МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ,
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета

20 сентября 2022 г.

Высшая математика

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой	**Высшей математики**
Учебный план	21050551_22_1фпгнп г.plx Специальность 21.05.05 - РФ, 630004 - КР Физические процессы горного или нефтегазового производства Направленность "Физические процессы горного производства"
Квалификация	**специалист**
Форма обучения	**очная**
Общая трудоемкость	**15 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 540
в том числе:
аудиторные занятия 302
самостоятельная работа 201,4
экзамены 35,7

Виды контроля в семестрах:
экзамены 2
зачеты 4
зачеты с оценкой 1, 3

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**1 (1.1)**		**2 (1.2)**		**3 (2.1)**		**4 (2.2)**		Итого	
Недель	16		16		16		16			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	60	60	36	36	36	36	18	18	150	150
Практические	62	62	36	36	36	36	18	18	152	152
Контактная работа в период теоретического обучения	0,2	0,2			0,2	0,2	0,2	0,2	0,6	0,6
Контактная работа в период экзаменационной сессии			0,3	0,3					0,3	0,3
В том числе инт.	24	24	9	9	9	9	9	9	51	51
Итого ауд.	122	122	72	72	72	72	36	36	302	302
Контактная работа	122,2	122,2	72,3	72,3	72,2	72,2	36,2	36,2	302,9	302,9
Сам. работа	57,8	57,8	36	36	71,8	71,8	35,8	35,8	201,4	201,4
Часы на контроль			35,7	35,7					35,7	35,7
Итого	180	180	144	144	144	144	72	72	540	540

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., доцент, Гончарова И.В.;к.ф.-м.н., доцент, Курманбаева А.К. ___________________

Рецензент(ы):
д.ф.-м.н., профессор, Байзаков А.Б.;к.ф.-м.н., доцент, Комарцов Н.М. ___________________

Рабочая программа дисциплины

Высшая математика

разработана в соответствии с ФГОС 3+:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - специалитет по специальности 21.05.05 Физические процессы горного или нефтегазового производства (приказ Минобрнауки России от 12.08.2020 г. № 981)

составлена на основании учебного плана:

Специальность 21.05.05 - РФ, 630004 - КР Физические процессы горного или нефтегазового производства
Направленность "Физические процессы горного производства"

утвержденного учёным советом вуза от 27.08.2022 протокол № 11

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Высшей математики

Протокол от 01.09.2022 г. № 1
Срок действия программы: 2022-2026 уч.г.
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС

05.09 2023 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2023-2024 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 30.08 2023 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС

03.09 2024 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2024-2025 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 28.08 2024 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС

09.09 2025г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 09.09 2025 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., Гончарова И.В.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС

____________ 2026 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от ____________ 2026 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., Гончарова И.В.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	- получение базовых знаний и формирование основных навыков по высшей математике, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности;
1.2	- развитие логического мышления;
1.3	- формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания других математических дисциплин, изучаемых в рамках технического направления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.О
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Дисциплина «Высшая математика» базируется на элементарной математике.
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Сопротивление материалов
2.2.2	Теоретическая и прикладная механика
2.2.3	Электротехника и электроника
2.2.4	Электротехника и электроника
2.2.5	Гидромеханика
2.2.6	Термодинамика
2.2.7	Физика
2.2.8	Вычислительная математика

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ОПК-2: Способен с естественнонаучных позиций оценивать строение, химический и минеральный состав земной коры, морфологические особенности и генетические типы месторождений полезных ископаемых при решении задач по рациональному и комплексному освоению георесурсного потенциала недр на суше, на шельфе морей и на акваториях мирового океана	
Знать:	
Уровень 1	Знать основы геологии, минералогии, гидрогеологии, инженерной геологии и учения о месторождениях полезных ископаемых.
Уметь:	
Уровень 1	Уметь оценивать строение, химический и минеральный состав участка недр, генетические типы месторождений полезных ископаемых.
Владеть:	
Уровень 1	Владеть методами диагностики минералов и горных пород и изучения массивов горных пород для решения задач по рациональному и комплексному освоению георесурсного потенциала недр на суше, на шельфе морей и на акваториях мирового океана

ОПК-10: Способен определять пространственно-геометрическое положение объектов, осуществлять необходимые геодезические и маркшейдерские измерения, обрабатывать и интерпретировать их результаты	
Знать:	
Уровень 1	- нормативно-инструктивные документы и материалы по определению пространственно-геометрического положения объектов; - теоретические и методологические основы использования нормативно-инструктивных документов и материалов
Уметь:	
Уровень 1	- определять необходимость привлечения дополнительных знаний для решения задач по определению пространственно-геометрического положения объектов, обработке и интерпретации результатов, выполненных геодезических и маркшейдерских измерений в ходе своей профессиональной деятельности
Владеть:	
Уровень 1	- навыками определения пространственно-геометрического положения объектов, обработки и интерпретации результатов, выполненных геодезических и маркшейдерских измерений в ходе своей профессиональной деятельности

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**

3.1.1	основные понятия и методы линейной алгебры и аналитической геометрии: матрицы, определители,обратные матрицы, ранг матрицы,
3.1.2	однородные и неоднородные системы линейных уравнений,теорему Кронекера-Капелли,
3.1.3	векторы, длину вектора, условия коллинеарности и компланарности векторов, проекции вектора на ось;
3.1.4	скалярное, векторное и смешанное произведения векторов;
3.1.5	различные уравнения прямой на плоскости и в пространстве,
3.1.6	кривые второго порядка;
3.1.7	плоскость и поверхности 2-го порядка; метод сечений
3.1.8	теорию пределов;
3.1.9	дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной;
3.1.10	интегральное исчисление функции одной действительной переменной;
3.1.11	дифференциальное исчисление функций нескольких переменных;
3.1.12	интегральное исчисление функций нескольких переменных;
3.1.13	теорию числовых и функциональных рядов;
3.1.14	теорию поля,
3.1.15	дифференциальные уравнения первого и высших порядков;
3.1.16	аксиомы теории вероятностей;
3.1.17	виды случайных событий;
3.1.18	способы вычисления вероятностей случайных событий;
3.1.19	важнейшие теоремы теории вероятностей;
3.1.20	виды случайных величин и способы их задания;
3.1.21	числовые характеристики случайных величин;
3.1.22	основные законы распределения случайных величин;
3.1.23	основы математической теории выборочного метода;
3.1.24	проверку статистических гипотез;
3.1.25	основные положения корреляционного и регрессионного анализа.
3.2	**Уметь:**
3.2.1	вычислять определители 2, 3-го и старших порядков;
3.2.2	распознавать виды матриц; корректно выполнять действия с матрицами;
3.2.3	проводить исследования на совместность и решать однородные и неоднородные системы линейных уравнений;
3.2.4	численно решать системы линейных уравнений методами Гаусса и Крамера;
3.2.5	использовать свойства: линейных операций над векторами,скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических и физических задач;
3.2.6	производить исследование геометрических объектов методами векторной алгебры и аналитической геометрии;
3.2.7	составлять уравнения прямых на плоскости и в пространстве; составлять уравнения плоскости, находить углы между прямыми и плоскостями;
3.2.8	распознавать типы кривых второго порядка и выделять их основные характеристики;
3.2.9	вычислять пределы функций и последовательностей,
3.2.10	находить производные функций одной и нескольких переменных,
3.2.11	находить неопределенные интегралы;
3.2.12	вычислять определенные, кратные, криволинейные интегралы,
3.2.13	работать с числовыми и функциональными рядами,
3.2.14	вычислять основные характеристики скалярных и векторных полей,
3.2.15	анализировать поведение функций одной и нескольких действительных переменных;
3.2.16	использовать математические методы в технических приложениях;
3.2.17	применять свои знания к решению практических задач;
3.2.18	пользоваться математической литературой для самостоятельного изучения свойств функций одной и нескольких действительных переменных,
3.2.19	составлять дифференциальные уравнения, интегрировать дифференциальные уравнения первого и высших порядков, находить общие и частные решения дифференциальных уравнений первого и высших порядков и систем дифференциальных уравнений;
3.2.20	вычислять вероятности случайных событий;
3.2.21	определять тип случайной величины и находить ее числовые характеристики;

3.2.2	распознавать виды матриц; корректно выполнять действия с матрицами;
3.2.3	проводить исследования на совместность и решать однородные и неоднородные системы линейных уравнений;
3.2.4	численно решать системы линейных уравнений методами Гаусса и Крамера;
3.2.5	использовать свойства: линейных операций над векторами,скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических и физических задач;
3.2.6	производить исследование геометрических объектов методами векторной алгебры и аналитической геометрии;
3.2.7	составлять уравнения прямых на плоскости и в пространстве; составлять уравнения плоскости, находить углы между прямыми и плоскостями;
3.2.8	распознавать типы кривых второго порядка и выделять их основные характеристики;
3.2.9	вычислять пределы функций и последовательностей,
3.2.10	находить производные функций одной и нескольких переменных,
3.2.11	находить неопределенные интегралы;
3.2.12	вычислять определенные, кратные, криволинейные интегралы,
3.2.13	работать с числовыми и функциональными рядами,
3.2.14	вычислять основные характеристики скалярных и векторных полей,
3.2.15	анализировать поведение функций одной и нескольких действительных переменных;
3.2.16	использовать математические методы в технических приложениях;
3.2.17	применять свои знания к решению практических задач;
3.2.18	пользоваться математической литературой для самостоятельного изучения свойств функций одной и нескольких действительных переменных,
3.2.19	составлять дифференциальные уравнения, интегрировать дифференциальные уравнения первого и высших порядков, находить общие и частные решения дифференциальных уравнений первого и высших порядков и систем дифференциальных уравнений;
3.2.20	вычислять вероятности случайных событий;
3.2.21	определять тип случайной величины и находить ее числовые характеристики;
3.2.22	задавать распределение случайной величины;
3.2.23	обрабатывать статистическую информацию для оценки значений параметров и проверки статистических гипотез;
3.2.24	использовать информационные технологии для расчета вероятностей и статистического анализа эксперимента.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	иметь навыки применения математического языка и символики для выражения количественных и качественных отношений объектов, навыки построения типовых математических моделей в профессиональной области,
3.3.2	иметь навыки применения аналитических методов решения типовых задач и интерпретации полученных результатов.
3.3.3	Владеть методами вычисления пределов функций и последовательностей;
3.3.4	владеть приемами дифференцирования;
3.3.5	владеть методами исследования функций одной и нескольких действительных переменных;
3.3.6	владеть методами математического описания физических явлений и процессов, используя элементы дифференциального исчисления;
3.3.7	владеть методами интегрирования неопределенных интегралов;
3.3.8	владеть методами интегрирования определенных интегралов;
3.3.9	владеть методами вычисления кратных интегралов;
3.3.10	владеть навыками вычисления криволинейных интегралов;
3.3.11	владеть приемами исследования рядов;
3.3.12	владеть методами вычисления основных характеристик скалярных и векторных полей,

3.3.13	владеть навыками решений дифференциальных уравнений; навыками использования математического аппарата для решения прикладных задач, применять полученные знания на практике;
3.3.14	владеть комбинаторным, теоретико-множественным подходами к постановке и решению задач;
3.3.15	владеть методами оценки генеральной совокупности и её параметров по данным выборочной совокупности

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)								
Код занятия	**Наименование разделов и тем /вид занятия/**	**Семестр / Курс**	**Часов**	**Компетен-ции**	**Литература**	**Инте ракт.**	**Пр. подг.**	**Примечание**
	Раздел 1. Линейная и векторная алгебра							
1.1	Матрицы и определители /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.3 Л1.8Л2.1	2		
1.2	Матрицы, действия над ними. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.3 Л2.6Л3.14			
1.3	Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей n-го порядка. Обратная матрица. Ранг матрицы. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.6Л3.14	2		
1.4	Системы линейных алгебраических уравнений /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.3 Л1.8Л2.1Л3.1 4	1		
1.5	Совместность СЛАУ. Метод Крамера и матричный метод решения систем. Метод Гаусса решения систем. Общее решение системы /Пр/	1	4	ОПК-1	Л1.8Л2.3 Л2.6Л3.14			
1.6	Элементы векторной алгебры /Лек/	1	6	ОПК-1	Л1.3 Л1.8Л2.1Л3.3	2		
1.7	Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось и ее свойства Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы. Действия над векторами, заданными проекциями /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.3 Л2.6Л3.3	2		
1.8	Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их свойства, приложения. /Пр/	1	4	ОПК-1	Л1.8Л2.1Л3.3			
1.9	Выполнение домашних заданий, типовых расчетов. Подготовка к защите типового расчета №1 /Ср/	1	12	ОПК-1	Л1.8Л2.1Л3.3			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 2. Аналитическая геометрия							
2.1	Различные виды уравнения прямой на плоскости. Основные задачи: угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.6Л3.11	2		

2.2	Основные задачи: угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых; расстояние от точки до прямой. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.1Л3.11			
2.3	Различные виды уравнений прямой на плоскости /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.1Л3.11			
2.4	Кривые второго порядка /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.2 Л1.3Л3.11	2		
2.5	Линии второго порядка: Окружность, эллипс. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.1	1		
2.6	Линии второго порядка: Гипербола, парабола. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.1Л3.11			
2.7	Плоскость и прямая в пространстве /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.2 Л1.3Л3.11			
2.8	Различные виды уравнения плоскости в пространстве. Основные задачи: Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Прямая в пространстве. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Прямая и плоскость /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.1Л3.11	2		
2.9	Поверхности в пространстве /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.2 Л1.3 Л1.8Л2.1Л3.11	2		
2.10	Исследование методом сечений. Эллипсоид, параболоид, гиперболоид. Цилиндры. Конус. /Пр/	1	3	ОПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.3Л3.11	2		
2.11	Выполнение домашних заданий, типовых расчетов. Подготовка к защите типового расчета №2. /Ср/	1	12	ОПК-1	Л1.2 Л1.3 Л1.8Л2.3 Л2.6Л3.11			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 3. Пределы функции одной переменной							
3.1	Функции одной переменной. Область определения. Область значений. Различные виды и способы задания функций. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6			
3.2	Нахождение область определений, области значений. Основные характеристики функций. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6			
3.3	Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков функций. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1	2		

3.4	Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков функций. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6			
3.5	Предел числовой последовательности. Предел функции. Односторонние пределы. Свойства пределов. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1Л3.2			
3.6	Предел функции. Предел последовательности. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6Л3.2			
3.7	Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. Неопределенности различного вида. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1Л3.2			
3.8	Раскрытие неопределенностей различных видов. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6Л3.2			
3.9	Первый и второй замечательные пределы. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1Л3.2			
3.10	Первый и второй замечательные пределы. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6Л3.2			
3.11	Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции и их классификация. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4Л3.2			
3.12	Исследование функций на непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6	2		
3.13	Выполнение домашних заданий, типовых расчетов. Подготовка к защите типового расчета №3 /Ср/	1	12	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.6Л3.2			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 4. Дифференцирование функций одной переменной							
4.1	Задачи физики, механики и энергетики приводящие к понятию производной. Определение производной. Дифференцируемость функции, дифференциал. Правила дифференцирования элементарных функции. Дифференциал функции. /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11			
4.2	Основные правила и методы дифференцирования элементарных функции. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.7	2		
4.3	Дифференцирование сложных, обратных, неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11			
4.4	Дифференциал функции. Дифференцирование сложных функций. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.7			

4.5	Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.7			
4.6	Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства дифференцируемых функций. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11			
4.7	Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей различных видов по правилу Лопиталя. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11			
4.8	Производные и дифференциалы высших порядков. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.7			
4.9	Раскрытие неопределенностей различных видов по правилу Лопиталя. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.7			
4.10	Экстремумы функции. Возрастание, убывание. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, интервалы монотонности. План исследования функции. /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11	2		
4.11	Экстремумы функции. Возрастание, убывание. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, интервалы монотонности. Полное исследование функции. /Пр/	1	3	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6			
4.12	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Дифференцирование функций одной переменной". Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	1	11	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.7			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИ И № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИ И № 9.
	Раздел 5. Функции нескольких переменных							
5.1	Основные понятия. Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал, Дифференциалы высших порядков. /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.8			
5.2	Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал, Дифференциалы высших порядков. /Пр/	1	4	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.8			
5.3	Дифференцирование сложных функций. Полная производная. /Лек/	1	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.8			
5.4	Дифференцирование сложных функций. Полная производная. /Пр/	1	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.8			

