2u_{xx}+F_0\sin(\pi x/L)\cos(\Omega t)$. Получить первую модальную координату вне резонанса и при $\Omega=\pi c/L$. F_0 — амплитуда распределённой силы, делённой на линейную плотность, в м/с², а не сила в Н. $L,c>0$, $\Omega\ge 0$; численные параметры для дополнительных графиков $L=1$ м, $c=100$ м/с, $F_0=1$ м/с², $\Omega=0{,}8\pi c/L$ и $\pi c/L$, $t\in[0;0{,}1]$ с.

B9 Затухание температуры

Место в РПД: 3.2. Решить $u_t=\alpha u_{xx}$ на (0,L), $u(0,t)=u(L,t)=0$, $u(x,0)=T_0 \sin(\pi x/L)$, $T_0>0$. Определить время уменьшения максимальной температуры вдвое. $T_0>0$, L,$\alpha>0$; для числовой проверки L=0,2 м, $\alpha=10^{-5}$ м²/с, $T_0=100$ °C относительно температуры концов.

B10 Стационарная и переходная части

Место в РПД: 3.2. Решить тепловую задачу с температурами T_1 и T_2 на концах и начальным распределением $T_1+(T_2-T_1)x/L+A \sin(\pi x/L)$. Найти предел при $t\to\infty$. L,$\alpha>0$, T_1,T_2,A заданы символически. Для графика L=0,2 м, $\alpha=10^{-5}$ м²/с, $T_1=20$ °C, $T_2=40$ °C, A=10 К, t=0,100,500 с.

B11 Тепловое ядро

Место в РПД: 3.5. На всей прямой решить $u_t=\alpha u_{xx}$ при $u(x,0)=T_0$ для $|x|\le\ell$ и 0 иначе. Представить решение через ядро, исследовать сглаживание и сохранение интеграла температуры. $u_t=\alpha u_{xx}$ на всей прямой, $\alpha>0$, $\ell>0$. Для графика $\alpha=10^{-4}$ м²/с, ℓ=0,1 м, T_0=100 К, t=1,10,100 с. О значении предела в точках скачка при $t\to 0+$ скажите отдельно.

B12 Лаплас в прямоугольнике

Место в РПД: СРС 4.6. Для $0<x<L$, $0<y<H$ решить $\Delta u=0$ при нулевых данных на x=0, x=L, y=0 и $u(x,H)=T_0 \sin(\pi x/L)$. Проверить решение. L,H>0; для графиков L=1 м, H=0,5 м, T_0=100 °C. Это аналитическое задание выполняется в СРС раздела 4; дополнительных практических часов нет.

B13 Кольцевая область

Место в РПД: 4.2. Найти осесимметричное решение $\Delta u=0$ для $R_1<r<R_2$, $u(R_1)=T_1$, $u(R_2)=T_2$. Вычислить радиальную плотность теплового потока $j_r=-k\partial u/\partial r$. $R_2>R_1>0$, k>0; для числовой проверки R_1=0,1 м, R_2=0,2 м, T_1=100 °C,T_2=20 °C,k=10 Вт/(м·К). Дополнительно найдите регулярное поле в круге $r<R$ для $u(R,\theta)=\bar{T}+A\cos 2\theta$, R>0, $\bar{T}$,A заданы; проверьте ограниченность в центре.

B14 Функция Грина

Место в РПД: 4.3. Построить функцию Грина оператора $-d^2/dx^2$ на (0,L) при нулевых условиях Дирихле. Решить $-u''=f_0$ и проверить непосредственным интегрированием. L>0, f_0 задана постоянной; допустим символический ответ. Знак оператора и скачка производной G укажите явно.

B15 Сеточная сходимость

Место в РПД: 4.5 и 5.2. Для $-u''=\pi^2 \sin(\pi x)$, $0<x<1$, $u(0)=u(1)=0$ получить решение на сетках h=1/10, 1/20, 1/40. Сравнить с $\sin(\pi x)$, найти максимальную узловую ошибку и порядок сходимости. Задача безразмерна. На занятии 4.5 изучается сборка на h=1/10; на 5.2 — сгущение сеток. Итоговые 10 первичных баллов начисляются один раз; развитие кода и проверка сходимости относятся к С2.

