Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Министерство науки, высшего образования и инноваций
Кыргызской Республики

Межгосударственная образовательная организация высшего образования Кыргызско-Российский Славянский университет

имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта

Фонд
оценочных средств

по дисциплине «Вариационное исчисление»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»

Квалификация

бакалавр

2026 г.

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг», по программе бакалавриата КРСУ в соответствии с ФГОС 3++ по дисциплине «Вариационное исчисление».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании

Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта

протокол № 1 от «2 » сентября 2026 г.

Руководитель подразделения

_____ Алсеитов Мирлан Тилегенович
подпись *расшифровка подписи*

Исполнители:

к.ф.-м.н. _____ Герман Константин Анатольевич
должность *подпись* *расшифровка подписи*

к.т.н. _____ Джаманкулов Азамат Кенешбекович
должность *подпись* *расшифровка подписи*

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель директора по образовательной деятельности
Политехнического института

_____ Комарцов Никита Михайлович
личная подпись расшифровка подписи

Содержание

1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

2 Технологическая карта дисциплины

3 Типовые контрольные задания и иные оценочные материалы

4 Методические материалы и процедуры оценивания

5 Методические указания для обучающегося

Приложение 1 Формы фиксации результатов

Сведения о дисциплине

Показатель	Сведения
Дисциплина	Вариационное исчисление; цикл Б1.О.3. Отдельный полный индекс дисциплины в разделе 2 РПД не указан
Направление и профиль	15.03.03 — РФ, 650500 — КР «Прикладная механика»; «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»
Обучение	Бакалавриат, очная форма, курс 2, семестр 4; 18 недель
Трудоёмкость	3 ЗЕТ; 108 ч. Лекции 18; практические занятия 36; иная контактная работа 0,1; контактная работа всего 54,1; СРС 53,9 ч
Аттестация	Зачёт с оценкой, семестр 4. Курсовых работ и лабораторных занятий нет
Основание	РПД утверждена 03.09.2026; одобрена 02.09.2026, протокол № 1; учебный план от 26.06.2026, протокол № 11; срок действия 2026–2032
Исполнители	к.ф.-м.н. Герман Константин Анатольевич; к.т.н. Джаманкулов Азамат Кенешбекович — составители РПД.

1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины

ОПК 11

ОПК-11: Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии;

Уровень 1	Формулировка РПД	Средства и этап
Знать	Знает критерии оценки, методы и средства анализа, систематизации и прогнозирования естественно-научных проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.	A1.1–9, A2.1–10 — начальный; D1.1–30 — базовый
Уметь	Умет абстрактно мыслить, анализировать, оценивать, систематизировать и прогнозировать естественно-научные проблемы, возникающие в ходе профессиональной деятельности.	B1.1–B3.6, РК1–2, C1–2 — начальный; D2.1–10 — базовый
Владеть	Владеет методами и средствами решения естественно-научных проблем, с помощью привлечения физико-математического аппарата и современных компьютерных технологий, возникающих в ходе профессиональной деятельности	C1–2, B3.5–6 — начальный; D2.6–10 и объяснение алгоритма — базовый

Пункт РПД	Результат обучения	Конкретные средства
3.1.1	основные понятия вариационного исчисления, постановки классических задач вариационного исчисления,	A1.1–9; A2.1–10; D1.1–30
3.1.2	методы их решения	A1.2–9; A2.4–10; D1.5–30
3.2.1	решать базовые задачи вариационного исчисления	B1.2–B3.6; РК1–2; D2.1–10
3.3.1–3.3.2	Владеет методами решений классических задач вариационного исчисления	C1–2; РК1–2; D2.1–10

В РПД строка «исчисления» ошибочно выделена как пункт 3.3.2; здесь она объединена с 3.3.1 без добавления нового результата. Уровни 2 и 3 не заполнены, официальные коды индикаторов не добавляются. A1.тема/номер — точный шифр вопроса; диапазон A1.1–9 охватывает все девять банков. Начальный этап — текущий и рубежный контроль; базовый — аттестация по дисциплине.

2 Технологическая карта дисциплины

Предложение для согласования на основе раздела 5.3 РПД: опрос — 5; тест — 5; пять практических решений — 10; РК1 и РК2 — по 10; C1 и C2 — по 10; аттестация — 40. До аттестации 60, итог 100. Ориентировочные недели соотносятся с тремя содержательными разделами; четыре строки контрольных направлений раздела 5.3 не создают четвёртого тематического раздела РПД. Тест содержит вопросы по свободным границам, Лежандру и Ритцу, поэтому предлагается проводить его после темы 9, а не после первых двух тем, как сказано в общем регламенте исходника.