5.5	Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области. /Лек/	1	4	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.8	2		
5.6	Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области. /Пр/	1	4	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.8			
5.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Функции нескольких переменных".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	1	10,8	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.8			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
5.8	Подготовка к зачету /ЗачётСОц/	1		ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.2 Л2.6Л3.2 Л3.3 Л3.7 Л3.11 Л3.13 Л3.14			Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ приведены в ФОС (п. 5.1), задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 2, 3.Образцы билетов - в ПРИЛОЖЕНИИ № 6
5.9	/КрТО/	1	0,2					
	Раздел 6. Неопределенные интегралы.							
6.1	Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.6 Л2.11Л3.13			
6.2	Непосредственное интегрирование. Введение под знак дифференциала /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.9 Л3.13	2		
6.3	Основные методы интегрирования. Интегрирование по частям. Метод подстановки. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.13			
6.4	Интегрирование по частям. Метод подстановки /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.9 Л3.13			
6.5	Интегрирование дробно-рациональных функций. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.13			

6.6	Интегрирование дробно-рациональных функций. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.9 Л3.13			
6.7	Интегрирование тригонометрических функций /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.13			
6.8	Интегрирование тригонометрических функций /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л2.11Л3.9 Л3.13			
6.9	Интегрирование иррациональных функций. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.13			
6.10	Интегрирование иррациональных функций. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.9 Л3.13			
6.11	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Неопределенный интеграл".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	12	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.9 Л3.13			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 7. Определенные интегралы и их приложения							
7.1	Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Точные методы вычисления определенных интегралов. /Лек/	2	3	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.2 Л2.11			
7.2	Точные методы вычисления определенных интегралов /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3Л3.6	2		
7.3	Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площадей плоских фигур в декартовой, полярной системах координат и при параметрическом задании кривой /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.6	2		
7.4	Вычисление площадей плоских фигур в декартовой, полярной системах координат и при параметрическом задании кривой /Пр/	2	4	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			
7.5	Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление длин дуг кривых в декартовой, полярной системах координат и в параметрической форме; вычисление объемов тел вращения. Физические приложения определенного интеграла /Лек/	2	3	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.6	2		
7.6	Вычисление длин дуг кривых в декартовой, полярной системах координат и в параметрической форме; вычисление объемов тел вращения. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6	2		

7.7	Несобственные интегралы I и II рода, их свойства и вычисление. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11			
7.8	Несобственные интегралы I и II рода, их свойства и вычисление. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6	2		
7.9	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Определенные интегралы и их применение".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	8	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.6Л3.6			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 8. Кратные интегралы							
8.1	Задачи физики, механики, энергетики, техники, приводящие к двойным интегралам. Определение и свойства двойных интегралов. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.9			
8.2	Вычисление двойных интегралов. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.9			
8.3	Вычисление двойных интегралов. /Пр/	2	4	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.4 Л2.6Л3.9	2		
8.4	Физические приложения двойных интегралов: объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции плоских фигур /Лек/	2	3		Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.4 Л2.7Л3.9	2		
8.5	Приложения двойных интегралов /Пр/	2	3	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.9			
8.6	Понятие о тройном интеграле: задачи, приводящие к тройному интегралу, свойства, вычисление. Физические приложения тройных интегралов: объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции тел. /Лек/	2	3	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.6Л3.9			
8.7	Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат. Приложение тройных интегралов /Пр/	2	3	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.7Л3.9			
8.8	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Кратные интегралы".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	8	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.6Л3.9			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.

	Раздел 9. Криволинейные интегралы							
9.1	Задачи физики, механики, энергетики, техники, приводящие к криволинейным интегралам. Определение криволинейных интегралов I и II рода и их свойства. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.4 Л2.11Л3.9			
9.2	Вычисление криволинейных интегралов I и II рода в различных системах координат. Применение криволинейных интегралов для решение технических задач /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.4 Л2.11Л3.9	1		
9.3	Вычисление криволинейных интегралов I рода в различных системах координат. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.2 Л2.6Л3.9	1		
9.4	Вычисление криволинейных интегралов II рода. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л3.9			
9.5	Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Формула Грина. /Лек/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.4Л3.9			
9.6	Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Формула Грина. /Пр/	2	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.7Л3.9			
9.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Криволинейные интегралы".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	2	8	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.7Л3.9			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
9.8	Подготовка к экзамену /Экзамен/	2	35,7	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.2 Л2.7Л3.9			
9.9	/КрЭк/	2	0,3					
	Раздел 10. Ряды							
10.1	Числовой ряд. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд. Ряд геометрической прогрессии. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.4			
10.2	Непосредственное определение сходимости числовых рядов. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			
10.3	Достаточные признаки сходимости числовых рядов. Признаки сравнения, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.4			
10.4	Признаки сравнения, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4	2		

10.5	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.4			
10.6	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			
10.7	Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.4			
10.8	Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			
10.9	Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. Применение степенных рядов. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.4			
10.10	Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			
10.11	Применение степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций, определенных интегралов. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			
10.12	Тригонометрический ряд и его основные свойства. Ряд Фурье и его сходимость. Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций, функций произвольного периода и неперидических. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.1 Л2.4 Л2.11Л3.4	2		
10.13	Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			
10.14	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Ряды".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	3	20	ОПК-1	Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.4			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.

	Раздел 11. Элементы теории поля							
11.1	Скалярное поле. Примеры скалярных полей. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.11Л3.10	1		
11.2	Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3Л3.10	2		
11.3	Векторные поля. Векторные линии. /Лек/	3	1	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.11Л3.10			
11.4	Векторные поля. Векторные линии. Поток векторного поля. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3Л3.10			
11.5	Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля. Векторные дифференциальные операции 1 и 2 порядка. Классы векторных полей. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.1 Л2.11Л3.10			
11.6	Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля. Классы векторных полей. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3Л3.10	2		
11.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Теория поля".Подготовка к защите типового расчета. /Ср/	3	20	ОПК-1	Л1.4 Л1.8Л2.2 Л2.3 Л2.7Л3.10			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИ И № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИ И № 9.
	Раздел 12. Дифференциальные уравнения							
12.1	Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия и определения. ДУ с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.1 Л2.5			
12.2	Уравнения с разделяющимися и разделенными переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.7Л2.2Л3.1	2		
12.3	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах /Лек/	3	4	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.1 Л2.5	2		
12.4	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. 1. Метод Бернулли. 2. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) Уравнения в полных дифференциалах /Пр/	3	1	ОПК-1	Л1.7Л2.2 Л2.7Л3.1			

12.5	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Дифференциальные уравнения первого порядка". /Ср/	3	22	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.3Л3.1			
	Раздел 13. Дифференциальные уравнения высших порядков							
13.1	Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка. /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.3 Л2.7Л3.1	2		
13.2	Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка: 1. ДУ содержащие только старшую производную и независимую переменную; 2. ДУ, не содержащие явно искомой функции; 3. ДУ, не содержащие явно независимую переменную и искомую функцию 4. ДУ, не содержащие явно независимую переменную Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка: 1. ДУ содержащие только старшую производную и независимую переменную; 2. ДУ, не содержащие явно искомой функции; 3. ДУ, не содержащие явно независимую переменную и искомую функцию 4. ДУ, не содержащие явно независимую переменную /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.1 Л2.3 Л2.7Л3.1	1		
13.3	Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Основные теоремы приводящие к построению общего решения Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. /Лек/	3	2					
13.4	Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. /Пр/	3	2	ОПК-1				
13.5	Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Общий вид решения неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для нахождения частного решения неоднородного уравнения /Лек/	3	2	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.5 Л2.7Л3.1	2		

13.6	Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных. /Пр/	3	2	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.7Л3.1			
13.7	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью специального вида. Различные виды решения в зависимости от правой части. /Лек/	3	3	ОПК-1	Л1.7 Л1.8Л2.5Л3.1			
13.8	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью специального вида. /Пр/	3	3	ОПК-1	Л1.7Л2.5Л3.1			
13.9	Выполнение домашних заданий и ТР по разделу "Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений". /Ср/	3	17,9	ОПК-1	Л1.7Л2.3Л3.1			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
13.10	Подготовка к зачету /ЗачётСОц/	3						Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ приведены в ФОС (п. 5.1), задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в приложениях № 1 и №2 3.Образец билета - в ПРИЛОЖЕНИИ № 5
13.11	/КрТО/	3	0,1					
	Раздел 14. Теория вероятностей							
14.1	Введение. Случайные события и действия ними. Вероятность: различные подходы к определению вероятности. Свойства вероятности. Элементы комбинаторики. /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.9			
14.2	Элементы комбинаторики. Действия над случайными величинами. /Пр/	4	1	ОПК-1	Л1.5Л3.5	1		
14.3	Классическая вероятностная модель. Геометрическое определение вероятности. /Пр/	4	1	ОПК-1	Л1.5Л3.5	1		

14.4	Основные теоремы теории вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса. /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.9			
14.5	Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. /Пр/	4	2	ОПК-1	Л1.5Л3.5			
14.6	Схема повторных независимых испытаний. Формула Бернулли. Приближенные формулы в схеме Бернулли. Следствия. /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.9			
14.7	Формула Бернулли. Наивероятнейшее число. Приближенные формулы в схеме Бернулли и их следствия. /Пр/	4	2	ОПК-1	Л1.5Л3.5			
14.8	Дискретные случайные величины. Закон распределения ДСВ. Функция распределения. Основные числовые характеристики. Основные законы распределения ДСВ. /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.9	2		
14.9	Закон распределения ДСВ. Основные числовые характеристики ДСВ. /Пр/	4	2	ОПК-1	Л1.5Л3.5			
14.10	Непрерывные случайные величины и их основные числовые характеристики. Основные законы распределения НСВ /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.9			
14.11	Непрерывные случайные величины. Вычисление основных числовых характеристик. /Пр/	4	1	ОПК-1	Л1.5Л3.5			
14.12	Выполнение типовых расчетов и домашних заданий по разделу "Теория вероятностей" /Ср/	4	20	ОПК-1	Л1.5 Л1.6Л3.5			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
	Раздел 15. Математическая статистика							
15.1	Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Задачи выборочного метода. Статистическое распределение выборки. Вариационный ряд и его графики. Числовые характеристики выборки. /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.10	2		
15.2	Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки. Вариационный ряд и его графики. /Пр/	4	1	ОПК-1	Л1.5Л3.12			

15.3	Числовые характеристики вариационных рядов: выборочная средняя, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, размах, коэффициент вариации. /Пр/	4	2	ОПК-1	Л1.5 Л1.6Л3.12	2		
15.4	Статистическое оценивание. Понятие о статистической оценке. Точечные оценки. Интервальные оценки. /Лек/	4	1	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.10			
15.5	Точечные оценки. Интервальные оценки. /Пр/	4	1	ОПК-1	Л1.5Л3.12			
15.6	Понятие о статистической гипотезе. Критерий согласия Пирсона. /Лек/	4	1	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.10			
15.7	Принцип проверки гипотез. Критерий согласия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном законе распределения генеральной совокупности. /Пр/	4	1	ОПК-1	Л1.5 Л1.6Л2.10Л3.12			
15.8	Основы корреляции и регрессии. /Лек/	4	2	ОПК-1	Л1.6Л2.8 Л2.10			
15.9	Определение направления и тесноты связи. Уравнение регрессии для несгруппированных данных. /Пр/	4	2	ОПК-1	Л1.5Л3.12			
15.10	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу "Математическая статистика" /Ср/	4	19,9	ОПК-1	Л1.5 Л1.6Л3.12			Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3, а образцы выполнения в ПРИЛОЖЕНИИ № 9.
15.11	Подготовка к зачету /КрТО/	4	0,1	ОПК-1				Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ приведены в ФОС (п. 5.1), задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в приложениях № 1 и №2 3.Образец билета - в ПРИЛОЖЕНИИ № 5

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

I СЕМЕСТР - ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ

Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

1.Матрицы. Основные понятия.
2.Определители. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя
3.Определители высших порядков. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Формула аннулирования.
4.Свойства определителей
5.Обратная матрица.
6.Базисный минор матрицы. Ранг матрицы
7.Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса
8.Совместность системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
9.Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
10.Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
11.Матричный метод решения линейных алгебраических уравнений.
12.Системы однородных линейных уравнений.
13.Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами
14.Проекция вектора на ось. Свойства проекций векторов
15.Скалярное произведение векторов и его свойства
16.Прямоугольная система координат в пространстве. Разложение вектора по ортам координатных осей
17.Длина вектора. Угол между двумя векторами. Условия коллинеарности и ортогональности двух векторов. Направляющие косинусы вектора
18.Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов
19.Условие линейной независимости трех векторов, заданных своими координатами. Понятие базиса
20.Правоориентированные и левоориентированные тройки векторов. Векторное произведение векторов и его свойства. Приложения
21.Смешанное произведение векторов, его свойства. Приложения.
23.Система координат на плоскости. Деление отрезка в заданном отношении
24.Общее уравнение прямой линии на плоскости. Частные случаи. Уравнение прямой с угловым коэффициентом
25.Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых
26.Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой
27.Пучок прямых. Взаимное расположение прямых на плоскости. Пересечение прямых
28.Кривые второго порядка на плоскости, важнейшие частные случаи
29.Окружность. Эллипс. Их параметры и свойства
30.Гипербола. Ее параметры и основные свойства
31.Парабола. Параметр параболы, основные свойства параболы
32.Поворот и параллельный перенос координатных осей. Упрощение кривых второго порядка и их классификация
33.Уравнения поверхности и линии в пространстве
34.Общее уравнение плоскости. Частные случаи
35.Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки
36.Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей
37.Каноническое и параметрические уравнения прямой в пространстве
38.Прямая в пространстве как пересечение двух плоскостей
39.Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности
40.Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
41.Цилиндрические поверхности
42.Поверхности вращения. Конические поверхности
43.Эллипсоид. Однополостный и двуполостный гиперболоиды
44.Параболический и гиперболический параболоиды
45.Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
46. Функция. Область определения и область значений функции.
47. Графики функций и их преобразования.
48. Основные характеристики функции: Ограниченность, четность, нечетность, периодичность, монотонность.
49. Различные виды функций: основные элементарные, элементарные, сложные, взаимообратные.
50. Способы задания функции. Параметрическое задание функции, задание функции в полярных координатах.
51. Числовые последовательности. Предел последовательности.
52. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
53. Теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.
54. Предел функции. Бесконечно большие предельные значения функции и предел функции на бесконечности.
55. Теоремы о пределах функций (сумме, произведении, частном, сложной функции).
56. Первый замечательный предел.
57. Второй замечательный предел.
58. Односторонние пределы.
59. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.
60. Свойства функций непрерывных на отрезке. Непрерывность сложной функции.
61. Задачи механики, физики, энергетики, приводящие к понятию производной.
62. Определение производной функции. Геометрический и физический смысл производной.
63. Общие правила дифференцирования (суммы, произведения и частного).

64. Производная сложной и обратной функции.
65. Производные элементарных функций.
66. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций.
67. Логарифмическое дифференцирование
68. Дифференциал. Свойства дифференциала. Инвариантность формы дифференциала.
69. Производные и дифференциалы высших порядков.
70. Производная высших порядков неявно заданной функции.
71. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.
72. Правило Лопиталя.
73. Возрастание и убывание функций. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
74. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
75. Функции нескольких переменных (определение, предел и непрерывность).
76. Частные и полное приращение функций двух переменных.
77. Частные производные первого порядка функции нескольких переменных и их геометрическое истолкование.
78. Дифференцируемость и полный дифференциал первого порядка функции двух переменных.
79. Дифференцирование неявно заданных функций нескольких переменных.
80. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.
81. Дифференциалы высших (2-го и 3-го) порядков функции двух переменных.
82. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие существования экстремума.
83. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
84. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области.
85. Метод наименьших квадратов.

