



Национальная академия наук
Кыргызской Республики
Институт машиноведения
Инженерный центр «Шакирт»

ISSN 1694-7657

МАШИНОВЕДЕНИЕ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1(8)

Бишкек • 2019

УДК 621.01 : 531.8 : 004.9

**ШАР МЕНЕН ЖАРТАКТЫН СОККУЛУУ
ӨЗ АРА АРАКЕТТЕШҮҮСҮНҮН НАЗАРИЯТЫНА
К ТЕОРИИ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ШАРА С ПЛАСТИНОЙ
ON THE THEORY OF IMPACT INTERACTION
OF A BALL WITH A PLATE**

В.Э. Еремянц, Р.Е. Васильков, К.К. Урынбаев

Серпилме жана серпилме-жылышчактуу тийимдүү мүнөздөмөлөрдүн эки карама-каршы кырларында бекитилген шар менен жартактын кагылышуусунун математикалык баяндоосу келтирилди. Шардын массасынын жана диаметринин тийимдеги максималдуу күчкө карата таасири, күчтүн иш-аракетинин убактысы, жартактын бетиндеги калдыктуу тактын диаметри жана тереңдиги жана шардын ылдамдыгынын калыптануу коэффициенти аныкталды. Алынган жыйынтыктардын эксперименталдык жыйынтыктар менен салыштыруусу аткарылды.

Приведено математическое описание соударения шара с пластиной, закрепленной по двум противоположным краям при упругой и упругопластической контактной характеристике. Установлены влияние диаметра и массы шара на максимальное усилие в контакте, время действия силы, глубина и диаметр остаточного отпечатка на поверхности пластины и коэффициент восстановления скорости шара. Проведено сравнение полученных результатов с результатами эксперимента.

A mathematical description of the collision of a ball with a plate fixed at two opposite edges with elastic and elastoplastic contact characteristic is given. The authors established the influence of the diameter and mass of the ball on the maximum force in the contact, the time of the force, the depth and diameter of the residual imprint on the surface of the plate and the coefficient of speed recovery of the ball. A comparison of the results obtained with the results of the experiment.

Түйүн сөздөр: шар; жартак; сокку; күч; майышуу; соккунун узактыгы; соккудагы ылдамдыктын калыптануу коэффициенти.

Ключевые слова: шар; пластина; удар; сила; деформация; длительность удара; коэффициент восстановления скорости при ударе.

Keywords: ball; plate; impact; force; deformation; impact duration; speed recovery rate on impact.

При проектировании машин ударного действия одними из параметров, которые необходимо знать конструктору, являются контактные силы и деформации при ударном взаимодействии тел, а также

коэффициент восстановления скорости тел при ударе. Этот коэффициент оказывает существенное влияние на режим работы ударной машины. Для определения этих параметров, что является сложной задачей, существуют приближенные методы. В задачи данной работы входило определение достоверности результатов, получаемых этими методами, и оценка влияния на перечисленные параметры различных факторов.

Ранее в [1] были опубликованы результаты экспериментальных исследований процесса соударения стальных шаров различного диаметра со стальной пластиной, заземленной по двум противоположным сторонам и свободной по двум другим.

В настоящей статье с помощью инженерных методов расчета определены влияние диаметра и массы шара на максимальное контактное усилие, время действия силы, коэффициент восстановления скорости шара и остаточные пластические деформации на поверхности пластины. Решение этой задачи проводилось в два этапа. На первом этапе рассматривалась упругая модель взаимодействия сферы с пластиной, а на втором – упругопластическая модель.

Упругая модель контакта сферы с пластиной

Известно [2], что при упругом взаимодействии сферы с пластиной контактное усилие, описываемое формулой Герца, и время его действия зависят от двух коэффициентов: λ и k , представляющих собой соотношения параметров элементов системы

$$\lambda = \sqrt{k^2 - h^2}; \quad k = \sqrt{c/m}; \quad h = c/16\sqrt{Dm_0}, \quad (1)$$

где c – коэффициент жесткости контакта сферы с пластиной, m – масса сферы; D , m_0 – соответственно цилиндрическая жесткость и распределенная масса пластины:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}; \quad m_0 = \rho\delta;$$

δ – толщина пластины; E , μ , ρ – соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала сферы и пластины.

Коэффициент жесткости c найден из линеаризованной модели Герца методом последовательных приближений [2] по формуле

$$c = 1,25K^{2/3}P_m^{1/3}; \quad K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)}\sqrt{d/2}, \quad (2)$$

где d – диаметр сферы.