Модуль	Средства	Мин.	Макс.	Срок
M1, раздел 1	Опрос A1.1–3: 2,5; B1.2 и B1.5: 4	0	6,5	Недели 1–6

Модуль	Средства	Мин.	Макс.	Срок
М1 РК	РК1, письменный	0	10	Конец раздела 1, неделя 6
М1 всего	6,5+10	0	16,5	6
М2, раздел 2	Опрос А1.4–6: 2,5; В2.1 и В2.4: 4	0	6,5	Недели 7–12
М2 РК	РК2, письменный	0	10	Конец раздела 2, неделя 12
М2 всего	6,5+10	0	16,5	12
М3, раздел 3	В3.1: 2; А2: 5; С1: 10; С2: 10	0	27	Недели 13–18
До аттестации	16,5+16,5+27	0	60	Семестр 4
Зачёт с оценкой	D: два вопроса по 10, задача 20	0	40	По расписанию
Итог	60+40	0	100	Семестр 4

К письменному рубежному контролю допускаются все обучающиеся независимо от посещаемости и выполнения других работ — п. 3.3 Положения. Посещение и активность фиксируются для обратной связи; дополнительных баллов сверх 100 нет. Все 18 практических выполняются, но рейтингу подлежат только пять явно указанных решений; прочие проверяются формирующе. С1 и С2 оценивают расширенный итог СРС и защиту, а не повторно те же действия практического занятия.

3 Типовые контрольные задания и иные оценочные материалы

Блок А Проверка знаний

А1 Контрольные вопросы

Все 62 вопроса девяти тем раздела 5.1 РПД. Два оцениваемых ответа: один по темам 1–3, другой по темам 4–6; 5–7 минут каждый. Темы 7–9 обсуждаются формирующе и включены в аттестацию. Один ответ 0–2,5: основные положения 0–1; обоснование и терминология 0–1; корректный пример или ответ на уточнение 0–0,5. Конспект при ответе не используется. Преподаватель выбирает вопрос из объявленной темы.

Тема 1 Функционалы и вариации

А1.1/1 Что называется функционалом? Чем функционал отличается от функции нескольких переменных?

А1.1/2 Какие функционалы используются для описания длины кривой, энергии деформации и действия механической системы?

А1.1/3 Что представляет собой множество допустимых функций? Как оно определяется граничными условиями?

А1.1/4 Что называется вариацией функции? Какие требования предъявляются к допустимым вариациям при закреплённых концах?

А1.1/5 Как определяется первая вариация функционала?

А1.1/6 Чем стационарность функционала отличается от наличия его минимума или максимума?

А1.1/7 В чём различие слабого и сильного локальных экстремумов?

Тема 2 Уравнение Эйлера Лагранжа

А1.2/1 Как вычисляется первая вариация функционала $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$?

А1.2/2 Для чего при вычислении первой вариации применяется интегрирование по частям?

А1.2/3 Как формулируется основная лемма вариационного исчисления?

А1.2/4 Как выводится уравнение Эйлера — Лагранжа?

А1.2/5 Почему уравнение Эйлера — Лагранжа является необходимым условием экстремума?

А1.2/6 Как граничные условия исходной задачи используются при определении экстремали?

Тема 3 Первые интегралы и классические задачи

А1.3/1 Как упрощается уравнение Эйлера — Лагранжа, если подынтегральная функция не зависит явно от y?

А1.3/2 При каком условии применяется тождество Бельтрами?

А1.3/3 Как первые интегралы позволяют уменьшить порядок уравнения для экстремали?

А1.3/4 Как строится функционал времени движения в задаче о брахистохроне?

А1.3/5 Как записывается функционал площади поверхности вращения?

А1.3/6 Почему найденное решение необходимо проверять на соответствие области определения и граничным условиям?

Тема 4 Свободные границы и трансверсальность

А1.4/1 Чем задача со свободным значением функции на конце отличается от задачи с закреплёнными концами?

А1.4/2 Как из первой вариации получаются естественные граничные условия?

А1.4/3 Почему при свободном значении функции на конце соответствующая вариация может быть ненулевой?

А1.4/4 Что называется условием трансверсальности?

А1.4/5 Каков геометрический смысл трансверсальности в задаче о кратчайшей линии до заданной кривой?

А1.4/6 Чем существенные граничные условия отличаются от естественных на примере упругого стержня?

Тема 5 Несколько функций и ограничения

А1.5/1 Как записывается система уравнений Эйлера — Лагранжа для функционала нескольких функций?

А1.5/2 Что называется изопериметрической задачей?

А1.5/3 Как строится расширенный функционал при интегральном ограничении?

А1.5/4 Как определяется множитель Лагранжа?

А1.5/5 Чем интегральное ограничение отличается от ограничения, выполняющегося в каждой точке?

А1.5/6 Почему множитель Лагранжа при поточечном ограничении может быть функцией независимой переменной?

А1.5/7 Как формулируется вариационная задача о равновесии тяжёлой гибкой нити заданной длины?

Тема 6 Вторая вариация и минимум

А1.6/1 Как определяется вторая вариация функционала?

А1.6/2 Как знак второй вариации связан с характером стационарной функции?

А1.6/3 Как формулируется необходимое условие Лежандра?

А1.6/4 Почему выполнение условия Лежандра само по себе не гарантирует минимум?

А1.6/5 Для чего используется уравнение Якоби?

А1.6/6 Что называется сопряжённой точкой?

А1.6/7 Как выпуклость подынтегральной функции помогает обосновать минимум функционала?

Тема 7 Принцип Гамильтона

А1.7/1 Что называется функционалом действия?

А1.7/2 Как формулируется принцип Гамильтона?