B16 Устойчивость тепловой схемы

Место в РПД: 5.4. Для стандартной явной схемы $u_t=\alpha u_{xx}$ при $\alpha=10^{-4}$ м²/с и h=0,01 м найти предельный Δt. Сравнить Δt=0,25 с и 0,75 с. Для демонстрации взять стержень длины 0,1 м, нулевые температуры концов и начальную температуру $100 \sin(\pi x/0{,}1)$ °C. Для конечной демонстрации возьмите L=0,1 м, нулевые температуры концов, начальные внутренние значения $100\sin(\pi x/L)$ °C. Сравните 20 шагов каждого расчёта, не сравнивая разные конечные времена как один физический момент. Объясните, почему гладкий начальный профиль может не проявить неустойчивость за короткое время; при необходимости добавьте $10^{-4}(-1)^i$ К во внутренние узлы, концы оставьте нулевыми.

В17 Первый слой волновой схемы

Место в РПД: 5.4. Вывести формулу первого слоя со вторым порядком по времени для начальных φ и ψ. Проверить условие Куранта при c=100 м/с, h=0,1 м, Δt=0,0005 с. Для формулы внутреннего слоя начальные φ,ψ достаточно гладкие и согласованы с граничными данными; это задача вывода, не требуется неизвестное численное распределение.

В18 Линейные конечные элементы

Место в РПД: 5.6. Для $-u''=1$, $0<x<1$, $u(0)=u(1)=0$ получить слабую форму и решение на двух равных линейных элементах. Выписать матрицы и нагрузки, сравнить приближённую функцию с $u=x(1-x)/2$. Задача безразмерна. Сравните не только узлы, но и функцию внутри элементов. Дополнительно повторите на 4 и 8 равных элементах; используйте одну рубрику без новых баллов.

В19 Теплоизоляция и внутренний источник

Авторское задание по занятию 3.3 РПД, 2 часа, без дополнительных баллов. Однородный стержень L=0,2 м, $\alpha=10^{-5}$ м²/с, теплоизоляция обоих концов, постоянный источник $s_0=0{,}01$ К/с. Начальная температура $u(x,0)=20+10\cos(\pi x/L)$ °C. Постройте спектральное решение, найдите среднюю температуру и её производную, проверьте баланс и граничные условия. В паре обсудите цель и план проверки, затем каждый представьте свой вывод и исправление замечания. Этот план далее индивидуально развивается в С1–3.

$$u_t = \alpha u_{xx} + s, \quad u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$$

Письменный рубежный контроль

Три РК по 60 минут; один из двух вариантов, три задачи в каждом. Каждая задача оценивается по общей рубрике 0–10; балл РК=$(S_1+S_2+S_3)/3$, максимум 10 рейтинговых. Разрешён обычный непрограммируемый калькулятор; конспекты, готовые решения, ПО и Интернет не используются. Полные условия В, на которые ссылается вариант, выдаются вместе с ним. РК1 — в конце занятия 1.8, РК2 — в конце 3.5, РК3 — в конце 5.6; оставшееся время занятий посвящено объяснению решений, заранее подготовленных в СРС. Это регламент для согласования в пределах 34 часов.

РК1 Постановка и спектральные методы

РК1 А. 1. Уравнение $u_{xx}+4u_{x\gamma}+u_{\gamma\gamma}=0$: классификация и канонический вид. 2. $X''+\lambda X=0$, $X(0)=X(L)=0$, $L>0$: спектр и собственные функции. 3. Синусный ряд функции x на (0,L), включая формулу всех коэффициентов.

РК1 Б. 1. Уравнение $u_{xx}-2u_{x\gamma}-3u_{\gamma\gamma}=0$: классификация и канонический вид. 2. $X''+\lambda X=0$, $X(0)=0$, $X'(L)=0$, $L>0$: спектр и функции. 3. Косинусный ряд x на (0,L), включая постоянную составляющую. Переменные в задачах рядов безразмерны.

РК2 Волны и теплопроводность

РК2 А. 1. Закреплённая струна В7 при A=1, B=0: найдите u и частоту; символические L,c>0, u безразмерна. 2. Задача В9: найдите решение и время уменьшения амплитуды вдвое. 3. Задача В10: найдите стационарную и переходную части, предел при $t\to\infty$.