II СЕМЕСТР - ЭКЗАМЕН

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Простейшие свойства неопределенного интеграла.
2. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование методом замены переменной или способом подстановки; интегрирование по частям.
3. Интегрирование дробно-рациональных функций.
4. Интегрирование тригонометрических функций.
5. Интегрирование иррациональных функций.
6. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его геометрический и физический смыслы.
7. Свойства определенного интеграла.
8. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Точные методы интегрирования определенных интегралов.
10. Несобственные интегралы I рода.
11. Несобственные интегралы II рода.
12. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (метод прямоугольников, трапеций, Симпсона).
13. Вычисление площадей плоских фигур в различных системах координат.
14. Вычисление длин дуг плоских кривых в различных системах координат.
15. Вычисление объема тела по известному поперечному сечению и объема тела вращения.
16. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение, свойства двойных интегралов.
17. Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах.
18. Применение двойных интегралов.
19. Криволинейные интегралы I рода.
20. Применение криволинейных интегралов I рода.
21. Криволинейные интегралы II рода.
22. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина.
23. Применение криволинейных интегралов II рода.

III СЕМЕСТР - ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ

1.Числовые ряды. Свойства числовых рядов.
2.Необходимый признак сходимости числового ряда.
3.Гармонический ряд. Геометрический ряд.
4.Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.
5.Интегральный признак Коши.
6.Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7.Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
8.Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
9.Функциональные ряды.
10.Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11.Свойства степенных рядов.
12.Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

13.Приложения степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций.
14.Приложения степенных рядов. Приближенное вычисление определенных интегралов.
15.Приложения степенных рядов. Приближенное решение дифференциальных уравнений.
16.Ряды Фурье 2Пи-периодических функций.
17.Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
18.Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.
19.Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.
20.Производная по направлению.
21.Градиент скалярного поля и его свойства.
22.Векторное поле. Поток векторного поля.
23.Дивергенция поля .
24.Циркуляция вектора.
25.Ротор поля.
26.Оператор Гамильтона.
27.Дифференциальные векторные операции второго порядка.
28.Соленоидальное поле.
29.Потенциальное поле.
30.Гармоническое поле.
32.Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
33.Дифференциальные уравнение первого порядка.
34.Уравнение с разделяющимися переменными и методы их решения.
35.Однородные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним, методы их решения.
36.Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли, методы их решения.
37.Уравнения в полных дифференциалах и приводящиеся к ним, методы их решения.
38.Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
39.Дифференциальные уравнения высших порядков допускающие понижение порядка.
40.Линейные однородные уравнения высшего порядка. Основные понятия.
41.Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков.
42.Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и методы их решения.
43.Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных.
44.Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида и методы их решения.
45.Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные понятия. Сведение к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

IY-СЕМЕСТР ЗАЧЕТ

1. События. Типы событий.
2. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера-Венна.
3. Понятие о вероятности. Свойства вероятности.
4. Классическое определение вероятности.
5. Геометрический подход к определению вероятности.
6. Аксиоматическое определение вероятности.
7. Зависимые и независимые события.
8. Теоремы сложения вероятностей.
9. Теоремы умножения вероятностей.
10. Формула полной вероятности и формула Байеса.
11. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.
12. Наивероятнейшее число наступления события.
13. Формула Пуассона.
14. Интегральная формула Муавра – Лапласа.
15. Локальная формула Муавра – Лапласа.
16. Понятие о случайной величине. Типы случайных величин.
17. Дискретная случайная величина и ее закон распределения.
18. Операции над дискретными случайными величинами.
19. Основные числовые характеристики дискретных случайных величин.
20. Биномиальный закон распределения.
21. Закон распределения Пуассона.
22. Геометрический закон распределения.
23. Понятие о непрерывной случайной величине.
24. Функция распределения и ее свойства.
25. Плотность вероятности распределения непрерывной случайной величины. Свойства плотности вероятности распределения.
26. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
27. Показательный закон распределения.
28. Равномерный закон распределения.
29. Нормальный закон распределения и его свойства.

30. Основные задачи математической статистики.
31. Понятие о выборочном методе.
32. Статистическое распределение выборки.
33. Вариационный ряд и его графики.
34. Основные числовые характеристики выборки. Выборочная средняя и ее свойства.
35. Выборочная дисперсия и ее свойства.
36. Мода и медиана.
37. Статистическая гипотеза. Основная и конкурирующая гипотезы. Простая и сложная гипотезы.
38. Ошибки первого и второго рода.
39. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.
40. Основы статистического оценивания. Требования, предъявляемые к статистическим оценкам.
41. Интервальное оценивание. Доверительная вероятность. Доверительный интервал.
42. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
43. Линейная парная регрессия для несгруппированных данных.
44. Коэффициент корреляции и его свойства.

Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в приложениях 1 и 2.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовые работы учебным планом не предусмотрены

5.3. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Высшая математика» представляет собой комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для контроля и оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, определения соответствия или несоответствия уровня достижений обучающегося планируемым результатам.
В 1 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3, №4 в количестве 15 вариантов, компьютерные программы тестирования по разделам "Аналитическая геометрия"., "Пределы", "Дифференцирование функции одной переменной".
Во 2 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3, №4 в количестве 15 вариантов, на усмотрение преподавателя КОПТ "Определенные интегралы и их применение" или контрольная работа - "Определенные интегралы и их применение", КОПТ «Функции нескольких переменных», контрольные работы «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы».

В 3 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3, №4 в количестве 15 вариантов, контрольные работы - «Ряды», «Теория поля», «Дифференциальные уравнения первого порядка», «Дифференциальные уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений».

В 4 семестре : типовые расчеты №1 и №2 в количестве 15 вариантгов. Контрольные работы "Случайные величины" и "Математическая статистика", КОПТ по разделу "Случайные события".
Варианты типовых расчетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3,контрольных работ – ПРИЛОЖЕНИЕ № 4, образцы КОПТ в приложении №5.
Билеты для проведения итогового контроля в 1 семестре (зачет), во 2 семестре (экзамен), в 3 семестре (зачет с оценкой), составляются из базы вопросов для оценки знаний, умений (приложение 1) и навыков (приложение 2), характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Образцы билетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6

5.4. Перечень видов оценочных средств

1. Типовые расчеты
2. Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования (КОПТы)
3. Контрольные работы.

Шкалы оценивания по всем видам в приложении №7

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Клетеник Д.В.	Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие	Москва: Наука 1967
Л1.2	Л.Г. Лелевкина, Ж.Р. Джаналиева, С.Б. Доулбекова	Основы аналитической геометрии	2012
Л1.3	Бугров Я.С., Никольский С.М.	Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для втузов	М.: Высшая школа 2007
Л1.4	Кудрявцев Л.Д.	Курс математического анализа Т.2: Учебное пособие	М.: ФИЗМАТЛИТ 2010

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.5	Гмурман В.Е.	Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата	М.: Юрайт 2014
Л1.6	Гмурман В.Е.	Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие	М.: Юрайт-Издат 2010
Л1.7	Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник	Бишкек: Изд-во КРСУ 2016
Л1.8	Баврин И.И.	Высшая математика: Учебник. 3-е изд., стереотипя	М.: Издательский центр «Академия», 2010
6.1.2. Дополнительная литература			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Д.Т. Письменный	Конспект лекций по высшей математике: Полный курс	2009
Л2.2	Берман Г.Н.	Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие	СПб.: Профессия 2005,
Л2.3	Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.	Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие	М.: Айрис-пресс 2008
Л2.4	Бугров Я.С., Никольский С.М.	Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для втузов	М.: Наука 2007
Л2.5	Пискунов Н.С.	Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие	Интеграл-Пресс 2009
Л2.6	Каплан И.А., Пустынников В.И.	Практикум по высшей математике Т.1: Учебное пособие	2008
Л2.7	Каплан И.А., Пустынников В.И.	Практикум по высшей математике Т.2: Учебное пособие	2008
Л2.8	Д. Письменный	Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам	М. АЙРИС ПРЕСС 2007
Л2.9	Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров	Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учебное пособие для втузов	М.: Высшая школа 2000
Л2.10	А.И. Кобзарь	Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников	М.: ФИЗМАТЛИТ 2006
Л2.11	Н.С. Пискунов	Дифференциальное и интегральное исчисление, В 2 т.	Интеграл-Пресс 2009
6.1.3. Методические разработки			
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Лелевкина Л.Г., Шемякина Т.А.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие по мат. анализу	Бишкек: Изд-во КРСУ 2001
Л3.2	Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов	Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента: Учебно-методическое пособие	2009
Л3.3	Л.Г. Лелевкина, А.К. Курманбаева	Векторная алгебра: Учебно-методическое пособие для компьютерного тестирования	2010
Л3.4	Ишмахаметов К.	Ряды: учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2013
Л3.5	Давидюк Т.А., Гончарова И.В.	Методические указания к решению задач по теории вероятностей: Методическое указание	КР-СУ 2014
Л3.6	Давидюк Т.А., Гончарова И.В.	Определенный интеграл и его приложения: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2010
Л3.7	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.	Дифференцирование функций одной переменной: Контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования	КР-СУ 2009
Л3.8	Лелевкина Л.Г., Саламатина Е.А.	Функции двух и нескольких переменных: Учебное пособие	КР-СУ 2010
Л3.9	Лелевкина Л.Г.	Методическое пособие по кратным и криволинейным интегралам: Методическое пособие	КР-СУ 2005
Л3.10	Рафатов Р.Р., Лелевкина Л.Г.	Элементы теории поля: Учебное пособие	КР-СУ 1998
Л3.11	Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б.	Аналитическая геометрия: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2010

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.12	Гончарова И.В., Комарцов Н.М., Комарцова Е.А.	Математическая статистика: Учебное пособие	КРСУ 2015
Л3.13	Лелевкина Л.Г., Карабакиров К.Р.	Методы интегрирования неопределенных интегралов: Учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2017
Л3.14	Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.	Линейная алгебра. Часть 1: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2015

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий	
6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии	
6.3.1.1	Традиционные образовательные технологии – лекции, практические занятия, ориентированные прежде всего на сообщение знаний и способов действий, передаваемых студентам в готовом виде и предназначенных для воспроизводящего усвоения и разбора конкретных задач.
6.3.1.2	Инновационные образовательные технологии – занятия в интерактивной форме, которые формируют системное мышления и способность генерировать идеи при решении различных творческих задач. К ним относятся: проблемная лекция; лекция с визуализацией; лекция-диалог; диалоговая форма обучения (предполагает разработку целенаправленной системы вопросов, поиск ответов на которые служит основой для включения студентов в дискуссию, в самостоятельный поиск необходимой информации); групповая форма работы (парами, фронтальная, групповая, индивидуальная, микрогруппы); метод «мозгового штурма» (участники обсуждения высказывают большое количество вариантов решения той или иной задачи).
6.3.1.3	Информационные образовательные технологии: электронные тексты лекций с презентациями; компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования, разработанные кафедрой; самостоятельное использование студентом компьютерной техники и интернет-ресурсов для выполнения домашних заданий, типовых расчетов и самостоятельной работы по различным разделам высшей математики.
6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения	
6.3.2.1	Кафедра «Высшая математика» имеет постоянно действующий сайт, на котором содержится весь необходимый теоретический и практический материал для студентов, учебно-методические пособия (ЭУМП), электронный учебный курс (ЭУК) и электронная библиотека. Данные материалы размещены на сайте кафедры www.matem.krsu.edu.kg. Электронные учебно-методические пособия (ЭУМП)
6.3.2.2	Лелевкина Л.Г., Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б. "Основы аналитической геометрии" http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/2012.pdf
6.3.2.3	
6.3.2.4	Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К. «Векторная алгебра» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/9vectalg.pdf
6.3.2.5	
6.3.2.6	Курманбаева А.К., Комарцова Е.А. "Линейная алгебра" http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/linalg2015.pdf
6.3.2.7	Федорова Е.С., Шемякина Т.А. Линейная алгебра http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/11linalg.pdf
6.3.2.8	Федорова Е.С., Эгембердиев Ш.А. Типовые расчеты по аналитической геометрии
6.3.2.9	http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/17analgeom.pdf
6.3.2.10	Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С. Аналитическая геометрия http://math.krsu.edu.kg/metodich/syzalgebra.pdf
6.3.2.11	Курманбаева А.К. Сызыктуу алгебранын негиздери. Окуу-методикалык куралы http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/syzalgebra.pdf
6.3.2.12	Усенов И.А., Усенова Р.К. Элементы линейной алгебры. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/20linalgusenov.pdf
6.3.2.13	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. «Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/4limits.pdf
6.3.2.14	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. «Дифференцирование функций одной переменной» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/3diffunc.pdf
6.3.2.15	Лелевкина Л.Г., Карабакиров К.Р. «Методы интегрирования неопределенных интегралов» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/integr_17.pdf
6.3.2.16	Гончарова И.В., Давидюк Т.А. «Определенный интеграл и его приложения» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/19op.pdf
6.3.2.17	Лелевкина Л.Г., Саламатина Е.А. «Функции двух и нескольких пременных» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/8funcseveralvar.pdf
6.3.2.18	Лелевкина Л.Г. «Методическое пособие к решению задач и контрольных заданий по кратным и криволинейным интегралам» http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/2curvint.pdf
6.3.2.19	Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Классический учебник http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/107.pdf

6.3.2.20	Давидюк Т.А., Гончарова И.В. «Методические указания к решению задач по теории вероятностей» http://www.matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/veroyat.pdf
6.3.2.21	Гончарова И.В., Комарцов Н.М., Комарцова Е.А. «Математическая статистика» http://www.matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/matstat1.pdf
6.3.2.22	Белеков К.Ж., Эгембердиев Ш.А. «Математическая статистика» http://www.matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/23matstat_egemberdiev.pdf
6.3.2.23	Ишмахаметов К. Ряды http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/12stepryad.pdf

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
7.1	Лекционная аудитория на 50 посадочных мест (6/117);
7.2	Аудитория для проведения практических занятий на 25 посадочных мест (ауд.6/119);
7.3	Компьютерный класс для выполнения самостоятельной работы и просмотра фото-, аудио-, мультимедия, видео-материалов;
7.4	Интерактивная доска;
7.5	Проектор;
7.6	Презентации лекций по основным темам;
7.7	Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования по различным разделам высшей математики.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Система балльной аттестации при изучении курса «Высщая математика» осуществляется по накопительной системе баллов и предполагает текущий, рубежный и промежуточный контроль. Все виды учебной деятельности оцениваются в баллах. Для контроля и ритмичности работы студентов в течение семестра вводятся аттестационные недели в соответствии с технологической картой дисциплины, с указанием минимальной и максимальной сумм баллов.

Технологические карты дисциплины представлены в ПРИЛОЖЕНИИ 8.

МОДУЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ВКЛЮЧАЕТ:

1. Текущий контроль: усвоение учебного материала на аудиторных занятиях (лекциях, практических, в том числе учитывается посещение и активность) и выполнение обязательных заданий для самостоятельной работы (домашних заданий, типовых расчетов).
2. Рубежный контроль: проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом. Выполнение модульных контрольных заданий проводится в письменном виде или с помощью компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования и является обязательной компонентой модульного контроля.
3. Промежуточный контроль - завершенная задокументированная часть учебной дисциплины – совокупность тесно связанных между собой зачетных модулей.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ТЕКУЩЕМУ КОНТРОЛЮ

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.
Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнение всех учебных заданий преподавателя, ознакомление с основной и дополнительной литературой.
Запись лекции - одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения и выводы, обобщения, формулировки. Культура записи лекции - один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5-10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.
Лекции в основном нацелены на освещение фундаментальных и широко используемых понятий и определений, теорем и их доказательств, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой.
Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемой программой.
При подготовке к занятиям обучающийся должен просмотреть конспекты лекций, практических занятий, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы, решить задания домашней работы.
Рекомендуется регулярно отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.
Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта лекций в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Следует найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, нужно сформулировать вопросы, обратиться за помощью к преподавателю на еженедельных консультациях.
За посещение лекционных и практических занятий, а также за активную работу на них, студент получает поощрительные

баллы, указанные в технологической карте.
Для закрепления пройденного материала и формирования навыков решения задач на каждом практическом занятии студент получает домашнее задание - 5-10 примеров, в зависимости от сложности, по пройденным темам. Для выполнения домашних заданий студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях. Выполнение домашних заданий поощряется баллами, указанными в технологической карте.

ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Для формирования навыков и умений, предусмотренных компетенциями, а также для активизации самостоятельной работы студентам нужно выполнить типовые расчеты (в первом и втором семестрах – по три типовых расчета, в третьем семестре – два типовых расчета). Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3. Номер варианта типового расчета выбирается согласно номера студента в списке группового журнала. Типовые расчеты выполняются в отдельной тетради с последующей обязательной защитой. Если студент за типовой расчет набирает баллы ниже минимального, установленного в технологической карте, то преподаватель возвращает типовой расчет на доработку. После доработки студент может получить только минимально возможное количество баллов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Перед выполнением типового расчета студентам нужно внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия; проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях, приведенные в рабочей программе образцы выполнения типовых расчетов (ПРИЛОЖЕНИЕ № 9). В случае затруднения выполнения заданий типового расчета следует обратиться с вопросами к преподавателю на еженедельных консультациях.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

Рубежный контроль по дисциплине «Высшая математика» проводится в виде контрольной работы. Образцы контрольных работ приведены в ПРИЛОЖЕНИи № 4.
До рубежного контроля студенты должны пройти текущий контроль: выполнить домашние задания, защитить типовой расчет.
Контрольные работы и компьютерное тестирование проводятся в отведенное преподавателем время согласно технологической карте.
В случае, если студент отсутствовал на рубежном контроле по уважительной причине, то он должен согласовать с преподавателем время, когда он сможет пройти его, но обязательно до промежуточной аттестации.
Если студент за рубежный контроль набирает менее минимального количества баллов, указанных в технологической карте, то он имеет не более двух возможностей пройти его повторно. При этом он может получить не более 75% от максимально возможных баллов, указанных в технологической карте.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо повторить пройденный теоретический материал по данному разделу, выписать и выучить используемые в данном разделе формулы, проработать задания из домашней работы и типового расчета.
Образцы выполнения контрольных работ приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 10.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРОМЕЖУТОЧНОМУ КОНТРОЛЮ

При явке на промежуточную аттестацию (экзамен, зачет, диф.зачет) студенты обязаны иметь при себе зачётные книжки, которые они предъявляют экзаменатору в начале аттестации.
На промежуточном контроле студент должен верно ответить на теоретические вопросы билета и решить практические задания.
Оценка промежуточного контроля:
- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ
- 20 баллов - Вопросы для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Образцы билетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ в ПРИЛОЖЕНИИ № 11.

Итоговая оценка выставляется суммированием баллов текущего и итогового контролей следующим образом:

Оценка по 100-бальной шкале	Оценка по традиционной системе
85 – 100	Зачтено (отлично)
70 – 84	Зачтено (хорошо)
60 – 69	Зачтено (удовлетворительно)
0 – 59	Незачтено (неудовлетворительно)

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ ОБУЧЕННОСТИ ***УМЕТЬ***

1 СЕМЕСТР

Раздел 1. Линейная и векторная алгебра

1. Найти: $P = (2A - 3B)C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выполнить действие: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Выполнить действие: $7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу $C = A^T - 3B,$ где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Выполнить действие: $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти произведение матриц AB и BA,если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

14. Вычислить определитель третьего порядка разложением по какой-либо строке или столбцу: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

15. Вычислить определитель третьего порядка разложением по какой-либо строке или столбцу: $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -7 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

16. Вычислить определитель третьего порядка разложением по какой-либо строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

17. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 8$.

18. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

19. Вычислить алгебраическое дополнение A_{12} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Вычислить алгебраическое дополнение A_{24} определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений методом Крамера, Гаусса, матричным способом:

21) $\begin{cases} 2x+y+3z=7, \\ 2x+3y+z=1, \\ 3x+2y+z=6. \end{cases}$ 22) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x+2y+z+7=0, \\ 2x+y-z-1=0, \\ 3x-y+2z-2=0. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x+y+z-7=0, \\ x+2y+z-8=0, \\ x+y+2z-9=0. \end{cases}$ 25) $\begin{cases} x+2y+3z-8=0, \\ 3x+y+z-6=0, \\ 2x+y+2z-6=0. \end{cases}$ 26) $\begin{cases} -2x+y+6=0, \\ x-2y-z-5=0, \\ 3x+4y-2z-13=0. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ 3x+4y+6=0, \\ x+z-1=0. \end{cases}$ 28) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$ 29) $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ x-y+2z+7=0, \\ 2x+3y-z-1=0. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x-y+z=3, \\ x+3y-2z=1, \\ y+2z=8. \end{cases}$

31. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x-3y+4z=0, \\ 3x+2y-z=0, \\ 8x-y+3z=0. \end{cases}$$

32. Даны координаты точек $A(1;3;5)$ и $B(2;5;6)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, длину вектора.

33. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{c}=\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(5;10;-5)$.
34. Найти угол между векторами $\vec{a}=\{1;2;-2\}$ и $\vec{b}=\{-2;6;3\}$.
35. Даны векторы $\vec{a}=0,5\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$. Найти скалярное произведение векторов.
36. Даны точки $A(3;-4;-2)$, $B(2;5;-2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$ соответственно, а с осью Oz – тупой угол γ.
37. Вычислить угол, образованный векторами $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.
38. Вычислить $пр_{\vec{a}}\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.
39. Даны векторы $\vec{a}=0,5\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $2\vec{b}-\vec{c}$.
40. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\beta\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?
41. Найти координаты вектора $\vec{a}\times(2\vec{a}+\vec{b})$, если $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$.
42. Найти значение α, при котором векторы $\vec{a}=\{\alpha+1;3-2\alpha;\alpha-1\}$ и $\vec{b}=\{1;4;4\}$ перпендикулярны.
43. Найти абсциссу вектора $\vec{a}$, если известно, что векторы $\vec{a}=(x;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$ компланарны.
44. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

1. Составить общее уравнение прямой $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ и указать координаты нормального вектора.

2. Даны вершины треугольника: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC*.
3. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси координат, зная, что прямая проходит через точки $P(2;-8)$, $Q(-1;7)$.
4. Даны вершины треугольника: $A(1;2)$; $B(3;7)$; $C(5;-13)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*.
5. Две стороны квадрата лежат на прямых $2x+3y+11=0$, $2x+3y-13=0.$ Вычислить его площадь.
6. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0.$
7. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.
8. Составить уравнение плоскости проходящей через ось Oz и точку $A(2;-3;4)$.
9. Найти расстояние от точки $M_0(1,-6,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$.
10. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x=2t-1; \\ y=t+2; \\ z=1-t. \end{cases}$ с плоскостью $3x-2y+z=0$.
11. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?
12. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.
13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.
14. При каких значениях A и B плоскости $2x+Ay+3z-5=0$ и $Bx-6y-9z+2=0$ параллельны.

15. При каком значении α и β уравнения $2x+\alpha y+3z-8=0$ и $\beta x-6y-6z+4=0$ будут определять параллельные плоскости.

Раздел 3 «Пределы функции одной переменной»
Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+x+11}{2x^4+5x^2+1}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{4x^2+5x+1}$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$,

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$,

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+4x^2+1}{x^3+5x^2+10}$,

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$,

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$

12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-4\right)}{x^2-5x+6}$

13) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2+3x+x^2}$

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-4x+3}$

15) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$

16) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{9-x^2}{x^2+x-6}$

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{\left(x-1\right)^2}$

18) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-16}$

19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-3x+2}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{6-3x}$

21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{4x-12}$

22) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$

23) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ \ -1}{\sqrt{x+3}-2}$

Раздел 4 « Дифференцирование функций одной переменной»
Найти производные функций

1) $y=\left(3^x-\sqrt[3]{x}\right)\left(3arctgx-2\log_3 x\right)+\sqrt{2}$

2) $y=\dfrac{e^x-2}{\arcsin x+2\ln x}+\sin 1$

3) $y=\dfrac{\log_2 x+tg2}{\arccos x-2x^2}-\ln 10$

4) $y=\left(2\cos x-\dfrac{3}{x}\right)\left(arcctgx+4^3\right)$

5) $y=\left(2ctgx-\dfrac{5}{x^3}\right)\left(\cos x-\ln x\right)$

6) $y=\dfrac{2^x-x^2+e^2}{2\log_2 x-3}$

7) $y=\dfrac{5e^x+3x^2}{2\arcsin x+4\sin x}+tg5$

8) $y=\left(3\cos x-4\ln x\right)\left(\dfrac{2}{x^2}+e^3\right)$

9) $y=\left(5ctgx+7^x\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+3\sin x\right)$

10) $y=\left(5\arcsin x+2^x\right)\left(\sqrt[5]{x^3}-3tgx\right)$

11) $y=\dfrac{3\ln x+5\sqrt[3]{x^7}}{2arctgx+4}+\ln 7$

12) $y=\dfrac{3e^x+5}{2tgx+4\sqrt[3]{x^4}}$

13) $y=\left(3e^x-4\cos x\right)\left(\log_3 x+5tgx\right)+\sqrt{7}$

14) $y=\left(3tgx+5\sqrt[5]{x^3}\right)\left(arcctgx-4^x\right)$

15) $y=\left(2arctgx+4^x\right)\left(3\ln x-x^3+1\right)$

16) $y=\left(2ctgx+3\ln x\right)\left(4\arcsin x-\sqrt[4]{x^3}\right)$

17) $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$

Найти производные функций сложных функций

1. $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$
2. $y=\left(x+4\sin x\right)^3$
3. $y=arctg\left(\sin 3x+4\right)$
4. $y=\ln\left(3x^2+2tgx\right)+1$
5. $y=5^{\arcsin x-3\sqrt{x}}+2$
6. $y=\arccos\left(5x^2+5\right)$
7. $y=\sin\left(\sqrt[3]{x}+4x\right)-3$

8. $y=\log_5\left(\sin 2x+4\right)+\sqrt{3}$
9. $y=tg\left(\log_2 x+3\right)$
10. $y=3^{\sqrt[4]{x}+2x}$
11. $y=\cos\left(3x-\dfrac{5}{x^2}\right)$
12. $y=\log_3\left(3x-\cos x\right)$
13. $y=\arcsin\left(2x^3+\cos x\right)$
14. $y=ctg\left(\dfrac{6}{x^3}+\ln x\right)$
15. $y=\left(\dfrac{3}{x^3}+4x\right)^3$
16. $y=\arccos\left(\ln x+4tgx\right)$.
17. $y=\arccos\left(\cos 2x-\ln x\right)$.
18. $y=arctg\left(4e^x-5\right)$.

Раздел 5 « Неопределенный интеграл»

Найти неопределенный интеграл

1)

2) $\int\dfrac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx$.

3) $\int\dfrac{x^2-1}{x^2+1}dx$.

4) $\int\dfrac{(6x\ \ -3)^2}{x}dx$.

5) $\int\dfrac{x^2 2^x+x-\sqrt[4]{x^3}}{x^2}dx$.

6) $\int\dfrac{(2x-3)^2}{x^3}dx$.

7) $\int\dfrac{x^4-5x^2e^x+9x}{x^2}dx$.

8) $\int\dfrac{3xe^x-x\sin x+5x}{x}dx$.

9) $\int\dfrac{(2x+3)^2}{x^5}dx$.

10) $\int\dfrac{2x+1}{x-1}dx$.

11) $\int\dfrac{x^2e^x-2e^x\sin x}{e^x}dx$.

12) $\int\dfrac{2x-3x^2e^x+\sqrt[4]{x^3}+3x^2}{x^2}dx$.

13) $\int \frac{\left(3x+\sqrt[3]{x}\right)}{x^2}dx$.

14) $\int \frac{xe^x-4\sqrt[4]{x}+3x-2}{x}dx$.

15) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$.

16) $\int \frac{x^2\cos x+3x^2-5x}{x^2}dx$.

17) $\int \frac{e^x x^6+4x^6\sin x+9x^4}{x^6}dx$.

18) $\int \frac{(x+2)^2}{x^2}dx$.

19) $\int \frac{(x+1)^2}{x^5}dx$.

20) $\int \frac{x^2-6}{x-5}dx$.

21) $\int \frac{4x^3+15x^2e^x+14x^4}{x^2}dx$.

22) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$.

23) $\int \left(3x-2\right)\cos 2x\,dx$.

24) $\int (3x-2)e^{2x}dx$.

25) $\int \left(3+9x\right)\cos 8x\,dx$.

26) $\int (x^2-3x)\ln x dx$.

27) $\int \left(5x+23\right)\cos 8x\,dx$.

28) $\int \left(10x-4\right)\sin 5x\,dx$.

29) $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\,dx$.

30) $\int x^4\ln x dx$.

31) $\int (2x+1)e^x dx$.

32) $\int \left(6x+2\right)\sin 6x\,dx$.

33) $\int \left(3\cos x+5\right)\sin x dx$.

34) $\int \left(3x-1\right)\sin 3x dx$.

35) $\int \left(2x+5\right)3^x dx$.

36) $\int \left(x^2+2x\right)\ln x dx$.

2 СЕМЕСТР

Вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin^6 x dx$.

2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

3. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

4. $\int\limits_{0}^{1} 6\left(x^2 + x^3 e^{x^4}\right) dx$.

5. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

6. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^6+1} dx$.

7. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin \ln x}{x} dx$.

8. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$.

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1} dz$.

10. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$.

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx$.

12. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

13. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

14. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{x}{\cos^2\left(x^2\right)} dx$.

15. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{1+7x} dx$

16. $\int\limits_{0}^{1/2} arcctg 2x dx$.

17. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(x+3\right) \sin x dx$.

18. $\int\limits_{1}^{e} x^3 \ln x dx$.

19. $\int\limits_{-3}^{0} \left(x-2\right) e^{-x/3} dx$.

20. $\int\limits_{-1}^{0} x \ln\left(1-x\right) dx$.

21. $\int\limits_{1}^{2} \ln\left(3x+2\right) dx$.

22. $\int\limits_{-1}^{0} \left(x+1\right) e^{-2x} dx$.

23. $\int\limits_{0}^{1} 2x\, arctgx dx$.

24.

25. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16-x^2} dx.$

26. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$

27. $\int\limits_{-3}^{3} x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$

28. $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$

29. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2} dx.$

30. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx.$

31. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3 \sqrt{7+x^2} dx.$

32. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}\,dl$, где L: $y=\sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

33. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}\,dl$, где L: $xy=1$, $1 \le x \le 2$.

34. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1+x^4}\,dl$, где L: $y=\frac{x^3}{3}$, $1 \le x \le 2$.

35. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L y^2\,dl$, где L: $y=\frac{x}{2}$, $0 \le x \le 2$.

36. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L y\,dl$, где L: $y=x^3$, $0 \le x \le 1$.

37. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L 2y\,dl$, где L: $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2}, \\ y=t \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

38. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{y}\,dl$, где L: $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

39. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=2\cos\phi$, $-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.

40. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=2\sin\phi$, $0 \le \phi \le \pi$.

41. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=1-\cos\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$.

42. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z=y^2xe^x$.

43. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z=\frac{x}{y^2-2x}$.

44. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z=\ln\left(x^2y+xy^2\right)$.

45. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z=e^{x^2+y^2}-x-1$.

46. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z=\log_3\left(x^6+y^2\right)+5x^2y^4+1$.

47. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^2 e^{xy}$.

48. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = \dfrac{y^2}{x + 7y}$.

49. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^3 y^4 - \sin(2x + 3y)$.

50. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^4 y^3 + e^{4x-3y}$.

51. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = x^6 y^2 - \cos(3x - 5y)$.

3 СЕМЕСТР
РАЗДЕЛ 1 «РЯДЫ»

Исследовать сходимость ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{3n+1} \right)^{2n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-2}{4n+1} \right)^{n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n-2}{6n+5} \right)^{2n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n+1}{n^2+2}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n}{2^n \cdot (3n+2)}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^2}{n^3+1}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2+1}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3}{2n!}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{5n+1} \right)^{n}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n (n-1)!}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n)!}{n^n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n} \right)^{n^2} \dfrac{1}{2^n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3\sqrt{n}-1}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n-1}{n^2+1}$.