А1.7/3 Какие ограничения накладываются на вариации обобщённых координат на концах временного интервала?

А1.7/4 Как из принципа Гамильтона выводятся уравнения Лагранжа второго рода?

А1.7/5 Что называется циклической координатой? Какой первый интеграл ей соответствует?

А1.7/6 При каких условиях сохраняется энергия механической системы?

А1.7/7 Почему стационарность действия не следует автоматически отождествлять с его минимумом?

Тема 8 Энергетические постановки механики

А1.8/1 Как строится функционал полной потенциальной энергии упругой системы?

А1.8/2 Как из условия стационарности энергии выводится уравнение равновесия растянутого стержня?

А1.8/3 Как в вариационной постановке учитываются распределённая и сосредоточенная нагрузки?

А1.8/4 Почему функционал энергии изгиба балки содержит вторую производную прогиба?

А1.8/5 Как записывается уравнение Эйлера — Пуассона для функционала, зависящего от y''?

А1.8/6 Какие естественные граничные условия возникают в задаче об изгибе балки?

А1.8/7 Что называется слабой формой краевой задачи?

А1.8/8 Как из функционала поля получается уравнение Пуассона?

Тема 9 Метод Ритца и компьютерная реализация

А1.9/1 В чём состоит идея метода Ритца?

А1.9/2 Каким требованиям должны удовлетворять базисные функции?

А1.9/3 Как учитываются неоднородные существенные граничные условия?

А1.9/4 Как из функционала получается система уравнений для неизвестных коэффициентов?

А1.9/5 Как оценивается качество приближённого решения?

А1.9/6 Что представляет собой отношение Рэлея в задаче о собственных колебаниях?

А1.9/7 Как метод Ритца связан с методом конечных элементов?

А1.9/8 Какие проверки необходимы при компьютерной реализации вариационного расчёта?

А2 Тематический тест

10 заданий из РПД, по одному правильному ответу, 15 минут после темы 9 (конец семестра). Выберите одну букву. За верный ответ 0,5; за неверный, отсутствующий или несколько ответов — 0. Максимум 5. Конспекты, программные средства и Интернет не используются. Дополнительные штрафы не применяются. Обозначение F_y′ означает частную производную F по аргументу y′; F_y′y′ — вторую по нему.

А2.1 Функционал ставит в соответствие допустимой функции

А) число; Б) только её производную; В) только другую функцию; Г) только множество точек.

А2.2 При y(a)=A, y(b)=B допустимая вариация удовлетворяет

А) η(a)=A, η(b)=B; Б) η(a)=η(b)=0; В) η′(a)=η′(b)=0 при любых вариациях; Г) никаким граничным ограничениям.

А2.3 Нулевая первая вариация для всех допустимых вариаций означает

А) обязательно строгий минимум; Б) обязательно максимум; В) стационарность; Г) отсутствие граничных условий.

А2.4 Уравнение Эйлера — Лагранжа для ∫F(x,y,y′)dx

А) F_y+d(F_y′)/dx=0; Б) F_y′=0 во всех задачах; В) F_y=0 во всех задачах; Г) F_y−d(F_y′)/dx=0.

А2.5 Если F не зависит явно от y, то вдоль экстремали

А) F_y′=const; Б) y=0; В) F=0; Г) y′=0.

А2.6 Если F не зависит явно от x, применимо

А) F_x=1; Б) F−y′F_y′=const; В) F+y=const; Г) y″=0 во всех случаях.

А2.7 b фиксировано, y(b) свободно, концевое слагаемое отсутствует. Естественное условие

А) y(b)=0; Б) y′(b)=0 для любого F; В) F_y′(b)=0; Г) F_y(b)=0.

А2.8 При ∫Gdx=C расширенная подынтегральная функция

А) F+λG; Б) FG; В) F/G; Г) F+G′.

А2.9 Необходимое условие Лежандра для слабого минимума

А) F_y′y′<0; Б) F_y′=1; В) F_y>0; Г) F_y′y′≥0.

А2.10 Пробные функции Ритца должны заранее удовлетворять

А) всем естественным условиям точно; Б) существенным граничным условиям; В) только положительности; Г) только постоянству производной.

Блок В Проверка умений

18 практических по 2 часа в соответствии с кодами РПД ниже. Индивидуальная письменная работа с объяснением 3–5 минут; в В3.1 предусмотрено интерактивное обсуждение, итог индивидуален. Для аналитических занятий разрешены конспект и обычный калькулятор, для В3.6 — доступная система компьютерной математики и встроенная справка. Интернет и помощь других лиц при индивидуальной защите не используются. Представляются постановка, допустимый класс, вывод, решение, проверки и вывод о применимости.

В1.2, В1.5, В2.1, В2.4, В3.1 оцениваются каждая 0–2: постановка и вариации 0–0,5; метод и преобразования 0–1; проверка 0–0,5. Остальные работы — обратная связь по той же

структуре без добавления рейтинга. Если занятие включает несколько пунктов, максимум относится к работе целиком.