РК2 Б. 1. $u_{tt}=c^2u_{xx}$ на (0,L), $u(0,t)=u(L,t)=0$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=V\sin(2\pi x/L)$: найдите решение, L,c>0,V задана. 2. $u_t=\alpha u_{xx}$ на (0,L), $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$, $u(x,0)=T_m+A\cos(\pi x/L)$: найдите решение и предел, α>0. 3. Задача В8 при $\Omega\neq\pi c/L$: модальное уравнение и решение с нулевыми начальными данными. Данные задач полные, численный расчёт не требуется.

РК3 Поля и численная постановка

РК3 А. 1. Решите В12. 2. Решите В13 для кольца и найдите j_r; часть о круге в этот вариант не входит. 3. $-u''=2$ на (0,1), $u(0)=u(1)=0$, $h=1/4$: составьте систему и вычислите все внутренние узлы, задача безразмерна.

РК3 Б. 1. В B12 верхняя граница $T_0\sin(2\pi x/L)$, остальные три нулевые: найдите u. 2. $-u''=f_0$ на (0,L), $u'(0)=g_0$,$u'(L)=gL$: выведите совместность и общий вид решения. Производные здесь обе по положительному x, а не обе по внешней нормали. 3. Явная схема тепла: $\alpha=0{,}02$ м²/с,$h=0{,}1$ м,$\Delta t=0{,}3$ с — проверьте устойчивость и допустимый Δt. f_0,L,g_0,gL в задаче 2 заданы символически, $L>0$.

Блок С Проверка владения методами

С1 Расчётно графическая работа

Одна работа по варианту А или Б, 6–10 страниц без кода, подготовка в СРС, защита 10–15 минут в течение раздела 3. Вариант назначается до начала работы. Представляются допущения, полная постановка, вывод коэффициентов и формул, графики, проверки и вывод. Студент корректирует индивидуальный план проверки по обсуждению B19; отдельного командного балла нет. Рубрика 0–15 первичных×2/3=0–10 рейтинговых.

С1 А Свободные колебания струны

Струна длины L с закреплёнными концами, натяжением N и линейной плотностью μ имеет нулевую начальную скорость и треугольное начальное перемещение: $\varphi(x)=2Ax/L$ при $0\le x\le L/2$; $\varphi(x)=2A(L-x)/L$ при $L/2<x\le L$. Взять $L=1$ м, $N=100$ Н, $\mu=0{,}01$ кг/м, $A=0{,}001$ м.

Определить $c=\sqrt{(N/\mu)}$, собственные частоты и коэффициенты Фурье; построить решения по первым 1, 3 и 5 ненулевым модам; сравнить начальные профили; показать движение за один период первой моды; исследовать влияние удвоения N. Проверить концевые условия и энергию усечённого решения. При проверке скорости дифференцировать ряд по времени.

Для модального сравнения первые 1,3,5 ненулевых мод — номера 1; 1,3,5; 1,3,5,7,9. Сравнивайте начальный профиль на $x_j=jL/1000$ и движение на общей сетке по времени на периоде первой моды; ошибка усечения и изменение энергии усечённого ряда — разные показатели.

С1 Б Охлаждение стержня

Для $u_t=\alpha u_{xx}$ на $0<x<L$ задать $u(0,t)=u(L,t)=0$ и $u(x,0)=T_0\sin(\pi x/L)+0{,}3T_0\sin(3\pi x/L)$. Принять $L=0{,}2$ м, $\alpha=10^{-5}$ м²/с, $T_0=100$ °C. Температура отсчитывается относительно температуры концов.

Получить аналитическое решение; построить профили при t=0, 100, 500 и 1000 с; построить температуру середины; определить время уменьшения амплитуды первой моды в десять раз; исследовать влияние удвоения α. Проверить начальные и граничные условия, знаки показателей затухания и тепловой баланс с учётом потока через концы.

Для теплового баланса сначала сравнивается интеграл температуры; переход к физическому теплу потребовал бы множителя $\rho c_p S$, которого для выполнения задания не требуется. Времена профилей указаны в условии; сравнение двух α делайте при тех же x,t.