Найти область сходимости ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+2}}x^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n(n+3)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+5)^n}{5^{2n}}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n(n^2+1)}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+2}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\frac{(x-3)^n}{3^n}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+2}}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{n^2+1}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{4n-3}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+5)^n}{n\cdot 5^n}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{7n-11}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)^{2n}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+5)^n}{n^2\cdot 4^n}$

Раздел «Теория поля»

1. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(x-z)\bar{i}-y\bar{j}+(y+z)\bar{k}$.
2. Найти производную скалярного поля $u=x^2\cos y+x^3y+5xz-5xz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.
3. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2y+xz^3+5yz^2+x$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.
4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(2x^2-z)\bar{i}-xy\bar{j}+(y^2+z)\bar{k}$.
5. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(-2x-3yz)\bar{i}+(-2y-3xz)\bar{j}+(-2z-3xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.
6. Найти производную скалярного поля $u=(x^2+4x^3)\cos y+5xz$ в точке $M_0(0;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;0;1)$.

7. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = xy^2\overline{i} - y^3z\,\overline{j} + (2y+z)\overline{k}$
8. Найти градиент скалярного поля $u = xyz^2 + 4xz + xy - z^2 + 2$ в точке $M_0(4;-2;0)$ и его модуль.
9. Найти градиент скалярного поля $u = 2x^2y^4 + xz^3 + 5z^2 + xyz$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.
10. Найти градиент скалярного поля $u = 4x^3z + 5x^2y - yz^2 + 6x + 5$ в точке $M_0(-1;-2;3)$ и его модуль.
11. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (2x^2y - z)\overline{i} - xy\,\overline{j} + (y+2z)\overline{k}$.
12. Найти производную скалярного поля $u = x\cos y + x^2y + 5xz - 5xyz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.
13. Найти производную скалярного поля $u = xe^y + ye^x - z^2$ в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.
14. Найти градиент скалярного поля $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M_0(0;1;2)$ и его модуль.
15. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x+y+z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
16. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $3x+y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
17. Вычислить ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{a}(M) = 3(x-z)\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j} + 3z\vec{k}$.
18. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (3x-yz)\vec{i} + (3y-xz)\vec{j} + (3z-xy)\vec{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал.
19. Найти производную скалярного поля $u = \ln(3-x^2) + xy^2z$ в точке $M_0(1;3;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(0;5;0)$.
20. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

Разделы «Дифференциальные уравнения первого порядка» и «Дифференциальные уравнения высших порядков»

1. Определить тип дифференциального уравнения $(1-x^2)y' + xy - 3 = 0$
2. Определить тип дифференциального уравнения $y'(x^2-4) = 5$
3. Определить тип дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$
4. Определить тип дифференциального уравнения $(x+y-1)dx + (x+e^y)dy = 0$
5. Определить тип дифференциального уравнения $x(y'-y) = e^x$
6. Определить тип дифференциального уравнения $xy' - 3y + x^4y^2 = 0$

7. Определить тип дифференциального уравнения $y' - 2\sqrt{y}\ln x = 0$
8. Определить тип дифференциального уравнения $3y' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$
9. Определить тип дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$
10. Определить тип дифференциального уравнения $\left(x^2 + 2xy + 1\right)dx + \left(x^2 + y^2 - 1\right)dy = 0$
11. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{3y^2 + 1} + \frac{dy}{2x - 1} = 0$
12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \left(y^2 + 1\right)e^x$
13. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^2 dx + \frac{dy}{4x^3 - 1} = 0$
14. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{\sin x}{2 - 3y^2}$
15. Найти общее решение дифференциального уравнения $xydx - \frac{1 + y}{3x + 2}dy = 0$
16. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{e^x + 1}{tgy}$
17. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{2x - 1}{y^2}dx + (4y - 3)xdy = 0$
18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{2\cos^2 y}{x^2 - 1}$
19. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{x}{3y + 2}dx - \frac{y}{6x}dy = 0$
20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{\left(e^y + 1\right)\sqrt{1 - x^2}}$
21. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$
22. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$
23. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{ctg\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}$
24. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 2e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
25. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(2xy^2 + 1\right)dx + \left(2x^2 y - 3\right)dy = 0$
26. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(12x^3 y - 4\right)dx + \left(3x^4 + 10y\right)dy = 0$

27. Найти общее решение дифференциального уравнения $(5-4xy^2)dx+(e^y-4x^2y)dy=0$
28. Найти общее решение дифференциального уравнения $(4x^3y^2+2x)dx+(2x^4y-2y)dy=0$
29. Найти общее решение дифференциального уравнения $(e^y-4x^3)dx+(xe^y+3y^2)dy=0$
30. Найти общее решение дифференциального уравнения $(6xy^2-4)dx+(6x^2y+8y^3)dy=0$
31. Общее решение однородного уравнения $y''+6y'+9y=0$ имеет вид
32. Общее решение однородного уравнения $y''+3y'-4y=0$ имеет вид
33. Общее решение однородного уравнения $y''-8y'+16y=0$ имеет вид
34. Общее решение однородного уравнения $y''-10y'+25y=0$ имеет вид
35. Общее решение однородного уравнения $y''-3y'+2y=0$ имеет вид
36. Общее решение однородного уравнения $y''+2y'+y=0$ имеет вид
37. Общее решение однородного уравнения $y''+4y'+5y=0$ имеет вид
38. Общее решение однородного уравнения $y''-6y'+13y=0$ имеет вид
39. Общее решение однородного уравнения $y''-4y'-5y=0$ имеет вид
40. Общее решение однородного уравнения $y''-2y'+10y=0$ имеет вид

4 СЕМЕСТР

1. Участники жеребьевки тянут жетоны из ящика. Номера жетонов от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифру 6.
2. Бросают две шестигранные игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков – нечетное число.
3. В лотерее разыгрываются 500 билетов. Крупные выигрыши падают на билеты, номера которых содержат три одинаковых цифры. Некто купил один билет. Найти вероятность того, что он выиграет крупный выигрыш.
4. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков равна 8 , а разность – 4?
5. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают одну. Найти вероятность того, что будет извлечена фигура любой масти (под фигурой понимают даму, валета, короля).
6. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков равно 8.
7. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимается наудачу одна пуговица. Какова вероятность того, что пуговица будет красная?
8. Найти вероятность того, что подброшенная кость упадет, показав на верхней грани четное или кратное трем число очков.
9. Вероятность попадания стрелком в мишень, равна 0,9. Какова вероятность того, что он попадет только при первом выстреле из трех.
10. В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
11. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?
12. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05; от второго — 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

13. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
14. В урне находятся 15 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад один шар, снова возвращают его в урну и шары перемешивают. Затем вынимают второй шар. Найдите вероятность, что оба вынутых шара белые.
15. Разрыв электрической цепи может произойти только вследствие выхода из строя элемента K_1 или одновременного выхода двух элементов K_2 и K_3, которые выходят из строя с вероятностями 0,3; 0,2; 0,2. Найти вероятность разрыва цепи.
16. На отдельных карточках написаны буквы «и», «л», «о», «с», «ч». После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Вычислите вероятность того, что получится слово «число».
17. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6; 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок производит выстрел. Какова вероятность, что он попадет в мишень?
18. В первом ящике 20 деталей из них 16 стандартных, во втором – 30 деталей из них 24 стандартные, в третьем 10 из них 6 стандартные. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика будет стандартная.
19. В тире 5 ружей. Вероятности попадания из которых соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.
20. Три оператора радиолокационной установки производят соответственно 25%, 35%, 40% всех измерений, допуская при этом 5%, 4% и 2% ошибок. Случайно произведенное измерение оказалось ошибочным. Какова вероятность того, что измерение производил первый оператор?
21. В каждом из восьми независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,38. Найдите наивероятнейшее число наступлений события A в каждом испытании.
22. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найдите вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.
23. Если 30% студентов имеют слабое зрение, то какова вероятность того, что 5 из 10 студентов имеют слабое зрение?
24. Вероятность того, что Вы выиграете в шахматы, равна 0,33. Какова вероятность, что Вы выиграете 4 партии из 6.
25. Какова вероятность выиграть у равносильного противника в бильярд не менее 4 партий из 5?
26. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число попаданий, если стрелок 7 раз стреляет в мишень.
27. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом «герб» выпадет 3 раза?
28. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет три?
29. На складе хранится 500 аккумуляторов. Известно, что после года хранения 20 штук выходят из строя. Требуется найти вероятность того, что наудачу взятый после года хранения аккумулятор окажется годным.
30. Завод отправил на базу 5 000 изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути равна 0, 0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут ровно 3 негодных изделия.
31. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70% студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят 150 студентов.

32. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70% студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят не менее 100 студентов.
33. На пути движения автомобиля пять светофоров, каждый из которых либо разрешает, либо запрещает проезд с вероятностью 0,5. Составить, закон распределения случайной величины *X* – числа светофоров, пройденных автомобилем без остановки.
34. Дискретная случайная величина может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 > x_2$. Известны вероятность $p_1 = P(x = x_1 = 0{,}3)$, $M(X) = 3{,}7$ и $D(X) = 0{,}21$. Найти закон распределения этой величины.
35. Случайная величина *X* задана законом распределения

X	2	3	?	11
P	0,1	?	0,3	0,2

Известно, что математическое ожидание *X* равно 5,7. Найти а) Найти $P(X = 3)$, б) значение *X*, которое она принимает с вероятностью 0,3.
36. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 6X + 3Y$, если известны: $M(X) = 3$, $M(Y) = 5$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 7$.
37. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X + 6Y$, если известны: $M(X) = 4$, $M(Y) = 2$, $D(X) = 3$, $D(Y) = 2$.
38. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2Y$, если известны: $M(X) = 2$, $M(Y) = 3$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 7$.
39. В итоге четырех измерений некоторой величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты 8,9,11,12. Найти выборочную среднюю результатов и дисперсию ошибок прибора.
40. Найти: а) значение p_3, б) $M(X)$ и $D(X)$. Если дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

x_i	-2	-1	3
p_i	0,5	0,1	p_3

41. Найти: а) значение p_2, б) $M(X)$ и $D(X)$. Если дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

x_i	2	3	5
p_i	0,2	p_2	0,2

42. Случайная величина задана законом распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a(x^2 - x), & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти параметр *a*.
43. Случайная величина задана законом распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{C}{x^7}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Найти параметр *C*. Вычислить $M(X)$.
44. Случайная величина задана законом распределения

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти параметр а. Вычислить $M(X)$.

45. Случайная величина задана законом распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ a(3x-x^2), & 0<x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Найти параметр а. Вычислить вероятность события $1<X<2$.

46. Случайная величина задана законом распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Вычислить $M(X)$ и $D(X)$. Найти вероятность события $1<X<2$.

47. Случайная величина задана законом распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & -3<x<3, \\ 0, & x\ge 3. \end{cases}$$

Найти вероятность события $X>1$.

48. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найти среднее число искаженных символов.

49. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения ровно 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут

50. 20 % изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждаются в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 150 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X – числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

51. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с $M(X)=175$ см. и $\sigma(X)=6$ см. Найти вероятность того, что рост наудачу выбранного мужчины будет от 170 до 180 см.

52. При весе некоторого изделия в 10 кг найдено, что отклонение по абсолютной величине превосходящее 50 г. встречается в среднем 34 раза из тысячи изделий. Считается, что вес изделий распределен нормально, найти его $\sigma(X)$.

53. Среднее значение скорости ветра у поверхности земли в некоторой местности равно 16 км/час. Оценить вероятность того, что при однократном наблюдении скорость ветра не превысит 80 км/час.

54. Известно, что в среднем 5% студентов носят очки. Оценить вероятность того что из 200 студентов, сидящих в аудитории окажется не менее 19% носящих очки.

55. Электростанция обслуживает сеть с 18 000 ламп, вероятность включения каждой из которых в зимний вечер равна 0,9. Какова вероятность того, что число ламп, включенных в сеть отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 200?

56. За пять месяцев работы малое предприятие «Воробышек» получало ежемесячную прибыль (в у.е.): 2, 4, 7, 4, 5. Найдите выборочную среднюю, моду и медиану.
57. За пять месяцев работы малое предприятие «Интеграл» получало ежемесячную прибыль (в у.е.): 2, 4, 7, 4, 5. Найдите выборочную среднюю и исправленную дисперсию, моду и медиану.
58. Фермерское хозяйство засеяло пшеницу на 9 полях, и с каждого гектара 1-го поля получило по 21 центнеру пшеницы. Зная, что урожайность на других полях составила 24; 18; 28; 18; 24,4; 21; 21; 19, определите среднее арифметическое, медиану и моду этих чисел.
59. Следующие данные показывают годовой прирост на 15 различных акций: 12.2, 13, 14.8, 11, 16.7, 9, 8.3, -1.2, 3.9, 15.5, 16.2, 18, 11.6, 10, 9.5. Найдите выборочную среднюю и медиану.
60. Найти выборочную среднюю, дисперсию, моду и медиану случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

61. Изучалась качество продукции. Были получены данные.

Оценка качество продукции, балл	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10
Число случаев	3	8	36	89	45

Определить средний балл качества продукции. Вычислить моду и медиану.
62. В таблицу приведены данные.

x_i	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
n_i	15	25	30	20	10

Определить исправленную выборочную дисперсию.
63. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, моду и медиану по заданному распределению выборки

варианта	65	70	75	80	85	90	95
частота	3	5	15	25	20	7	5

64. По данным выборки объема $n=16$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,95.
65. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если: $\sigma=4$, $\bar{x}_в=10{,}2$, $n=16$.
66. По выборке из 25 упаковок товара средний вес составил 101 г с исправленным средним квадратическим отклонением 3 г. Построить доверительный интервал для среднего с вероятностью 95%.
67. Имеются выборочные данные о стаже работы (X, лет) и выработке одного рабочего за смену (Y, шт):

X	1	3	4	5	6	7
Y	14	15	18	20	22	25

Построить уравнение линейной регрессии.

68. В магазине постельных принадлежностей были проведены в течение пяти дней подсчеты числа покупок простыней X и подушек $У$:

X	10	20	25	28	30
$У$	5	8	7	12	14

Найти выборочное уравнение линейной регрессии $У$ на X.

69. Рассчитать коэффициент корреляции между количеством пропущенных студентом пар *X* и его успеваемостью *Y*, оцениваемой по 100 бальной шкале, пользуясь данными таблицы.

X	6	2	15	9	12	5	8
Y	82	86	43	74	58	90	78

70. Имеются выборочные данные об общем весе некоторого растения (X, г.) и весе его семян (Y, г.). Данные приведены в таблице:

X	40	50	60	70	80	90	100
Y	20	25	28	30	35	40	45

Предполагая, что зависимость линейная, рассчитать выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени и направлении тесноты связи.

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ ОБУЧЕННОСТИ ***ВЛАДЕТЬ***

1 СЕМЕСТР

Установить совместность и найти общее решение систем линейных уравнений

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+3x_2+x_3-2x_4=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+2x_2+3x_4=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -9x_1+6x_2+7x_3+10x_4=3, \\ -6x_1+4x_2+2x_3+3x_4=2, \\ -3x_1+2x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4, \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2, \\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+5x_4=-1, \\ 3x_1-3x_2+6x_3+15x_4=-3, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1, \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=2, \\ x_1+x_2-x_3-9x_4=-1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3, \\ 2x_1-x_2+x_4=2, \\ 3x_1-x_3-x_4=-1. \end{cases}$

11. Вычислить работу силы $\overline{F}=2\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-2;1-3)$ в положение $B(3;-2;1)$.

12. Найти длину вектора $\bar{a}=2\bar{x}-3\bar{y}$, если $|\bar{x}|=2$ $|\bar{y}|=1$ $\angle(\bar{x},\bar{y})=60^0$.

13. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ и $\bar{b}=5\bar{j}-7\bar{k}$.

14. Даны вершины треугольника $A(2;0)$, $B(-4;3)$, $C(1;5)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A.

15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;4)$ параллельно прямой $2x+3y-7=0$.