Письменные РК входят в 36 практических часов: 60 минут РК1 в конце занятия 1.9 и 80 минут РК2 в конце занятия 2.9; остальные 60 и 40 минут — разбор заранее подготовленных решений В1.6 и В2.6. Подготовка предусмотрена СРС 1.10 и 2.10. Это предлагаемый регламент для согласования, дополнительных часов нет. Каждая работа РК выполняется индивидуально без конспектов, вычислительных систем и Интернета; разрешён обычный калькулятор.

В1.1 Допустимые функции и функционалы

Занятие РПД 1.2, 2 часа. Для y(0)=0, y(1)=1 задайте $y=y_0+\varepsilon\eta$. Укажите требования к y_0 и η, два допустимых и один недопустимый пример η. Запишите функционалы длины графика, энергии стержня и действия одномассовой системы; обозначьте величины и единицы. Задание 1 РПД дополнено сопоставлением трёх моделей.

В1.2 Первая вариация

Занятие РПД 1.3, 2 часа. Вычислите первую вариацию, выделите граничное слагаемое и получите условие стационарности. Укажите допустимые вариации. Задание 2 РПД.

$$J[y]=\int_0^1 ((y')^2+y^2)\,dx,\quad y(0)=y(1)=0$$

В1.3 Уравнение Эйлера Лагранжа

Занятие РПД 1.5, 2 часа. Найдите экстремаль, проверьте условия и обоснуйте характер экстремума. Задание 3 РПД.

$$J[y]=\int_0^1 ((y')^2+2y)\,dx,\quad y(0)=y(1)=0$$

В1.4 Краевая задача для экстремали

Занятие РПД 1.6, 2 часа. Решите краевую задачу, определите постоянные, проверьте уравнение и граничные значения, обоснуйте минимум. Авторская конкретизация занятия; функционал взят из банка аттестации РПД.

$$J[y]=\int_0^1 ((y')^2+y^2)\,dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=1$$

В1.5 Первый интеграл

Занятие РПД 1.8, 2 часа. Получите первый интеграл, найдите экстремаль и объясните геометрический смысл. Задание 4 РПД.

$$J[y]=\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=1$$

В1.6 Классические задачи

Занятие РПД 1.9, 2 часа. 1. Для поверхности вращения примените тождество Бельтрами, получите семейство экстремалей и систему для постоянных; не объявляйте стационарность достаточной для минимума. a<b, A,B>0 заданы символически. 2. Постройте функционал времени брахистохроны: точка стартует из покоя в (0,0), конец (π м,2 м), ось y вниз, g=9,81 м/с², трение отсутствует. Найдите параметрическую экстремаль и проверьте конечную точку. Пункт 1 — задание 5 РПД, пункт 2 — авторское дополнение по теме занятия.

$$S[y]=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx,\quad y(a)=A,\ y(b)=B,\ y>0$$

B2.1 Свободное значение на конце

Занятие РПД 2.2, 2 часа. Выведите естественное условие справа и решите краевую задачу. Задание 6 РПД.

$$J[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y')^2 - y\right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) \text{ свободно}$$

B2.2 Трансверсальность

Занятие РПД 2.3, 2 часа. Точка A=(0,0) закреплена, второй конец перемещается по прямой x+y=2. Постройте функционал длины, выведите трансверсальность, найдите кратчайшую кривую и её конец. Задание 7 РПД. Допускаются плоские гладкие кривые; рассматривайте параметрическое описание либо график с переменным правым концом.

B2.3 Две искомые функции

Занятие РПД 2.5, 2 часа. Составьте систему уравнений Эйлера — Лагранжа, найдите стационарные функции, обоснуйте характер экстремума. Задание 8 РПД.

$$J[y, z] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2)\, dx, \quad y(0) = z(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(1) = 2$$

B2.4 Интегральное ограничение

Занятие РПД 2.6, 2 часа. Постройте расширенный функционал, определите экстремаль и множитель, проверьте ограничение и минимум. Задание 9 РПД. Используйте соглашение F+λy.

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2\, dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y\, dx = 1$$

B2.5 Вторая вариация

Занятие РПД 2.8, 2 часа. Вычислите вторую вариацию и проверьте условие Лежандра. С помощью неравенства Пуанкаре определите характер y=0 при α≥0, L>0; отдельно рассмотрите границу. Задание 10 РПД.

$$J[y] = \int_0^L ((y')^2 - \alpha y^2)\, dx, \quad y(0) = y(L) = 0$$

B2.6 Условие Якоби и выпуклость

Занятие РПД 2.9, 2 часа. Для функционала B2.5 положите L=π. Получите уравнение Якоби вдоль y=0 и первую сопряжённую точку при α>0; рассмотрите α=0. Сопоставьте α=0,5; 1; 2 с анализом второй вариации. Для B1.4 обоснуйте глобальный минимум выпуклостью. Авторское задание по содержанию занятия.

B3.1 Принцип Гамильтона

Занятие РПД 3.2, 2 часа. Для m=2 кг, k=200 Н/м, q(0)=0,01 м, $\dot{q}(0)=0$ постройте действие через $T=m\dot{q}^2/2$ и $U=kq^2/2$, выведите уравнение движения и проверьте сохранение энергии. Покажите различие временных граничных условий вариационного вывода и начальных условий решения. В парах обсудите знаки энергий, затем оформите индивидуальное решение. Задание 11 РПД конкретизировано численно; 2 интерактивных часа по РПД.