С2 Компьютерная работа по сеточной сходимости

Параметры и безразмерная задача B15 полностью сохраняются: $-u''=\pi^2\sin\pi x$ на (0,1), нулевые концы, сетки $h=1/10,1/20,1/40$. Сформируйте и решите системы, сохраните код и способ сборки, таблицу узловых ошибок относительно $\sin\pi x$, порядки $p=\log_2(E_h/E_{h/2})$, графики и относительные невязки систем. Объясните различие ошибок уравнения и дискретизации. Дополнение к B15: выведите аналитический коэффициент дискретной синусной моды и сравните его с численным результатом; оцените порядок по двум последовательным отношениям, не только по одной сетке. Рубрика 0–15/3=0–5 рейтинговых; отдельные баллы за первоначальную сборку B15 повторно не начисляются.

C3 Компьютерная работа по теплопроводности

$u_t=\alpha u_{xx}$ на $0<x<L$, $u(0,t)=u(L,t)=0$; $L=0{,}2$ м, $\alpha=10^{-5}$ м²/с, $u(x,0)=100\sin(\pi x/L)+30\sin(3\pi x/L)$ °C относительно концов. На $h=L/20$ реализуйте явную схему $r=0{,}4$ и $r=0{,}8$ и неявную назад по времени $r=0{,}8$, где $r=\alpha\Delta t/h^2$. Сравните все решения с аналитическим в момент 800 с. Число шагов должно обеспечить именно этот момент.

Для устойчивых расчётов используйте чистое начальное распределение; найдите максимальную узловую ошибку. Для отдельной демонстрации неустойчивости добавьте только во внутренние начальные узлы $10^{-6}T_0(-1)^i$ К, $T_0=100$ К, сохранив нулевые концы. Не объявляйте этот расчёт физическим решением. Сохраните графики и историю максимума нормы. Дополнительно повторите устойчивые схемы на $h=L/40$ при тех же r; отделите точность от устойчивости. Представьте алгоритмы, код, сетки и таблицы; не требуется повторный отдельный отчёт по РГР-Б, если он уже выполнен. Рубрика 0–15/3=0–5 рейтинговых.

Компьютерные работы выполняются в доступной MATLAB, GNU Octave или Python со справкой; версия указывается в отчёте. Защита каждой 5–7 минут: объяснение строки сборки, изменение сетки и интерпретация результата. Код и отчёты индивидуальные, один график не подтверждает владение методом. Численные расчёты — в СРС, не отдельные лабораторные часы.

Критерий C1 C2 или C3	Макс.
Модель и обоснование условий	3
Решение или алгоритм	4
Проверка ошибки или баланса	3
Графики и содержательные выводы	2
Индивидуальная защита	3
Всего первичных	15

Блок D Зачёт с оценкой

Два вопроса D1 по 25 и практическая задача D2 по 50 первичных, A=100; пересчёт A×0,2, максимум 20 рейтинговых. Подготовка 60 минут, объяснение до 10 минут — предлагаемый регламент. Разрешён непрограммируемый калькулятор; конспект, ПО и Интернет не используются. Для численного задания требуется вывод схемы и проверка параметров, а не запуск кода. В графических задачах достаточно аналитического представления и качественного рисунка с объяснением.

D1 Теоретические вопросы

D1.1 Вывод уравнения теплопроводности и смысл параметров.

D1.2 Вывод волнового уравнения струны и ограничения модели.

D1.3 Уравнения Лапласа и Пуассона в инженерных моделях.

D1.4 Классификация уравнений второго порядка.

D1.5 Характеристики и канонический вид.

D1.6 Типы задач, корректность и согласование данных.

D1.7 Условия Дирихле, Неймана и Робина.

D1.8 Разделение переменных и задача Штурма — Лиувилля.

D1.9 Ряды Фурье и спектральные коэффициенты.

D1.10 Формула Даламбера и область зависимости.
D1.11 Собственные формы и частоты закреплённой струны.
D1.12 Вынужденные колебания и резонанс.
D1.13 Энергия волнового движения и её сохранение.
D1.14 Теплопроводность на отрезке методом Фурье.
D1.15 Приведение неоднородных граничных условий к однородным.
D1.16 Теплоизоляция, источники и баланс тепла.
D1.17 Тепловое ядро и задача Коши.
D1.18 Принцип максимума для теплового уравнения.
D1.19 Гармонические функции, свойство среднего и принцип максимума.
D1.20 Задача Дирихле в прямоугольнике.
D1.21 Совместность и единственность задачи Неймана.
D1.22 Уравнение Лапласа в полярных координатах; круг и кольцо.
D1.23 Одномерная функция Грина и интегральное решение.
D1.24 Разностное решение задачи Пуассона и граничные условия.
D1.25 Явная и неявная схемы тепла; метод прогонки.
D1.26 Центральная схема волны, первый слой и условие Куранта.
D1.27 Аппроксимация, устойчивость, сходимость и проверка решения.
D1.28 Слабая постановка и виды граничных условий.
D1.29 Линейный конечный элемент и сборка системы.
D1.30 Сопоставление аналитических и численных подходов.