В соответствии с этим методом вначале задаётся некоторое значение силы P_m и по формулам (2) вычисляется коэффициент c . Затем по формулам, приведённым ниже, определяется максимальное значение контактной силы и по нему уточняется значение c и т.д. до достижения требуемой точности.

Функция контактных усилий от времени $P(t)$ и время их действия τ зависят от соотношения коэффициентов λ и k .

При начальных условиях: $P(0)=0$; $\dot{P}(0)=cV_0$ и $h < k$,

$$P(t) = \frac{cV_0}{\lambda} \exp(-ht) \sin \lambda t; \quad \tau = \pi / \lambda, \quad (3)$$

а при $h > k$

$$P(t) = \frac{cV_0}{\lambda^*} \exp(-ht) \operatorname{sh}(\lambda^* t); \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $\lambda^* = \sqrt{h^2 - \lambda^2}$;

В первом случае максимальное значение контактного усилия определяется как [2]

$$P_m = \frac{cV_0}{k} \exp\left(-\frac{h}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{h}\right), \quad (5)$$

а во втором –

$$P_m = \frac{cV_0}{h + \lambda^*} \left(\frac{h - \lambda^*}{h + \lambda^*} \right)^{(h - \lambda^*)/2\lambda^*}. \quad (6)$$

Коэффициент восстановления скорости шара после удара находили, исходя из теоремы об изменении количества движения:

$$mV - mV_0 = - \int_0^{\tau} P(t) dt.$$

После подстановки в эту формулу функции (3) получено:

$$R = \exp(-\pi h / \lambda); \quad h < k. \quad (7)$$

При $h > k$ коэффициент восстановления равен нулю.

Расчет проводился для девяти различных шаров из стали, параметры которых приведены в таблице 1. В неё включены и шары с номерами 4, 5, 9, использованные в экспериментах, описанных в работе [1]. Принималось, что удар производился по стальной пластине, использованной в эксперименте [1]. Она имела толщину 6,3 мм и размеры в плане 300×300 мм. Средняя плотность материала, найденная исходя из массы и объема шаров, составляла

7800 кг/м³. Принималось, что плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона у шаров и пластины одинаковые. При этих исходных данных цилиндрическая жесткость пластины D равна 4671 Н/м, а распределённая масса m_0 равна 49,14 кг/м².

Результаты расчета по формулам (1)–(6) представлены в таблице 1 и на рисунке 1 в виде графиков зависимостей максимального контактного усилия, времени действия силы и коэффициента восстановления скорости шара после удара R от диаметра шара.

Таблица 1 – Результаты расчета упругой модели

№ шара	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d , мм	15,0	20,5	22,5	27,1	30,2	36,0	38,0	40,0	41,3
m , г	14,0	35,6	46,7	79,8	111,5	191,0	244,0	261,4	284,6
$K \cdot 10^{10}$, Н/м ^{1,5}	1,294	1,513	1,585	1,740	1,836	2,005	2,060	2,114	2,147
$c \cdot 10^7$, Н/м ^{1,5}	9,850	12,66	13,55	15,41	16,54	18,41	18,98	19,52	19,86
$k \cdot 10^3$, с ⁻¹	83,89	59,63	53,88	43,91	38,50	31,09	29,10	27,33	26,27
$h \cdot 10^3$, с ⁻¹	12,85	16,51	17,68	20,07	21,56	24,02	24,76	25,47	25,91
$\lambda \cdot 10^3$, с ⁻¹	82,90	57,30	50,89	39,05	31,90	19,73	15,29	9,90	4,341
P_m , Н	2923	4537	5076	6184	6878	7950	8254	8533	8700
τ , мкс	37,90	54,83	61,73	80,44	98,49	159,2	205	317	724
R	0,614	0,404	0,336	0,199	0,120	0,022	0,006	0,0003	0,0000
Примечание: $E = 20,4 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0,3$.									

Из графиков на рисунке 1 следует, что с увеличением диаметра шара в 2,75 раз максимальная сила возрастает в 2,98 раза, т.е. примерно пропорционально диаметру шара. С увеличением диаметра, а следовательно, и массы шара время удара возрастает, а коэффициент восстановления скорости шара уменьшается. При этом в диапазоне изменения диаметра от 15 до 30 мм это уменьшение происходит по зависимости, близкой к линейной.

С увеличением диаметра шара свыше 42 мм длительность удара стремится к бесконечности, а коэффициент восстановления скорости шара стремится к нулю. Это соответствует условию, когда $h > k$. В этом случае при расчете следует использовать формулы (4), (6).