В3.2 Плоский маятник

Занятие РПД 3.3, 2 часа. Для m=1 кг, l=1 м, g=9,81 м/с², φ(0)=0,1 рад, φ̇(0)=0 постройте действие, выведите нелинейное уравнение, малое линейное приближение и интеграл энергии. Численное интегрирование не обязательно. Основа — задача 5 банка РПД, данные авторские.

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad U = mgl(1 - \cos\varphi)$$

В3.3 Упругий стержень

Занятие РПД 3.5, 2 часа. Постройте первую вариацию, уравнение равновесия, естественное условие и слабую форму. EA>0 постоянно, p(x) задана, P задана, u(0)=0. Обозначьте единицы. Задание 12 РПД.

$$\Pi[u] = \frac{1}{2}\int_0^L E\,A(u')^2 dx - \int_0^L p\,(x)u\,dx - Pu(L)$$

В3.4 Консольная балка

Занятие РПД 3.6, 2 часа. Выведите уравнение Эйлера — Пуассона и полный комплект граничных условий при отсутствии концевой силы и момента. EI>0 постоянно, q(x) задана, w(0)=w′(0)=0. Задание 13 РПД. Дополнительно решите случай L=2 м, EI=20 000 Н·м², q_0=1000 Н/м и найдите w(L). Положительные q и w направлены одинаково.

$$\Pi[w] = \frac{1}{2}\int_0^L E\,I(w'')^2 dx - \int_0^L q\,(x)w\,dx$$

В3.5 Метод Ритца

Занятие РПД 3.8, 2 часа. Для стержня L=2 м, E=200 ГПа, A=100 мм², p_0=1000 Н/м, P=0, u(0)=0 составьте и минимизируйте П в приближениях $u_1=a_1x$ и $u_2=a_1x+a_2x^2$. Сравните u(L), поле перемещения и П с точным решением. Задание 14 РПД конкретизировано численно. Начинайте с функционала В3.3.

В3.6 Компьютерная реализация

Занятие РПД 3.9, 2 часа. Реализуйте В3.5 в доступной системе компьютерной математики, сохраните скрипт и графики. Сформируйте матрицу из интегралов, проверьте существенное условие и сравните поле и энергию с аналитическим результатом. Задание 15 РПД; развитие и итоговая защита относятся к С2, повторных баллов за один результат нет.

Письменный рубежный контроль

РК1 Первая вариация и первые интегралы

60 минут, один из двух вариантов, 10 баллов. Задача 1 — 6: вариации и первая вариация 2; уравнение 1; решение с границами 2; минимум 1. Задача 2 — 4: первый интеграл 2; решение 1; проверка и геометрический смысл 1.

РК1 А. 1. Для функционала В1.3 вычислите первую вариацию, найдите экстремаль и обоснуйте минимум. 2. Решите В1.5 с использованием первого интеграла. Условия В1.3 и В1.5 выдаются вместе с вариантом без решений.

РК1 Б. 1. Вычислите первую вариацию, найдите экстремаль и обоснуйте минимум. 2. Найдите экстремаль функционала длины по первому интегралу:

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 - 2y)\,dx, \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2$$

РК2 Границы ограничения и вторая вариация

80 минут, один из двух вариантов, 10 баллов. Общие условия трёх задач приведены ниже. Задача 1: вывести естественное условие и решить (уравнение, естественное условие, решение — по 1 баллу, всего 3). Задача 2: минимизировать (расширенный функционал, уравнение, решение, проверка ограничения — по 1, всего 4). Задача 3: исследовать y=0 при трёх μ (по 1 за каждый обоснованный вывод, всего 3).

$$J[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y')^2 - cy\right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) \text{ свободно}$$

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2\, dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y\, dx = C$$

$$J[y] = \int_0^\pi ((y')^2 - \mu y^2)\, dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

Вариант	Задача 1	Задача 2	Задача 3
РК2 А	c=1	C=1	μ=0,5; 1; 2
РК2 Б	c=2	C=2	μ=0; 1; 3

Блок С Проверка владения методами

С1 Индивидуальное расчётное задание

Вариационная постановка продольной деформации стержня — по пункту 3.6 раздела 5.3 РПД. Общее решение символическое; численные данные авторские: L=2 м, E=200 ГПа, A=100 мм², p_0=1000 Н/м, P=500 Н. Стержень закреплён слева, справа действует осевая сила P в положительном направлении u. Линейная упругость, малые деформации, постоянное EA, нагрузка консервативна. Геометрия задана координатой x∈[0,L], u(0)=0; численных данных достаточно без отдельной схемы.

$$\Pi[u] = \frac{1}{2}\int_0^L E\,A(u')^2 dx - \int_0^L p\,(x)u\,dx - Pu(L)$$

Определите допустимые перемещения и вариации; вычислите δΠ; получите уравнение и естественное условие; найдите u(x) и N(x); запишите слабую форму; обоснуйте минимум; проверьте размерности и смысл знаков. Вычислите u(L), N(0), N(L), Π в равновесии. Дополнительно повторите при P=0, затем при удвоенном EA: объясните изменение перемещений и сил. Эти проверки входят в существующие 10 баллов. Представьте индивидуальный расчёт 3–5 страниц, графики u и N, исходные данные и проверку; защита 5–7 минут на занятии раздела 3.