D2 Практический банк и варианты

D2.n — полное условие Bn, n=1,…,18, с теми же исходными данными. Вариант выдаётся с напечатанными двумя вопросами D1 и полным соответствующим условием B; все тексты включены в этот ФОС, обращения к отсутствующим файлам нет. B13 на зачёте включает только кольцо; B15 и B18 — вывод и аналитическая проверка схемы без исполнения программы; B16 — расчёт допустимого шага. Полный банк используется для равноценных вариантов пересдачи.

Билет	Вопрос 1	Вопрос 2	Задача
1	D1.4	D1.14	D2.7 (=B7)
2	D1.6	D1.11	D2.9 (=B9)
3	D1.7	D1.20	D2.4 (=B4)
4	D1.8	D1.17	D2.12 (=B12)
5	D1.10	D1.24	D2.10 (=B10)
6	D1.13	D1.21	D2.6 (=B6)
7	D1.1	D1.26	D2.13 (=B13)
8	D1.3	D1.25	D2.17 (=B17)
9	D1.5	D1.28	D2.14 (=B14)
10	D1.9	D1.18	D2.8 (=B8)

Билет	Вопрос 1	Вопрос 2	Задача
11	D1.16	D1.29	D2.2 (=B2)
12	D1.19	D1.27	D2.18 (=B18)

Теория за один вопрос	Макс.
Понятия и формулы	10
Вывод и условия применимости	10
Физический смысл или пример	5
Всего	25

Практическая задача	Макс.
Постановка и метод	10
Вычисления	20
Проверка	10
Интерпретация	10
Всего	50

4 Методические материалы и процедуры оценивания

4.1 Процедуры и оценивание

Условия, время, средства и критерии объявляются до контроля. Для каждого критерия максимум означает полное корректное действие, половина — верный основной метод с неполным обоснованием или локальной ошибкой, 0 — отсутствует либо принципиально неверно. Промежуточные баллы назначаются за конкретные подтверждённые этапы с пояснением; допускается шаг 0,5 первичного, в тесте только 0/1. Результат без объяснения оценивается по подтверждённым элементам, а не автоматически полным баллом.

Арифметическая ошибка не обнуляет правильную постановку и вывод. Последствия одной ошибки не штрафуются повторно. Отдельно оцениваются неверный знак оператора, несогласованная граница, неприменимый базис или нарушение устойчивости, если они меняют математическую задачу. Эквивалентные нормировки, обозначения и корректные альтернативные методы принимаются с проверкой условий.

Для C2 точный дискретный синусный эталон должен совпадать с решением системы в пределах округления (ориентир 10^{-10} на этих сетках); ошибка относительно непрерывной функции и порядок оцениваются отдельно. Для C3 сравниваются одинаковые конечные времена и одинаковые начальные данные устойчивых запусков. Предложенные численные допуски не являются дополнительными проходными баллами.

4.2 Рейтинг и итоговая шкала

$R=0{,}6(O_1+O_2)+0{,}5N_{тест}+0{,}1\Sigma B_i+\Sigma РК_j+(2/3)C1+(C2+C3)/3+0{,}2A$. $O_1,O_2\le 5$; $N_{тест}\le 12$; каждая $B_i\le 10$ ($i=1,\ldots,18$); каждый $РК\le 10$ ($j=1,2,3$); $C1,C2,C3\le 15$; $A\le 100$. Максимумы $6+6+18+30+10+10+20=100$. Промежуточные суммы не округляются; итог до целого по правилу 0,5 вверх. Распределение и округление предложены для согласования.

Итоговый рейтинг	Оценка
85–100	Отлично
70–84	Хорошо
60–69	Удовлетворительно
Менее 60	Неудовлетворительно

Порог 50 из 100 и дополнительное условие 20 из 50 за практическую часть из проекта не применяются без нормативного основания: итоговая шкала приведена к Положению. Допуск к зачёту, пересдачи, апелляции и сроки определяются действующими локальными актами КРСУ; новых ограничений здесь нет. Подписи и согласование оформляются в установленном порядке.