Упругопластическая модель контакта сферы с пластиной

Рассмотрим теперь более общую модель контактной характеристики, учитывающую упругопластические деформации (рису-

нок 2). Для этого воспользуемся методикой, предложенной М.С. Дроздом и его коллегами [3] и развитой применительно к соударению шара с пластиной в работе [2].

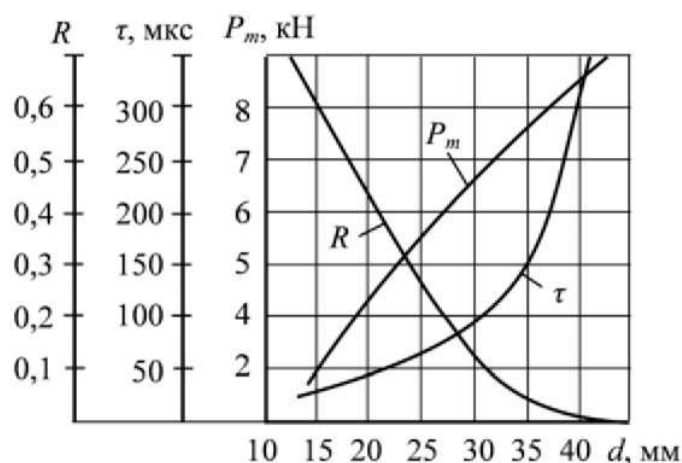


Рисунок 1 – Зависимость максимальной контактной силы P_m , времени удара τ и коэффициента восстановления скорости шара R от его диаметра d

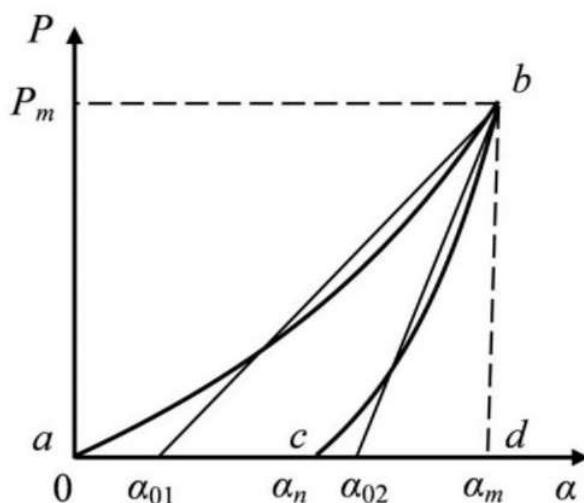


Рисунок 2 – Упругопластическая модель контактной характеристики

В соответствии с этой методикой контактное усилие на этапе нагружения (линия ab на рисунке 2) определяется по формуле

$$P_1 = b\alpha^n, \quad (10)$$

где b и n – коэффициенты, вычисляемые по определенной методике [2, 3]; α – местная контактная деформация.

Разгрузка контакта (линия bc на рисунке 2) происходит по упругому закону Герца [2, 3]:

$$P_2 = K(\alpha - \alpha_n)^{2/3}, \quad (11)$$

где α_n – остаточная пластическая деформация на поверхности пластины.

Не останавливаясь из-за ограниченного объема статьи на алгоритме определения коэффициентов b и n , приведем результаты их вычисления для некоторых шаров из таблицы 1. Эти результаты представлены в таблице 2.

Там же приведены значения остаточных пластических деформаций α_n , упругих деформаций α_y , суммарных контактных деформаций α_m и диаметров остаточных отпечатков на поверхности пластины d_n , найденных по методике [2]:

$$d_n = \sqrt{d(\alpha_m + \alpha_n)}.$$

Таблица 2 – Результаты расчета упругопластической модели

Диаметр шара, d , мм	15,0	20,5	22,5	27,1	30,2	36,0	41,3
n	1,2247	1,2201	1,2236	1,2310	1,2343	1,2412	1,2217
$b \cdot 10^8$, Н/м ^{n}	5,2636	6,4625	7,1915	8,8932	9,9865	12,2286	12,3023
$c_1 \cdot 10^7$, Н/м ^{n}	6,137	8,202	8,917	10,46	11,47	13,27	15,75
$h_1 \cdot 10^3$	8,005	10,7	11,63	13,64	14,96	17,31	20,55
$k_1 \cdot 10^3$	66,21	47,99	43,7	36,2	32,07	26,36	23,53
$\dot{\lambda}_1 \cdot 10^3$	65,72	46,79	42,12	33,53	28,37	19,88	11,45
P_m , Н	2408	3894	4416	5531	6254	7417	8336
α_n , мм	0,02098	0,02444	0,02507	0,02568	0,02567	0,02461	0,02336
α_y , мм	0,02239	0,02824	0,02997	0,03329	0,03523	0,03801	0,03608
α_m , мм	0,04337	0,5268	0,05504	0,05898	0,0609	0,06262	0,05945
d_n , мм	1,389	1,778	1,899	2,138	2,283	2,506	2,612
$c_2 \cdot 10^7$, Н/м ^{1,5}	7,654	10,05	10,85	12,55	13,62	15,45	30,63
$h_2 \cdot 10^3$	9,986	13,11	14,15	16,37	17,77	20,16	39,95
$k_2 \cdot 10^3$	73,94	53,13	48,19	39,66	34,95	28,44	32,80
$\dot{\lambda}_2 \cdot 10^3$	73,26	51,49	46,07	36,12	30,10	20,07	22,80
t_1 , мкс	22,06	28,8	30,9	35,2	38,3	43,0	–
t_2 , мкс	23,3	35,4	45,0	55,4	69,4	117,5	–
τ , мкс	45,4	64,2	75,9	90,69	107,7	160,5	–
A_0 , Дж	0,067	0,171	0,224	0,383	0,536	0,918	1,367
A_n , Дж	0,034	0,067	0,078	0,102	0,116	0,136	0,172
A_n/A_0	0,505	0,390	0,348	0,266	0,217	0,148	0,126
R	0,595	0,417	0,334	0,228	0,151	0,041	0

Из данных таблицы 2 следует, что показатель степени n при увеличении диаметра шара от 15 до 40 мм изменяется незначительно и находится в пределах $1,227 \pm 0,006$, т.е. отличается от среднего значения всего на 0,5 %.

Далее на основе линеаризации ветвей нагружения и разгрузки по методу Бидермана [4, 5] (рисунок 2) находятся коэффициенты контактной жесткости.

На этапе нагружения:

$$c_1 = 0,5(n+1)b^{1/n}P_m^{(n-1)/n}, \quad \alpha_{01} = \frac{n-1}{n+1}\alpha_m, \quad (12)$$

где P_m , α_m – максимальные значения контактной силы и деформации.

На этапе разгрузки:

$$c_2 = 1,25K(\alpha_m - \alpha_n)^{1/2}; \quad \alpha_{02} = \frac{\alpha_m}{5} - \alpha_n. \quad (13)$$

В этих формулах величина P_m по-прежнему находится методом последовательного приближения по формулам (3), (4).

Контактные усилия на этапе нагружения $P_1(t)$ вычисляются по формуле (3), в которую вместо коэффициентов c , h , k , λ , следует подставить коэффициенты c_1 , h_1 , k_1 , λ_1 , определяемые по формулам (1). Время достижения максимальной силы t_1 находится по формуле

$$t_1 = \frac{1}{\lambda_1} \arctg \frac{\lambda_1}{h_1},$$

а максимальная сила – по формуле (5) с соответствующими коэффициентами.

На этапе разгрузки зависимость усилий от времени описывается функцией:

$$P_2(t) = P_{1m} \exp(-ht^*) \left(\frac{h_2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t^* + \cos \lambda_2 t^* \right); \quad t^* = t - t_1. \quad (14)$$

При этом время, соответствующее окончанию удара, определяется как $\tau = t_1 + t_2$,

где

$$t_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left(\pi - \arctg \frac{\lambda_2}{h_2} \right). \quad (15)$$

Из таблицы 2 следует, что при диаметре шара, большем 40 мм, на этапе разгрузки выполняется условие $h > k$. При этом длитель-

ность этапа разгрузки стремится к бесконечности. Далее этот случай не рассматривается.

Сравнение данных, представленных в таблицах 1 и 2, показывает, что характер изменения максимальных усилий и времени удара в упругопластической модели такой же, как и в упругой (рисунок 1). Но при этом максимальные усилия в упругопластической модели несколько меньше, а время удара больше, чем в упругой. Это различие тем больше, чем меньше диаметр шара

Например, при диаметре шара 15 мм пластические контактные деформации приводят к уменьшению максимальных усилий на 19,5 %. Примерно настолько же увеличивается время удара. При диаметре шара 30 мм уменьшение максимальной силы составляет 9,1 %, а увеличение времени удара – 9,3 %.