Критерий С1	Баллы
Допустимые функции и вариации	0–1
Первая вариация уравнение и границы	0–3
Аналитическое решение и проверки	0–2
Слабая форма и минимум	0–2
Защита и физическая интерпретация	0–2
Всего	10

C2 Компьютерное задание

Метод Ритца для той же геометрии и материала C1, но P=0. L=2 м, E=200 ГПа, A=100 мм², p_0=1000 Н/м. Примените нормированный базис:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, (x/L)^i, \quad n = 1,2,3$$

Сформируйте приближённый функционал и систему $\partial П/\partial a_i=0$ из вычисленных интегралов. Для каждого n=1,2,3 решите систему, сохраните матрицу, правую часть, коэффициенты, невязку и единицы. Постройте на общей сетке x_j=jL/1000, j=0,…,1000 графики точного и приближённого полей; найдите max|u_n−uточн| по сетке, отдельно сравните u_n(L) и потенциальные энергии. Проверьте u_n(0)=0, симметрию K и положительность собственных значений. Повторите сетку с 2000 интервалами и объясните различие ошибки по сетке и непрерывной нормы. Укажите, при каком n точное решение принадлежит выбранному пространству. Поясните, почему естественное условие не обязано выполняться пробной функцией заранее.

Представьте воспроизводимый скрипт, данные, таблицу сравнения и отчёт 2–4 страницы; система компьютерной математики выбирается из доступных (например Python с NumPy, MATLAB или аналогичная). Версию среды укажите в отчёте. Исходный код и численные проверки обязательны; один автоматически полученный ответ недостаточен. Защита 5–7 минут: объяснение матрицы, изменение одного параметра, интерпретация ошибки и энергии. Расширение n=3, сеточная проверка и защита оцениваются один раз как итог C2 после формирующей B3.6.

Критерий C2	**Баллы**
Функционал базис существенные условия	0–2
Система и реализация	0–3
Сравнение и оценка погрешности	0–2
Анализ результата	0–1
Самостоятельная защита	0–2
Всего	10

Блок D Зачёт с оценкой

Билет: два теоретических вопроса из разных тематических направлений (по 10) и одна задача (20), всего 40. Подготовка 60 минут, объяснение до 10 минут — предлагаемый регламент. Индивидуальная письменная подготовка и устная защита; разрешён обычный калькулятор, программные средства и конспект не используются. В задаче о методе Ритца требуется вывод аналитической системы и объяснение компьютерной проверки, запуск среды на зачёте не обязателен. Все условия и формулы исходного задания выдаются вместе с билетом.

D1 Теоретические вопросы

D1.1 Функционал и множество допустимых функций. Постановка классической вариационной задачи.

D1.2 Вариация функции, первая вариация функционала и условие стационарности.

D1.3 Слабый и сильный локальные экстремумы.

D1.4 Основная лемма вариационного исчисления.

D1.5 Вывод уравнения Эйлера — Лагранжа при закреплённых концах.

D1.6 Первые интегралы уравнения Эйлера — Лагранжа.

D1.7 Тождество Бельтрами и примеры его применения.

D1.8 Вариационная постановка задачи о брахистохроне.

D1.9 Вариационная постановка задачи о поверхности вращения минимальной площади.

D1.10 Свободные значения функции на концах и естественные граничные условия.

D1.11 Подвижные концы и условия трансверсальности.

D1.12 Функционалы нескольких искомых функций.

D1.13 Изопериметрические задачи и метод множителей Лагранжа.

D1.14 Поточечные ограничения в вариационных задачах.

D1.15 Вторая вариация функционала.

D1.16 Необходимое условие Лежандра.

D1.17 Уравнение Якоби и сопряжённые точки.

D1.18 Достаточные условия слабого минимума. Обоснование минимума с использованием выпуклости.

D1.19 Принцип Гамильтона и вывод уравнений Лагранжа второго рода.

D1.20 Циклические координаты, первые интегралы и сохранение энергии.

D1.21 Функционал полной потенциальной энергии упругой системы.

D1.22 Вариационная постановка задачи о продольной деформации стержня.

D1.23 Функционалы с высшими производными и уравнение Эйлера — Пуассона.

D1.24 Вариационная постановка задачи об изгибе балки.

D1.25 Функционалы нескольких независимых переменных; получение уравнения Пуассона.

D1.26 Слабая форма краевой задачи. Существенные и естественные граничные условия.

D1.27 Метод Ритца: выбор базиса и определение неизвестных коэффициентов.

D1.28 Отношение Рэлея и приближённая оценка собственных частот.

D1.29 Связь метода Ритца с методом конечных элементов.

D1.30 Проверка точности и сходимости компьютерного решения вариационной задачи.

D2 Расчётные задачи

Символы L, EA, EI, m, l, g, ρ, A ниже — положительные постоянные, p_0 и q_0 — постоянные нагрузки. Там, где требуются формулы, символические данные достаточны. Для конкретных чисел используйте значения, явно указанные в условии. Функции и вариации достаточно гладкие и согласованы с существенными условиями; допускается эквивалентное решение в энергетическом пространстве.