5 Методические указания для обучающегося

5.1 Самостоятельная работа

Пункт РПД	Часы	Содержание и распределение
1.9	24	Модели и условия 8; спектр и ряды В4–5 10; опрос 1 и РК1 6
2.6	14	Волны и В6 4; моды и В7–8 5; С1-А либо подготовка сопоставления с выбранной РГР 5
3.6	14	Тепловые решения и В9–11 5; В19 и баланс 3; С1-Б либо завершение выбранной РГР 4; РК2 и опрос 2 2
4.6	15	В12 и суперпозиция 6; кольцо и круг В13 4; Грин и Нейман В14 и подготовка РК3 5
5.7	18,9	С2 6; С3 7; слабая форма и В18 на сетках 3; тест и завершение проверки 2,9
Итого	85,9	24+14+14+15+18,9

Выбирается одна РГР А или Б; на её подготовку и защиту суммарно предусмотрено 9 часов из строк 2.6 и 3.6. Неиспользованная ветвь не становится второй обязательной РГР. Распределение внутри строк предложено для согласования; часы РПД сохранены. Контактные консультации и подготовка к зачёту 0,1 ч по 5.8 учитываются отдельно, дополнительных лабораторных часов нет.

5.2 Рекомендации

Сначала обозначьте физическую величину u, область, параметры, единицы и допущения. Выпишите полный набор условий, проверьте согласование угловых точек. Различайте знаки −Δ и Δ, температуропроводность и теплопроводность, круговую частоту и Гц, распределённую силу и ускорение в нормированном волновом уравнении.

При разделении переменных сначала решите спектральную задачу с её границами. Коэффициенты вычисляйте с учётом нормы и веса; число ненулевых членов и номер последней гармоники не совпадают. Проверяйте начальные данные, границы, уравнение и предельный режим. Сохранение энергии усечённой волновой модели не означает отсутствия ошибки усечения.

В теплопроводности отделяйте стационарную часть, источник и граничный поток. Принцип максимума применяйте с его предпосылками. В чистой задаче Неймана сначала проверьте совместность и укажите нормировку. Для круга исключите сингулярность в центре; для кольца логарифм допустим.

В коде сохраняйте сетки, параметры, метод, начальные и граничные узлы. Проверяйте устойчивость до запуска. Сравнивайте на одинаковых моментах и сетках, различайте невязку системы и ошибку решения. При проверке МКЭ сравнивайте поле внутри элементов: совпадение узлов не доказывает точности всей функции. На защите объясните собственную проверку и исправление замечания к плану.

Источники

1. РПД «Уравнения математической физики», КРСУ, утверждена 03.09.2026, разделы 3–5 и 8. 2. Приложенный «ФОС_Уравнения_математической_физики.docx» — дополнительный проект. 3. Приложенное Положение о ФОС КРСУ, пп. 3.3–3.4 и итоговая шкала. 4. Макет ФОС «Прикладная механика». Конкретизации данных, B19 и расширения проверок разработаны по содержанию РПД; внешние публикации как источник условий не заявляются.

Приложение 1 Формы фиксации результатов

ФИО _____ Группа _____ Семестр 5 Дата _____

Работа	Первичный максимум	Пересчёт	Рейтинг макс.	Получено
Опросы	10	0,6	6	
Тест	12	0,5	6	
B1–18	180	0,1	18	
РК1	10	1	10	
РК2	10	1	10	
РК3	10	1	10	
C1	15	2/3	10	
C2	15	1/3	5	
C3	15	1/3	5	
До зачёта	—	—	80	
Зачёт D	100	0,2	20	
Итог	—	—	100	

Лист зачёта с оценкой

ФИО _____ Группа _____ Дата _____ Билет _____

Часть	Первичные	Рейтинг	Замечания
D1 вопрос 1	25		
D1 вопрос 2	25		
D2 задача	50		
Билет A	100	A×0,2≤20	
До зачёта	—	≤80	
Итог	—	≤100	

До округления _____ После округления _____ Оценка _____

Уточняющий вопрос и проверки _____

Преподаватель _____ Подпись _____

Лист регистрации изменений

Дата	Раздел	Изменение и основание	Протокол подпись