Из диаграммы на рисунке 2 следует, что энергию, затраченную на пластическую деформацию, можно найти как площадь, лежащую внутри фигуры abc :

$$A_n = \int_0^{\alpha_m} P_1(\alpha) d\alpha - \int_{\alpha_n}^{\alpha_m} P_2(\alpha) d\alpha.$$

Подставляя в эту формулу функции (10), (11), после интегрирования получим

$$A_n = \frac{b}{n+1} \alpha_m^{n+1} - 0,4K(\alpha_m - \alpha_n)^{2,5}. \quad (16)$$

Результаты вычисления по этой формуле представлены в таблице 2 в виде отношения энергии, затраченной на пластическую деформацию, к кинетической энергии шара в начале удара A_n/A_0 , где $A_0 = 0,5mV_0^2$. Из них следует, что при неизменной скорости удара с увеличением диаметра, а следовательно, и массы шара энергия, затрачиваемая на необратимую контактную деформацию, растет, но отношение этой энергии к начальной энергии удара уменьшается. Например, при увеличении диаметра шара от 15 до 30 мм масса шара, а следовательно, и начальная энергия удара возрастает в 8 раз. При этом энергия, затрачиваемая на пластическую деформацию, возрастает в 3,2 раза, а отношение этой энергии к начальной энергии удара уменьшается в 2,3 раза.

Коэффициент восстановления скорости шара после удара определялся из уравнения изменения количества движения как

$$R = \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{1}{m} \left(\int_0^{t_1} P_1(t) dt + \int_0^{t_2} P_2(t) dt \right),$$

который после вычисления интегралов имеет вид:

$$R = \left[\frac{2h_1}{k_1} - \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot \left(\frac{2h_2}{k_2} - \exp(-h_2 t_2) \right) \right] \exp(-h_1 t_1). \quad (17)$$

Результаты расчета по формуле (17) приведены в таблице 2. Они мало отличаются от результатов, полученных для упругой модели.

Для оценки достоверности полученных результатов в таблице 3 представлены результаты расчета и эксперимента, описанного в работе [1]. Из этих данных следует, что отличие расчетных значений диаметра остаточного отпечатка на поверхности пластины от экспериментальных данных для шаров диаметром 27–30 мм меньше 1 %, а для шара диаметром 41 мм составляет 2,5 %, что лежит в пределах погрешности эксперимента.

Таблица 3 – Сравнение теоретических и экспериментальных результатов

Диаметр шара, мм	Диаметр отпечатка, d_n , мм			Коэффициент восстановления, R	
	теория	эксперимент	ε %	теория	эксперимент
27,1	2.14	2.16	< 1%	0,228	0,04–0.08
30,2	2,28	2,30	< 1%	0,151	0,06–0.12
41,3	2.61	2.68	2,5%	0	0,12–0.24

Отсюда следует вывод, что контактная сила, по которой рассчитывались пластические деформации, и эти деформации найдены с такой же точностью. Это подтверждает достоверность результатов расчета упругопластических деформаций и контактной силы по методике, предложенной М.С. Дроздом и его коллегами [3].

В то же время результаты расчета коэффициента восстановления скорости шара после удара существенно отличаются от экспериментальных результатов, полученных в работе [1]. Если при расчете с увеличением диаметра шара коэффициент восстановления его скорости уменьшается, то в экспериментах [1], наоборот, возрастает. Очевидно, что это является следствием неучёта волн деформаций, возвращающихся к точке удара от границ пластины. Чем больше диаметр шара, тем больше длительность взаимодействия шара с пла-

стиной и тем больше вероятность того, что к его окончанию на шар будут действовать отраженные волны, увеличивая скорость его отскока от пластины. В связи с этим задачей дальнейших исследований является уточнение модели сферы с пластиной с учетом граничных условий.

Литература

1. Еремьянц, В.Э., Васильков, Р.Е. К оценке влияния конструкционной податливости объекта на коэффициент восстановления скорости сферы при ударе // Машиноведение: Научно-технический журнал. Бишкек, 2018. 1(7). С. 15–22.
2. Еремьянц, В.Э. Динамика ударных систем. В 2-х частях. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2013. Часть 1 – 322 с. Часть 2 – 322 с.
3. Дрозд, М.С., Матлин, М.М., Сидякин, Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации М.: Машиностроение, 1986. 220 с.
4. Бидерман, В.И. Прикладная теория механических колебаний: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1972. 416 с.
5. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1977. 224 с.