D2.1 Экстремаль и минимум

Найдите экстремаль, проверьте концы и обоснуйте минимум.

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

D2.2 Свободное значение

Найдите стационарную функцию, выведите естественное условие и обоснуйте характер экстремума. В формуле c=2.

$$J[y] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y')^2 - cy\right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) \text{ свободно}$$

D2.3 Интегральное ограничение

Минимизируйте при C≠0 заданной постоянной. Определите λ при соглашении F+λy и Jmin, проверьте ограничение.

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2\,dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y\,dx = C$$

D2.4 Характер стационарной функции

Исследуйте y=0 при μ=0,5; 1; 2. Подтвердите вывод допустимыми вариациями.

$$J[y] = \int_0^\pi ((y')^2 - \mu y^2)\,dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

D2.5 Маятник

Постройте действие для T=ml²φ̇²/2, U=mgl(1−cosφ); выведите нелинейное уравнение, малое линейное приближение и сохраняющуюся энергию. Численное интегрирование и начальные условия для общего вывода не требуются.

D2.6 Упругий стержень

Стержень постоянной жёсткости EA, длины L, закреплён при x=0, нагрузка p_0, концевая сила P=0. Постройте Π, выведите уравнение и граничные условия, найдите u(x) и N(x). Положительное направление p_0 совпадает с u.

D2.7 Консольная балка

Получите уравнение и полный комплект условий: w(0)=w′(0)=0, концевых силы и момента нет. Найдите w(L). EI постоянно, q=q_0; направления нагрузки и прогиба совпадают.

$$\Pi[w] = \frac{1}{2}\int_0^L E\,I(w'')^2 dx - \int_0^L q\,(x) w\,dx$$

D2.8 Ритц для балки

Для той же консоли длины L, жёсткости EI и равномерной нагрузки q_0, w(0)=w′(0)=0, без концевых силы и момента, примите w=ax². Из функционала ниже определите a, w(L) и относительную ошибку |wP(L)−wточн(L)|/|wточн(L)| при q_0≠0. Точный прогиб получите из уравнения балки; объясните допустимость базиса.

$$\Pi[w] = \frac{1}{2}\int_0^L E\,I(w'')^2 dx - \int_0^L q\,(x) w\,dx$$

D2.9 Функционал поля

Ω=(0,1)×(0,1), f=1. Получите первую вариацию, слабую форму и дифференциальное уравнение. Решать двумерную краевую задачу не требуется.

$$J[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right) d\Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

D2.10 Отношение Рэлея

Однородный стержень: E, ρ, A постоянны, длина L, левый конец закреплён, правый свободен. Получите оценку первой круговой частоты, объясните допустимость φ и её естественное условие.

$$\omega_R^2 = \frac{\int_0^L E\,A(\phi')^2 dx}{\int_0^L \rho\,A\phi^2 dx}, \quad \phi(x) = x$$

Комплект билетов

Билет	Вопрос 1	Вопрос 2	Задача
1	D1.5	D1.27	D2.2
2	D1.13	D1.19	D2.7
3	D1.15	D1.26	D2.3
4	D1.6	D1.22	D2.8
5	D1.10	D1.28	D2.1
6	D1.8	D1.24	D2.6
7	D1.14	D1.25	D2.9
8	D1.7	D1.30	D2.4
9	D1.17	D1.20	D2.5
10	D1.9	D1.29	D2.10

Первые пять билетов сохраняют содержательные сочетания примеров РПД, остальные разработаны для покрытия всего банка задач. Вопросы D1.1–30 составляют полный банк и используются также для равноценных билетов при пересдаче; объём и критерии сохраняются.

Теоретический ответ	Максимум
Определения и основные положения	4
Обоснование вывод условия применимости	3
Пример или инженерная интерпретация	2
Ответ на уточняющий вопрос	1
Всего за один вопрос	10

Расчётная задача D2	Максимум
Постановка допустимые функции и вариации	3
Выбор и обоснование метода	3
Вывод уравнений и граничных условий	6
Решение и вычисления	5
Проверка и интерпретация	3
Всего	20

4 Методические материалы и процедуры оценивания

4.1 Проведение и оценивание

До мероприятия сообщаются формат, условия, время, разрешённые средства и критерии. Результаты фиксируются по критериям. Для каждого критерия максимум означает полное правильное выполнение; половина — верную основную идею с неполным обоснованием или локальной устранимой ошибкой; 0 — отсутствие или принципиально неверное действие. Промежуточные баллы назначаются за конкретные подтверждённые элементы с пояснением. В тестах применяется только двоичное оценивание, в РК2 задаче 3 — 0 или 1 за каждый обоснованный случай.

Арифметическая ошибка не обнуляет корректный вывод. Последствия одной ошибки не штрафуются повторно как независимые. Если неверные существенные условия меняют задачу, баллы за её решение не подменяют баллы за исходную постановку. Правильная формула без объяснения оценивается по подтверждённым элементам; самостоятельность проверяется вопросом и изменением параметра. Работа без выполненного расчёта не получает баллы за неподтверждённый результат.