16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y+4=0$ и $3x-y-9=0$ перпендикулярно прямой $x+y-7=0$.

17. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20 м. Величина его прогиба на расстоянии 2 м от точки крепления, считая по горизонтали, равна 14,4 см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы.

18. Установить, какая линия определяется уравнением $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

19. Какую линию определяет уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ и построить данную кривую.

20. Какую линию определяет уравнение $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x+5}$ и построить данную кривую.

21. Какую линию определяет уравнение $x=-\sqrt{y^2-4y}$ и построить данную кривую.

22. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$.

23. Установить, какая линия определяется уравнением $4x^2-3y^2-24x+6y-3=0$ и построить ее.

24. Определить тип кривой $5x^2+4y^2+20x-16y-44=0$ и построить ее.

25. Определить тип кривой $5x^2+4y^2+20x-16y-44=0$ и построить её.

26. Установить, какая линия определяется уравнением $y=1-\sqrt{4x+8}$. Построить ее.

27. Установить, какая линия определяется уравнением $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$. Построить ее.

28. Установить, какая линия определяется уравнением $9x^2+4y^2+54x-8y+49=0$. Построить ее.

29. Установить, какая линия определяется уравнением $x^2-2x+y^2+4y+9=0$. Построить ее.

30. Установить, какая линия определяется уравнением $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$. Построить ее.

31. Установить, какая линия определяется уравнением $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$. Построить ее.

В заданиях 32– 37 определить типы поверхностей и построить их.

32. $x^2+4x+y^2+3z^2-6z-2=0$;

33. $y^2=-4(z+1)$;

34. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$;

35. $3x^2-12x+6y^2+12y+5z^2-20z+8=0$;

36. $\frac{x^2}{4}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$;

37. $-\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-4}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{tg^3 x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin\left(6x^2\right)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg12x}{\ln(1+6x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x)}{e^{10x}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2(10x)}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\ )}{\arcsin(6x)}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{arctg^2(5x)}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{e^{2x^2}-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+14x)}{\arcsin 7x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\sin\left(4x^2\right)}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{e^{3x^2}-1}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2(3x)}{e^{6x^2}-1}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x^3\right)}{arctg^3 x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(4x)}{\ln(1+3x)}$

Найти производные функций

1. $y=(\cos x)^{5e^x}$
2. $y=\left(x^3+4\right)^{tgx}$
3. $y=(tgx)^{4x}$
4. $y=x^{arctgx}$
5. $y=(\sin x)^{3x}$
6. $y=x^{\arcsin x}$
7. $y=(\sin x)^{x+1}$
8. $y=\left(x^3-1\right)^x$
9. $y=x^{\arcsin x}$
10. $y=(\sin x)^x$

Найти производную y'_x функции

1) $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=4t^2+5 \\ y=3t^4+11 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=\ln(5+t) \\ y=arctgt \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=e^t \\ y=\left(t^2-t\right)\cdot e^t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x=\ln\left(t+1\right) \\ y=t^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=3t^2-5t \end{cases}$

9) $\begin{cases} x=t^2+3t \\ y=t^3-27t \end{cases}$

10) $\begin{cases} x=\ln\left(t^2+1\right) \\ y=t^3+1 \end{cases}$

Найти производную y' от неявной функции

1. $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$
2. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$
3. $x^2+yx+e^y=0$
4. $x^3y+x^2y^2+xy^3=0$
5. $2x^2+y^2-4x+10y+5=0$
6. $e^x-e^y=y-x$
7. $5x^2+3xy-2y^2+3=0$
8. $2x^2+3^y+x\ln y=0$
9. $x^2y^3+x-\sin y=0$
10. $3y^2+\sin y-x2^y=0$

Найти неопределенный интеграл

1. $\int x^2\cdot\sqrt[3]{2+3x^3}dx$
2. $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx$
3. $\int \frac{e^x}{e^x-3}dx$
4. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$
5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
6. $\int e^x\sqrt{e^x+3}dx$
7. $\int\left(\sin x+5\right)^2\cos xdx$
8. $\int \sqrt[6]{x^4-11}\cdot x^3dx$
9. $\int e^{x^6}\cdot x^5dx$
10. $\int \frac{ctg^3x}{\sin^2 x}dx$
11. $\int\left(e^x+5\right)^4 e^xdx$
12. $\int x^4\cdot\sqrt[4]{2+3x^5}dx$
13. $\int \frac{\left(arctgx\right)^2}{1+x^2}dx$

14. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
15. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6} dx$
16. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$
17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+4}}$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{3x}+1} dx$
19. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-1}}$
20. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$
21. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-4}}$
22. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{4x+5}}$
23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$

Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$
2) $y = 2x^2 - 8x + 2$
3) $y = 4x^3 + 4x^2 + x - 16$
4) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$
5) $y = 3x - x^3$
6) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$
7) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$
8) $y = x^4 - 2x^2 - 5$
9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
10) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$
11) $y = x^3 - 3x^2$
12) $y = x^4 - 2x^2 + 5$
13) $y = 2x^3 - 3x^2$
14) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$
15) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$
16) $y = 3x^4 - 6x^2 + 5$

2 СЕМЕСТР

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$, $y = x + 8$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x=(t-\sin t) \\ y=(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=7\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r^2=4\cos 2\phi,\ r=\sqrt{2}\left(r\geq\sqrt{2}\right)$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\cos\phi, r=3\cos\phi.$

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=3\sin\phi, r=5\sin\phi.$

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=3\left(1+\cos\phi\right), r=3{,}5(r\geq 3{,}5).$

12. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^2, y=2.$ Ось вращения Oy.

13. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^3, y=x.$ Ось вращения Ox.

14. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^3, y=x^2.$. В вариантах 1-13 ось вращения Ox, в вариантах 14-25 ось вращения Oy.

15. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^2, y=x.$ Ось вращения Oy.

16. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y=\ln\cos x+2, 0\leq x\leq\pi/6$

17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2\pi.$

18. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $\rho=6\sin\phi, \quad 0\leq\phi\leq\pi/3.$

19. Исследовать на экстремум функцию: $z=(x-1)^2-2y^2$

20. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2+xy+y^2+x-y-1$

21. Исследовать на экстремум функцию: $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$

22. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$

23. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2-xy+y^2-2x+y$

24. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

25. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2+(y-1)^2$

26. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2+y^2-2x-2y+8$

27. Исследовать на экстремум функцию: $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$

28. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+10$

29. Вычислить интеграл $\iint\limits_D 2xdxdy$, где область D ограничена линиями: $y-x=5$, $x=0$, $y=0$.

30. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где область D ограничена линиями: $x=4$, $y=0$, $y=\sqrt{x}$.

31. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2dxdy$, где область D ограничена линиями: $y-x=4$, $x=0$, $y=0$.

32. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2dxdy$, где область D ограничена линиями: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$.

33. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2$, $y=4$.

34. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^3$, $x=1$, $y=0$.

35. Вычислить интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2$, $y=x$.

36. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, где область D ограничена линиями: $x=y^2$, $y=4$.

37. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

38. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$.

3 СЕМЕСТР

Разложить в ряд Фурье функцию

1. $y=2x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
2. $y=x$ в интервале $(-3,3)$.
3. $f(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x\le 0\\ 2, & 0<x\le 2\end{cases}$.
4. $y=2x$ в интервале $(-4,4)$
5. $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$.
6. $y=3x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
7. $y=x$ в интервале $(-2,2)$.
8. $y=x$ в интервале $(-3,3)$.
9. $y=10x$ в интервале $(-5,5)$.
10. $y=|x|+x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

11. $y=|x|$ в интервале $(-4,4)$.
12. $y=5x$ в интервале $(-3,3)$.

Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

1. $y=x+1$ в интервале $x\in(0,\pi)$.
2. $y=x-2$ в интервале $x\in(0,3)$.
3. $y=2x$ в интервале $(0,\pi)$.
4. $y=2x-3$ в интервале $(-2,2)$.
5. $y=x^2$ в интервале $(0,\pi)$.

Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

1. $y=x+1$ в интервале $x\in(0,\pi)$.
2. $y=x-2$ в интервале $x\in(0,3)$.
3. $y=x-1$ в интервале $(0,\pi)$.
4. $y=2x-1$ в интервале $(0,\pi)$.

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

1. $\overline{a}(M)=x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(2x-y+2z)\overline{k}$; p: $x+2y+z=2$.
2. $\overline{a}(M)=(x+y)\overline{i}+(y+2z)\overline{j}+z\overline{k}$; p: $2x+y+z=4$
3. $\overline{a}(M)=5x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(2x+z)\overline{k}$; p: $x+y+z=2$
4. $\overline{a}(M)=(y+2z)\overline{i}+2z\overline{j}+(x-y)\overline{k}$; p: $x+3y+z=3$
5. $\overline{a}(M)=z\overline{i}+(x-z)\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$; p: $x+y+z=2$
6. $\overline{a}(M)=(y-2x)\overline{i}+(y-z)\overline{j}+x\overline{k}$; p: $x+y+3z=3$
7. $\overline{a}(M)=3x\overline{i}+(x-z)\overline{j}+(2x-y)\overline{k}$; p: $x+4y+z=4$.
8. $\overline{a}(M)=(2x+z)\overline{i}+z\overline{j}-y\overline{k}$; p: $3x+y+3z=3$.
9. $\overline{a}(M)=3x\overline{i}+(x-z)\overline{j}+(2x-y)\overline{k}$; p: $x+4y+z=4$.
10. $\overline{a}(M)=(y+2z)\overline{i}+2z\overline{j}+(x-y)\overline{k}$; p: $x+3y+z=3$.
11. $\overline{a}(M)=2x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(2x-y+2z)\overline{k}$; p: $2x+2y+z=2$.
12. $\overline{a}(M)=(x+2y)\overline{i}+(y-2z)\overline{j}-z\overline{k}$; p: $2x+y+z=2$.
13. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$; p: $2x+y+z=4$.
14. $\vec{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+z\vec{k}$; p: $x+y+z=2$.
15. $\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$; p: $x+2y+2z=6$.
16. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$; p: $x+2y+z=2$.
17. $\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+z\vec{k}$; p: $x+4y+2z=8$.
18. $\vec{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$; p: $2x+y+z=6$.

19. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$;   р: $x + 2y + 2z = 2$

20. $\vec{a}(M) = (2y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} - 2z\vec{k}$;   р: $x + y + z = 2$.

Дифференциальные уравнения

1. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, если $y(0) = 2$
2. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' + \dfrac{y}{x} = 4x^2$, если $y(1) = 0$
3. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' - 3x^2 y = 2(x+1)e^{x^3}$, если $y(0) = 5$
4. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' + 4xy = 4x^3 e^{-2x^2}$, если $y(0) = -3$
5. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' - \dfrac{3y}{x} = 2x^4 - 3x^5$, если $y(1) = 2$
6. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' + \dfrac{4y}{x} = \dfrac{3}{x^2}$, если $y(2) = 0$
7. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' - 6x^2 y = 9x^2 e^{2x^3}$, если $y(0) = 2$
8. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' + 8x^3 y = (2x+1)e^{-2x^4}$, если $y(0) = -3$
9. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' - \dfrac{5y}{x} = 3x^7$, если $y(1) = 1$
10. Указать значение C в решении задачи Коши для дифференциального уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 - x$, если $y(2) = 4$
11. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$ имеет вид
12. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$ имеет вид
13. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$ имеет вид
14. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$ имеет вид
15. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$ имеет вид
16. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$ имеет вид
17. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$ имеет вид
18. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$ имеет вид
19. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$ имеет вид
20. Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$ имеет вид

21. Частное решение дифференциального уравнения $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$ ищется в виде:
22. Частное решение дифференциального уравнения $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^{x}$ ищется в виде
23. Частное решение дифференциального уравнения $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^{x}$ ищется в виде
24. Частное решение дифференциального уравнения $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$ ищется в виде
25. Частное решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}$ ищется в виде
26. Частное решение дифференциального уравнения $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$ ищется в виде
27. Частное решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$ ищется в виде
28. Частное решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^{x}$ ищется в виде
29. Частное решение дифференциального уравнения $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^{x}$ ищется в виде
30. Частное решение дифференциального уравнения $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$ ищется в виде
31. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y \end{cases}$
32. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$
33. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$
34. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$
35. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$
36. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y \end{cases}$
37. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
38. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
39. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y \end{cases}$
40. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

4 СЕМЕСТР

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность не менее 3 попаданий при четырех выстрелах.
2. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5 % обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($A\overline{B}$) – 7,9 %, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{A}B$) – 8,9 %, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{A}\overline{B}$) – 78,2 %. Найти связь между цветом глаз отца и сына.
3. Испытание состоит в подбрасывании трех кубиков. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью не менее 0,95 хотя бы один раз появилось «три единицы»?
4. Какова должна быть вероятность изготовления изделия, удовлетворяющего стандарту, чтобы с вероятностью, равной 0,9 можно было утверждать, что среди 20 изготовленных изделий хотя бы одно не удовлетворяет стандарту.
5. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Было произведено 600 выстрелов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9948 будет заключено число попаданий в цель.
6. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти число выстрелов, которые надо произвести по мишени, чтобы с вероятностью 0,9948 ожидать, что отклонение относительной частоты от вероятности попадания при одном выстреле по модулю будет меньше величины 0,05.
7. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что частость годных деталей отклоняется от вероятности годной детали равной 0,9 по модулю не более, чем на 0,01.
8. В ящике лежат 5 изделий, одно из них бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное. Составить закон распределения случайной величины X – числа вынутых изделий. Вычислить $M(X)$, $D(X)$.
9. Среди 20 приборов имеется 6 неточных. Наудачу берется 4 прибора. Требуется вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X - числа точных приборов среди отобранных.
10. На базе хранятся 10 холодильников, среди которых 2 бракованных. Из этого числа холодильников в магазин привезли 5 холодильников. Требуется составить закон распределения случайной величины X - числа годных холодильников среди привезённых в магазин; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
11. Случайная величина задана законом распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a(x^2-x), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

Вычислить вероятность того, что в двух опытах величина примет значение из интервала (1,5;2).

12. Случайная величина задана законом распределения $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & -3<x<3,\\ 0, & x\ge 3.\end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность события $X>1$.

13. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<-1,\\ a+b\arcsin x, & \text{если } -1\le x\le 1,\\ 1, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Найти параметры a и b. Вычислить $M(X)$.

14. Средняя продолжительность телефонного разговора равна 3 мин. Считая, что время разговора является случайной величиной, распределенной по показательному закону найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 минут,

15. Известно, что время работы электрической лампы подчиняется нормальному закону распределения. Средняя продолжительность горения оказалась равной 1000 ч., среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы 40 ч. Найти $M(X^2)$.

16. Деталь изготавливается на станке с систематической ошибкой 3, среднеквадратической ошибкой 4 и считается годной, если ее отклонение от номинала менее 12. Найти вероятность того, что три наудачу взятые детали из пяти будут годными.

17. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с $M(X)=175$ см. и $\sigma(X)=6$ см. Найти вероятность того, что хотя бы один из трех мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

18. Случайная величина X распределена нормально, ее плотность вероятности имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{8}}$.Найти дисперсию случайной величины $Y=3X-1$, зная, что $Y\sim N(a,\sigma)$.

19. Случайная величина X распределена нормально, ее плотность вероятности имеет вид $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$. Найти $M(Y)$ случайной величины $Y=3X-1$, зная, что $Y\sim N(a,\sigma)$.

20. На автомате изготовляются заклепки. Диаметр их головок представляет случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $a=2$ мм и $\sigma^2=0{,}01$ мм^2. Какие размеры диаметра головок можно гарантировать с вероятностью 0,95?

21. Среднее суточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 квт-час, а среднее квадратическое отклонение 200 квт-час. Какого потребления электроэнергии в данном населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью не меньшей 0,96.

22. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=10$:

Варианта x_i	-2	1	2	3	4	5
Частота n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

23. Среднее время сборки изделия составляло 90 минут. Инженер изобрел новый метод сборки этого изделия, и продолжительность сборки 10 изделий новым способом составила 79; 74; 112; 95; 83; 96; 77; 84; 70; 90 (мин). Построить доверительный интервал для нового среднего времени сборки с надежностью 95%.

24. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины (длины протяжки) прибором, не имеющим систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерения.

25. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений.

26. Случайная величина X (число поврежденных изделий в одном контейнере) распределена по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Приведено эмпирическое распределение числа поврежденных изделий в 500 контейнерах. Найти точечную оценку неизвестного параметра.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

27. Случайная величина X (время безотказной работы элемента) распределена по показательному закону. Приведено эмпирическое распределение среднего времени работы 1000 элементов:

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

Найти точечную оценку неизвестного параметра.

28. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x\geq 0)$. Произведена выборка

x_i	3	5	6	8	10
n_i	2	3	5	10	10

Найти статистическую оценку параметра λ методом моментов.

29. Используя критерий χ^2 на уровне значимости 0,01 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки:

Эмпирическая частота n_i	8	16	40	72	36	18	10
Теоретическая частота n_i'	6	18	36	76	39	18	7

30. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

Эмпирические частоты	6	12	16	40	13	8	5
Теоретические частоты	4	11	15	43	15	6	6

31. Установить, пользуясь критерием Пирсона, при $\alpha = 0{,}05$ случайно или значимо расхождение между эмпирическими n_i, и теоретическими частотами n'_i, которые вычислены из предположения, что совокупность распределена нормально.

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n'_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6

32. В таблице представлены данные о средних размерах пенсий в Кыргызстане за 2011-2015гг.

Год	2011	2012	2013	2014	2015
Выплаты, сом	3853	4274	4508	4710	4896

Необходимо сделать прогноз о среднем размере пенсии на 2018г.

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 1

Задание 1. Найти P=(2A–3B)C

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 6\\ 7 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ 2\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 6 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x-y+2z=3,\\ x+y+2z=-4,\\ 4x+y+4z=-3.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}5x-6y+4z=0,\\ 3x-3y+z=0,\\ 2x-3y+3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+21\vec{k}$ Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}-3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p-2q$, если $|p|=4$, $|q|=1$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/4$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Вычислить: а) площадь грани BCD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(-3,1,-9)$, $A(6,-3,5)$, $B(9,5,-7)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 2

Задание 1. Найти P=(2A–3B)C

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6\\ -3 & 4 & 5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\\ 4 & -3\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 5 & -1 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-y+z=12,\\ x+2y+4z=6,\\ 5x+y+2z=3.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+2y-5z=0,\\ 2x-4y+z=0,\\ 3x-2y-4z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

е) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=p-3q$, если $|p|=1/5$, $|q|=1$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/2$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(2,19,-49)$, $A(5,3,4)$, $B(6,-4,-1)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 3

Задание 1. Найти **P=(2A–3B)C**:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}4 & -5 & -1 & -5\\ -3 & 2 & 8 & -2\\ 5 & 3 & 1 & 3\\ -2 & 4 & -6 & 8\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x-y+3z=-4,\\ x+3y-z=11,\\ x-2y+2z=-7.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ 2x-3y+4z=0,\\ 3x-2y+5z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=-7\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=2p+q$, если $|p|=2$, $|q|=3$, $\left(\widehat{pq}\right)=3\pi/4$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$. Вычислить: а) площадь грани ABD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(-4,5,-79)$, $A(4,-2,3)$, $B(7,0,-3)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 4

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\6&1&-5\\7&0&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&1&4\\-2&0&7\\0&3&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}3&5&3&2\\2&4&1&0\\1&-2&2&1\\5&1&-2&4\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-2y+4z=12,\\3x+4y-2z=6,\\2x-y-z=-9.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+2y+4z=0,\\5x+y+2z=0,\\4x-y-2z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=-4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}+5\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=3p-2q$, если $|p|=4$, $|q|=1/2$, $\left(\widehat{pq}\right)=5\pi/6$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-5,-3,-4)$, $B(1,4,6)$, $C(3,2,-2)$, $D(8,-2,4)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(4,11,-6)$, $A(3,5,1)$, $B(4,-2,-3)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 5

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 5 & 6 & -7\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 8\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}6\\ -5\\ 1\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & -5\\ 4 & 3 & -5 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}8x+3y-6z=-4,\\ x+y-z=2,\\ 4x+y-3z=-5.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}3x-y+z=0,\\ 2x+3y-4z=0,\\ 5x+2y-3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=p+3q$, если $|p|=2$, $|q|=3$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/3$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$. Вычислить: а) площадь грани ABD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(3,-5,7)$, $A(2,3,-5)$, $B(0,4,3)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 6

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1\ 3\ 0\\ 2-41\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}4x+y-3z=9,\\ x+y-z=-2,\\ 8x+3y-6z=12.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 3x+3y+5z=0,\\ 4x+y+6z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=7\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p+3q$, если $|p|=3$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/2$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **А**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **В**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **В.**
$\vec{F}=(5,4,11)$, $A(6,1,-5)$, $B(4,2,-6)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 7

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 7 & -1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x+3y+4z=33,\\ 7x-5y=24,\\ 4x+11z=39.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x+y-3z=0,\\ x+2y-4z=0,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=-12\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p-q$, если $|p|=7$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/4$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$. Вычислить: а) площадь грани BCD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **А**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **В**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **В.**

$\vec{F}=(-9,5,7)$, $A(1,6,-3)$, $B(4,-3,5)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 8

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 7 & -3\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ -4 & 2 & -9\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 4 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x+3y+4z=12,\\ 7x-5y+z=-33,\\ 4x+z=-7.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x-y+2z=0,\\ 4x+y+5z=0,\\ 2x+2y+3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=-2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=3p+q$, если $|p|=1,\ |q|=2,\ \left(\widehat{pq}\right)=\pi/6$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$. Вычислить: а) площадь грани ABD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(6,5,-7)$, $A(7,-6,4)$, $B(4,9,-6)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 9

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-9 & 4 & 1\\ 5 & 2 & -4\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}0 & -2 & 1 & 7\\ 4 & -8 & 2 & -3\\ 10 & 1 & -5 & 4\\ -8 & 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x+4y-z=6,\\ 5y+4z=-20,\\ 3x-2y+5z=-22.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}4x+y+4z=0,\\ 3x-2y-z=0,\\ 7x-y+3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=9\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-8\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=p+4q$, если $|p|=7$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/3$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$. Вычислить: а) площадь грани BCD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **А**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **В**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **В.**

$\vec{F}=(-5,4,4)$, $A(3,7,-5)$, $B(2,-4,1)$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 10

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

Задание 3

Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=21, \\ 3x+4y-2z=9, \\ 2x-y-z=10. \end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ 2x+3y-5z=0, \\ 5x+y-4z=0. \end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p-q$, если $|p|=10$, $|q|=1$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/2$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(2,2,9)$, $A(4,2,-3)$, $B(2,4,0)$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 1.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(3;4), B(2;-1), C(1,-7)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

2) $y = 1 - 3\sqrt{x}$.

3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 4 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-12,7,-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$.

4. Найти угол между плоскостями $x - 3y + 5 = 0,\quad 2x - y + 5z - 16 = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3},\quad 3x - 2y + 5z - 3 = 0.$

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $x = 4,\ \ y = 0,\ \ y = \sqrt{x},\ \ z = 0,\ \ z = 2$.

Б) $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 2.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-4;-5), B(3;3), C(5,-2)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = \frac{5}{4}\sqrt{16 + y^2}$.

2) $y = -1 + \sqrt{7x}$.

3) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(1,-6,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$.

4. Найти угол между плоскостями $x - 3y + z - 1 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$, $x + 4y + 13z - 23 = 0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z = y^2$, $x = -1$, $x = 2$, $z = 4$.

Б) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 6$.

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 3.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-3;5), B(4;-3), C(-2,-4). Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = -\frac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$.

2) $16x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 484 = 0$.

3) $x = 2 - \sqrt{5y - 5}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-7,0,-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3,-1,1)$, $M_2(-9,1,-2)$, $M_3(3,-5,4)$.

4. Найти угол между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0,\ 2x - 4y - z + 9 = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$, $5x + 9y + 4z - 25 = 0.$

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $y = x^2 - 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 2$.

Б) $x^2 + y^2 = 9,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 5$.

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 4.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(3;-2), B(-5;-4), C(-1,6). Требуется:*
- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
- $x=1+\frac{6}{5}\sqrt{25-y^2}$.
- $25x^2-64y^2+100x+12y-1564=0$.
- $y=1-4\sqrt{x+1}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-2,4,21)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(2,1,-1)$.

4. Найти угол между плоскостями $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$, $4x+y-6z-5=0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $x=y^2-4$, $x=0$, $z=0$, $z=1$.

Б) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=5$.

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 5.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(2;5), B(-3;4), C(*-4,-2*). Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $y = 1 + \frac{5}{7}\sqrt{49 - x^2}$.

2) $y = -3 + \sqrt{3x - 3}$.

3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 36}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(2,-1,4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(1,-1,2)$, $M_3(0,1,-1)$.

4. Найти угол между плоскостями $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z = y^2$, $x = -1$, $x = 2$, $z = 4$.

Б) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 6.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-3;2), B(-2;-5), C(6,-1)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $y = -\frac{1}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

2) $x = 2 + \sqrt{y - 4}$.

3) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 36y - 56 = 0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-5,-9,1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,0,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(2,-2,1)$.

4. Найти угол между плоскостями $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $2x + y\sqrt{2} - z + 36 = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x + 7y + 3z + 11 = 0.$

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z = 2x^2$, $z = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

Б) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $y + z = 4$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 7.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-6;-4), B(3;-7), C(1,2)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

- $4x^2 - 9y^2 + 24x + 18y - 9 = 0$.
- $y = 1 - 2\sqrt{x+4}$.
- $y = -\sqrt{16 + x^2}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(3,-2,-9)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,-3)$, $M_2(1,0,1)$, $M_3(-2,-1,6)$.

4. Найти угол между плоскостями $3y - z = 0, \quad 2y - z = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, \quad x - 2y - 3z + 18 = 0.$

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z = 5 - y^2$, $x = 0$, $x = 2$, $z = 1$.

Б) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 6$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 8.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(2;1), B(-7;3), C(-4,-3). Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = 1 - 2\sqrt{5 - y^2 + 4y}$

2) $9x^2 - 25y^2 - 72x - 90 = 0$.

3) $x = 2 + \sqrt{y}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-6{,}7{,}-10)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3{,}10{,}-1)$, $M_2(-2{,}3{,}-5)$, $M_3(-6{,}7{,}-10)$.

4. Найти угол между плоскостями $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+4}{-1}$, $2x - 5y + 4z + 24 = 0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z = 10 - x^2$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 1$.

Б) $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 9.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-3;-4), B(-6;7), C(-1,1)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

- $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 23 = 0$.
- $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 36}$.
- $y = 2 - \sqrt{x+1}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3,5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,0,-1)$.

4. Найти угол между плоскостями $x + 2y + 2z - 3 = 0, 16x + 12y - 15z - 1 = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$, $3x + 4y + 7z - 16 = 0.$

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $x + y + z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Б) $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 10.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(4;-5), B(2;2), C(7,4)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC.*
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

- $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} + 1.$
- $x = 4 - \sqrt{y + 1}.$
- $9x^2 - 49y^2 + 36x - 409 = 0.$

3. Найти расстояние от точки $M_0(-3,4,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,1,2)$, $M_3(2,-1,5)$.

4. Найти угол между плоскостями $2x - y + 5z + 16 = 0$, $x + 2y + 3z + 8 = 0.$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad 2x + 3y + 7z - 52 = 0.$

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $x - y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Б) $x^2 + y^2 = 4$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$, $z = 6$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №3

Вариант 1

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3(2x)}{x^2\cdot arctg(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{tg(x-5)}{\sqrt{x+4}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+8}{5n^2+3n-9}$

II Исследовать функцию на непрерывность $y=e^{\frac{1}{x+3}}$

Вариант 2

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n-4}-n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+5}\right)^{5n}$

3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x+6}{2^x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+3x^2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(4x)}{x\cdot tg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{e^{x-4}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{6x}-1}{\ln(1+8x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+8}{5n^2+3n^3+19}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Вариант 3

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n+1}-2n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-2}\right)^{n+5}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\left[\ln(x+3)-x^2+5\right]$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-12x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2-4x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot tg(5x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sin(x-4)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{e^{5x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n^4+8}{5n^2-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=2-\dfrac{1}{x}$

Вариант 4

I.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+3n^3-2n}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+5}\right)^{2n-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{2x^2-9}-2x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{2x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{2x-4}-1}{x^2-4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1-2x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5-2n^4+1}{n^2-3n^5-8}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$

Вариант 5

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-5n+5}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+3}\right)^{5-n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+2}{3x^2+5x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{5-\sqrt{x+23}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{arctg(2x-6)}{4-\sqrt{x+13}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{7^{3x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^3+2n^2+8n}{5n^2-3n^3-9}$

II. . Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{3}{1+2^{1/x}}$

Вариант 6

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-2n+4}-3n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n+4}\right)^{5n-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x+1}{5x-7}\right)^{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+2x-3}{4x^2-x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin^2(4x)}{arctg^4(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{e^{3x-3}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^{4x}-1}{\ln(1+9x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^3+8}{3n^2+3n^4-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{2}{x^2-4}$

Вариант 7

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4+2n-1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+7}\right)^{3n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3^{x-3}-1}{2^{x-2}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^2-5x+6}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{1-\sqrt{4x-11}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(4x)}{x\cdot tg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{\sin(3x-9)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{e^{-6x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+2n+8}{6n^3+3n^5-9n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=9^{\frac{1}{x+3}}$

Вариант 8

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n+10}-n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+5}\right)^{6-2n}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{x^2+16}-x+1\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15-5x}{3-\sqrt{4x-3}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(6x)}{arctg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7^{3x+3}-1}{6x^2+7x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+6n+2}{5n^2-3n^3-9n+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

Вариант 9

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2-2n+7}-4n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-4}{6n+5}\right)^{-2n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\ln(2x+9)}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-5x-12}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2(5x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-8x-4}{arctg(8-4x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^{4x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n^2+6n^3+2}{3n^2+n^3-9n+1}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$

Вариант 10

I Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4-3n^2+11}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+2}{7n-4}\right)^{3n+2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+3}{x+4}\right)^{x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-5x-2}{-x^2+3x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+24}-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{2x+7}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{7x}-1}{\ln(1+10x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^6+2n^2+2}{n^6-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность

$$y=\frac{2}{1+4^{\frac{1}{x-1}}}$$

Вариант 11

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2-2n+5}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n-3}{8n+1}\right)^{5-4n}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-1}{2x^2-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-5x-25}{x^2-25}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4-\sqrt{6x-2}}{9-3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot\arcsin^2(3x)}{tg^5(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sin(4x-4)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-9x}-1}{\ln(1-6x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+9n+2}{3n^3+9n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0,\\ x, & x>0\end{cases}$

Вариант 12

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+4}-n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+2}{9n-5}\right)^{3n+4}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2-x-6}{3x^3+4x^2+x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^3+3x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(5x)}{arctg^3(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{4x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6n}{9n^2+3n^3-9n+4}$

II. . Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ 3, & 0<x\le 1,\\ x+2, & x>1\end{cases}$

Вариант 13

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+4n+4}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n+51}{10n-64}\right)^{20n+4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-6x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2+12x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3x+10}-1}{2x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x\cdot arctg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(3x-6)}{2-\sqrt{x+2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2^{-10x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6}{4n^3+4n+5}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=8^{\frac{1}{5-x}}$

Вариант 14

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2-6}-n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{11n-2}{11n+3}\right)^{4-5n}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left[\ln\left(x^2+3\right)-\ln\left(3x^2+1\right)\right]$

4. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-36}{2x^2-11x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+6}{7-\sqrt{19-10x}}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^4(2x)}{tg^4(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-7x-15}{e^{x^2-25}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{-8x}-1}{\ln(1-16x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-2n^4+6n^2}{9n^6-3n^5-n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность

$$y=\begin{cases}x^2, & x\le0,\\ x, & 0<x\le1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Вариант 15

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-3n+2}-n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+5}\right)^{5n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{3x^2-3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-4x^2+3x+27}{2x^2-5x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot arctg^2(7x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3-\sqrt{4x+21}}{tg(5x+15)}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{20x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+2n^3+n}{7n^5+3n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{x^2}{x-2}$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №4

Вариант 1

1. Вычислить пределы по о правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin(3x)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln\left(x^2-15\right)}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+3\sqrt{x}$ 2. $y=\dfrac{2\arcsin x+3^x}{4\ln x-2x^2}$
3. $y=\ln\sin(2x+5)$ 4. $y=x^{\ln x}$
5. $y=\left(e^x-3\cos x\right)\left(5-4\log_2 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(1+2t), \\ y=t^2-2t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}.$$

5. Найти производную от неявной функции $\ln(x+y)-arctgx=0$.