Для численных проверок С1–2 единицы приводятся к СИ. В эталонах С2 на заданной сетке абсолютная ошибка $n \geq 2$ ожидается на уровне округления; рабочий допуск сравнения 10^{-10} м, относительная невязка системы 10^{-10}, энергия — 10^{-8} Дж. Это ориентиры проверки вычислений, а не отдельные проходные баллы. Эквивалентные алгоритмы и корректные знаковые соглашения принимаются с явным объяснением. Доказательство минимума не заменяется красивым графиком.

4.2 Рейтинг и итоговая шкала

$R = Опрос_1 + Опрос_2 + 0{,}5 \cdot N_{верных\ теста} + В1.2 + В1.5 + В2.1 + В2.4 + В3.1 + РК1 + РК2 + С1 + С2 + D$. Максимум: 5+5+10+20+10+10+40=100. Все слагаемые — баллы в указанных выше шкалах. Не округляйте промежуточные суммы; итог округляется до целого по правилу 0,5 вверх. Рейтинг и округление предложены для согласования. Дополнительный минимум 20 из 40 за аттестацию из исходного проекта не применяется без нормативного основания.

Итоговый рейтинг	**Оценка**
85–100	Отлично
70–84	Хорошо
60–69	Удовлетворительно
Менее 60	Неудовлетворительно

Форма — зачёт с оценкой. Допуск к зачёту, пересдачи, апелляции и сроки определяются действующими локальными актами КРСУ; новые ограничения здесь не вводятся. Изменения фиксируются с датой и основанием; сведения об утверждении заполняются в установленном порядке после согласования.

5 Методические указания для обучающегося

5.1 Самостоятельная работа

Код РПД	Часы	Действия и результат	Срок
1.10	18	Подготовка В1.1–6: функционалы и вариации 5 ч; вывод и решения 7 ч; первые интегралы классические задачи и подготовка к РК1 6 ч	Недели 1–6
2.10	18	В2.1–2: границы 5 ч; В2.3–4: ограничения 6 ч; В2.5–6: вторая вариация Якоби и подготовка к РК2 7 ч	Недели 7–12
3.10	17,9	В3.1–2 и энергия движения 3 ч; С1 и сопоставление стержня и балки 6 ч; С2 и исследование точности 8,9 ч	Недели 13–18
Итого	53,9	18+18+17,9; отчёты и подготовка к защите входят в эти часы	Семестр 4

5.2 Рекомендации

Начинайте с независимой переменной, области, искомой функции и допустимого класса. Выпишите существенные условия до вычисления вариации; свободное значение на конце означает произвольную граничную вариацию. Сохраняйте граничное слагаемое до его анализа. Для подвижного конца учитывайте смещение координат конца; для балки интегрируйте по частям дважды.

После нахождения стационарной функции проверьте исходные границы, ограничение и уравнение. Минимум обосновывайте знаком точного приращения, второй вариации с нужными предпосылками или выпуклостью. Одно условие Лежандра и один малый численный остаток доказательством минимума не являются.

В механической постановке отделяйте T−U в действии от T+U в интеграле энергии и от полной потенциальной энергии статики. Укажите направление нагрузки и перемещения, приведите жёсткости и нагрузки к согласованным единицам. Различайте начальную задачу движения и временные условия вариационного вывода.

Для Ритца сперва обоснуйте базис и его линейную независимость. Запишите интегралы до формирования матрицы; сохраните исходные данные и версию среды. Сравнивайте всё поле и энергию на одной сетке, а не только одну точку. Объясните влияние вложенных пространств на энергию и почему совпадение отдельных значений не устанавливает точность решения. Отчёт должен позволять повторить расчёт из скрипта.

Источники

1. РПД «Вариационное исчисление», КРСУ, утверждена 03.09.2026, разделы 3–5. 2. Приложенный «ФОС_Вариационное_исчисление.docx» — дополнительный проект по аннотации. 3. Приложенное Положение о ФОС КРСУ, пп. 3.3–3.4 и итоговая шкала. 4. Макет ФОС направления «Прикладная механика». Авторские дополнения отмечены в условиях заданий.

Приложение 1 Формы фиксации результатов

ФИО _____ Группа _____ Семестр 4 Дата _____

Средство	Максимум	Получено	Замечания
Опрос 1	2,5		
Опрос 2	2,5		
Тест A2	5		
B1.2	2		
B1.5	2		
B2.1	2		
B2.4	2		
B3.1	2		
РК1	10		
РК2	10		
C1	10		
C2	10		
До аттестации	60		
Зачёт D	40		
Итог	100		

Лист зачёта с оценкой

ФИО _____ Группа _____ Дата _____ Билет _____

Часть	Максимум	Получено	Замечания
D1 вопрос 1	10		
D1 вопрос 2	10		
D2 задача	20		
Билет	40		
До аттестации	60		
Итог	100		

До округления _____ После округления _____ Оценка _____

Проверки и уточняющий вопрос _____

Преподаватель _____ Подпись _____

Лист регистрации изменений

Дата	Раздел	Изменение и основание	Протокол подпись