Вариант 2

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{tg(2x)}{\sin x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{x-1}-1}{\ln(2x-1)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{4\arccos x-e^x}{3\log_2 x+5x^3}$
3. $y=\dfrac{1}{2}\sin^4(\cos x)$ 4. $y=x^{\arcsin x}$
5. $y=\left(2^x+4\sin x\right)\left(3\ln x-2\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arctg2t, \\ y=t^2+2t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

5. Найти производную от неявной функции $\cos(xy)=\dfrac{y}{x}$.

Вариант 3

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}-1}{\ln(2x+9)-\ln 3}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{4}{x^2}$ 2. $y=\dfrac{2\ln x-8x^4}{4^x-2arcctgx}$
3. $y=\arccos(ctg4x)$ 4. $y=x^{\sqrt{x+1}}$

5. $y=\left(5tgx-e^{x}\right)\left(4\log_7 x+3\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(1-4t\right), \\ y=2t^2+4t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arctg(x+y)=x$.

Вариант 4

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg\left(\pi x\right)}{\sin\left(3\pi x\right)}$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{4^{x+2}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^3$
2. $y=\dfrac{e^x+6\arcsin x}{5x^2-2\log_4 x}$
3. $y=arctge^{2x}$
4. $y=(tgx)^{x^3}$
5. $y=\left(8ctgx+3^{x}\right)\left(2\ln x-5\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arctg3t, \\ y=3t^2-12t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$.

5. . Найти производную y' от неявной функции

$$y\sin x+\cos(x-y)=0.$$

Вариант 5

1 Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{x^2-4\pi^2}{tg\left(x\right)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-4x\right)}{e^{3x-6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}$
2. $y=\dfrac{7^x-3\arccos x}{4x^3+3\ln x}$
3. $y=\ln\left(\arcsin 3x\right)$
4. $y=\left(\sin x\right)^{\cos x}$
5. $y=\left(e^x-4tgx\right)\left(3+7\log_3 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(1+6t\right), \\ y=3t^2-12t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{12x}{9+x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции

$$y\sin x + \cos y = 0.$$

Вариант 6

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin(3x+\pi/4)}{\pi/4 - x}$. 2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5^{2x-3}-5^5}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^3}$ 2. $y = \dfrac{7x^2 + 4\log_3 x}{2e^x - 5arcctgx}$
3. $y = e^{tg(3x-2)}$ 4. $y = (\arcsin x)^{x^2+1}$
5. $y = \left(5^x + 2\cos x\right)\left(10 - 3\ln x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = arctg\,4t, \\ y = t^4 + 4t^3. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$arcctg(x+y) - x - 2y = 0.$$

Вариант 7

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{\sin(2\pi x)}$. 2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3^{5x+10}-1}{\ln(4x+9)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^5 - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}$ 2. $y = \dfrac{3arctgx - 5^x}{4\ln x - 5x^6}$
3. $y = \ln\left(e^{2x} + 3\right)$ 4. $y = \left(\sin x\right)^{\sqrt{x}}$
5. $y = \left(e^x + 6ctgx\right)\left(9 + 7\log_6 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = \ln(1-5t), \\ y = t^5 - 10t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\frac{4-x^3}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции

$$e^{x+y}=\sin xy.$$

Вариант 8

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)tg\frac{\pi x}{4}$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3^{x-4}-1}{\ln\left(33-2x^2\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt[3]{x^7}-4x^6+\frac{4}{x^5}$ 2. $y=\frac{2\arccos x+e^x}{3\log_2 x-7x^3}$

3. $y=3^{-\arcsin(6x)}$ 4. $y=\left(x^3-1\right)^x$

5. $y=\left(7^x-4\sin x\right)\left(4+3\ln x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arctg5t, \\ y=5t^2-20t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$arcctg\left(2x-3y\right)=5^y.$$

Вариант 9

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg\left(2\pi x\right)}{2x^2-6x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(4x-6\right)-\ln 2}{2^{3x-6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x^3}$ 2. $y=\frac{5\ln x+3x^4}{6\arcsin x-2^x}$

3. $y=\left(1+\sin 2x\right)^{10}$ 4. $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}$

5. $y=\left(4\log_5 x-e^x\right)\left(6-5tgx\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(2+3t\right), \\ y=t^6-3t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции

$$\cos(x-y)-2x+4y=0.$$

Вариант 10

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x/2)}{\pi-x}$. 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2x^2-1)}{3^{x-1}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^6-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{7}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{4\log_5 x-6x^3}$

3. $y=2^{\arcsin 5x}$ 4. $y=(\ln x)^x$

5. $y=(10\ln x+6^x)(2\sin x-\sqrt{3})$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arctg\,6t, \\ y=3t^4+2t^3. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$e^{xy}=\ln x+arcctg y.$$

Вариант 11

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to3\pi}\dfrac{x^2-9\pi^2}{\sin(x/3)}$. 2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{e^{x-3}-e^2}{4^{10-2x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2\sqrt{x^3}+3x^2-\dfrac{2}{x^5}$ 2. $y=\dfrac{6^x-3arctg x}{5x^2-9\ln x}$

3. $y=(1+\cos 3x)^6$ 4. $y=(\arccos x)^{x^2}$

5. $y=(e^x-7\log_3 x)(\sqrt{2}-3tgx)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(5-4t), \\ y=t^8+2t^4. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$\cos y=\sin x+2y.$$

Вариант 12

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi/8}\dfrac{\pi/4-2x}{\sin\left(2x+3\pi/4\right)}$. 2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\ln\left(3x-14\right)}{4^{2x-10}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^3-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{6}{x^2}$ 2. $y=\dfrac{8x^4-7\log_8 x}{e^x+2\arcsin x}$

3. $y=\ln tg\left(4x-1\right)$ 4. $y=(\sin x)^{x^3}$

5. $y=\left(4^x+6\ln x\right)\left(8+3\cos x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arctg7t,\\ y=7t^4-21t. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$xy+\ln y-2\ln x=0.$$

Вариант 13

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}$. 2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{7^{2x-3}-7^3}{e^{6-2x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ 2. $y=\dfrac{9^x-3\arccos x}{5x^3+8\ln x}$

3. $y=\sin\left(e^{4x+3}\right)$ 4. $y=\left(x^2+2\right)^{3x}$

5. $y=\left(e^x-5\log_8 x\right)\left(6ctgx-1\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(8-7t\right),\\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{-8x}{x^2+4}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$tgy = xy^2 + e^x.$$

Вариант 14

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{1+\cos(x/2)}{(x-2\pi)^2}$.   2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(13-3x^2)}{3^{x-2}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}+5x^4$ 2. $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{2\log_4 x-6x^2}$

3. $y=\arcsin(\ln(2x))$ 4. $y=x^{arctgx}$

5. $y=(2^x+3\ln x)(4\cos x+11)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = arcctg7t, \\ y = t^7 - 7t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{3x^4+1}{x^3}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$x\ln y = 3x^3 + y^2.$$

Вариант 15

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\pi x}{\sin(x-2)}$.   2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{e^{3x+12}-1}{\ln(3x+13)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{4}{x^5}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$ 2. $y=\dfrac{4\ln x-3x^6}{7arcctgx+8^x}$

3. $y=\ln(1+arctg2x)$ 4. $y=(\cos x)^{tgx}$

5. $y=(e^x-5\log_4 x)(9\sin x-12)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = \ln(4+3t), \\ y = 6t^3 - 15t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{4x}{(x+1)^2}.$$

5. Найти производную y' от неявной функции

$$e^{xy}-(x+3y)=0.$$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №5

Вариант №1

1. $\int x\sqrt{5-x^2}\,dx$.

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

3. $\int x^3 e^{x^4}dx$

4. $\int (3x-2)\cos 2x\,dx$

5. $\int \frac{x^3-8x-14}{(x+2)(x-4)}dx$

6. $\int \frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

7. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$

9. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

Вариант №2

1. $\int \sin^3 x\cos x dx$.

2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$

3. $\int 3x\sqrt{5-x^3}dx$

4. $\int (5-4x)\sin 3x\,dx$

5. $\int \frac{5x^2+11x+2}{x(x+1)^2}dx$

6. $\int \frac{(x+1)^2}{x^5}dx$

7. $\int x\sqrt{15-x^2}\,dx$.

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+4x}}$

9. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

10. $\int \sqrt{256-x^2}dx.$

Вариант №3

1. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

3. $\int \frac{(arcctgx)^4}{1+x^2}dx$

4. $\int (2x+1)e^{5x}dx$

5. $\int \frac{x^3+2x^2-18x+17}{(x-3)(x+5)}dx$

6. $\int \frac{x^2-x^5\sin x+2x}{x^5}dx$

7. $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$.

8. $\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$

9. $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$

10. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

Вариант №4

1. $\int \frac{x^2}{x^3+8}dx$.
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$
3. $\int e^{\cos x}\sin x dx$
4. $\int (4-5x)3^x dx$
5. $\int \frac{x^3+9x^2+11x-20}{x^2(x+5)}dx$
6. $\int (x-1)(x^2+x+1)dx$
7. $\int e^{2\sin x}\cos x dx$.
8. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$
9. $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x+3\sin^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

Вариант №5

1. $\int e^{\sin x}\cos x dx$.
2. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$
3. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$
4. $\int (x^3-4x+1)\ln x dx$
5. $\int \frac{3x^2-5x+8}{(x-1)(x^2+1)}dx$
6. $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^5}dx$
7. $\int \frac{x^2}{x^3+3}dx$.
8. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$
9. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^5 x}$
10. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

Вариант №6

1. $\int \frac{(arctgx)^3}{1+x^2}dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$
3. $\int \frac{(2x-2)}{\sqrt{x^2-2x+1}}dx$
4. $\int 4x\, arctgx\, dx$
5. $\int \frac{-3x^2+4x-4}{(x+4)(x^2+1)}dx$
6. $\int \frac{(2x\ \ +3)^2}{x}dx$
7. $\int \frac{(6x-2)}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$.
8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$
9. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

Вариант №7

1. $\int \frac{(10x-4)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

4. $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\, dx$

5. $\int \frac{5x^2-29}{(x+2)(x-1)(x+3)}dx$

6. $\int \frac{e^x x^5-4x^5\sin x+2x^4}{x^5}dx$

7. $\int e^{-x^4}\cdot 4x^3dx$.

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$

9. $\int \frac{dx}{5+5\cos x+\sin x}$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

Вариант №8

1. $\int e^{-x^4}\cdot x^3dx$.

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

3. … $\int \cos^3 x\sin x dx$ ………

…..4. $\int 6x\arcsin x\, dx$

5. $\int \frac{x^3+x^2+3x+7}{(x-1)(x+2)}dx$

6. $\int \frac{12x^3-x^2\sin x+2x}{x^2}dx$

7. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$.

8. $\int x\sqrt{3+x}dx$

9. $\int \frac{dx}{2+4\cos x+3\sin x}$

10. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Вариант №9

1. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

2. $\int x\sqrt{1+x}dx$

3. $\int \frac{x}{\left(3+x^3\right)^2}dx$

4. $\int (3-5x)\cos 3x\, dx$

5. $\int \frac{2x^2-5x+2}{(x-3)(x+2)}dx$

6. $\int \frac{(4x+3)^2}{x^3}dx$

7. $\int \frac{x}{\left(3+x^2\right)^5}dx$.

8. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

9. $\int \frac{dx}{1+3\cos x+2\sin x}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Вариант №10

1. $\int \frac{x}{\left(2+x^2\right)^2}dx$.

2. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

3. $\int 3^{-x^4}\cdot x^3dx$

4. $\int\left(6x+2\right)\sin 6x\,dx$

5. $\int \frac{-x^2+6x-3}{\left(x+3\right)\left(x^2+1\right)}dx$

6. $\int\left(\frac{x+3}{x^3}\right)^2 dx$

7. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+3}dx$

9. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$

10. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Вариант №11

1. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$

2. $\int 5^{-x^3}\cdot x^2dx$

4. $\int\left(3-2x\right)e^{2x}dx$

5. $\int \frac{4x^2-9x-4}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}dx$

6. $\int \frac{4x^3-5x^2e^x+2x^4}{x^2}dx$

7. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx$.

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$

9. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x+2\sin^2 x}$

10. $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Вариант №12

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$

3. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$

4. $\int\left(x^5-4x^3+3\right)\ln x\,dx$

5. $\int \frac{3x^3+12x-4}{x\left(x^2+4\right)}dx$

6. $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$

7. $\int\left(e^x+5\right)^5 e^xdx$.

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$

9. $\int \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$

10. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$.

Вариант №13

1. $\int\left(e^x+4\right)^3 e^x dx$.

2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

3. $\int\frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}dx$

4. $\int\left(3x+18\right)2^x dx$

5. $\int\frac{-13x-32}{\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x+4\right)}dx$

6. $\int\frac{(x+1)^3}{x^2}dx$

7. $\int\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$.

8. $\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

9. $\int\frac{dx}{5+5\cos^2 x+\sin^2 x}$

10. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}dx.$

Вариант №14

1. $\int\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$.

2. $\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

3. $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4. $\int\left(7x-3\right)5^x dx$

5. $\int\frac{2x^2+3x-19}{\left(x-3\right)\left(x+5\right)}dx$

6. $\int\frac{x^3+5x^2e^x+x}{x^2}dx$

7. $\int\frac{\left(\arcsin x\right)^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

8. $\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{2x+1}}dx$

9. $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$

10. $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx.$

Вариант №15

1. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2. $\int\frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$

3. $\int\frac{x^2}{x^6+4}dx$

4. $\int 3x\arccos x\,dx$

5. $\int\frac{-6x^2-11x+8}{x\left(x+2\right)\left(x-1\right)}dx$

6. $\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$

7. $\int\cos^8 x\sin x dx$.

8. $\int\frac{1}{6+\sqrt{x}}dx$

9. $\int\frac{dx}{2-\cos x}$

10. $\int\sqrt{16-x^2}dx.$

2 СЕМЕСТР

Типовой расчет № 1
по разделу «Определенный интеграл и его применение»

Вариант №1

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_1^2 x\sqrt{5-x^2}dx$; б) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^{\pi/3} x\cos x dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 4\cos\varphi,\ r = 2 \quad (r \geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

Вариант №2

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos x dx$; б) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$; в) $\int\limits_0^{\ln 5} xe^{-x}dx$; г) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах $r = \cos 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi / 6$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 1 - \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi / 2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$

Вариант №3

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; в) $\int\limits_0^1 \ln(1+2x)dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ y = 1 + \frac{8}{9}x^2$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r^2 = 4\cos 2\varphi,\ r = 2$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = 2 - e^x, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 5e^{5\varphi/12},\ 0 \le \varphi \le \pi / 3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, \quad y^2 - x = 0.$

Вариант №4

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$; в) $\int\limits_0^1 \ln(x+1) dx$; г) $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 4\sin 3\varphi$, $r = 2 \quad (r \ge 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le \frac{7}{9}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2 - x^2$, $y = x$, $x = 0.$

Вариант №5

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^3+8} dx$; б) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/3} x\cos 3x dx$; г) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^3 x \sin^5 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$ $x = 0$, $x = 1$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}, \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 1 + \cos\varphi,\ \ r = \cos\varphi.$

5.Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе

координат $y = 1 - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{9}{16}$.

6.Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ x = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/2 \le t \le \pi.$$

7.Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1 - \cos\varphi),\ \pi/3 \le \varphi \le \pi.$

8.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0.$

Вариант №6

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^1 \dfrac{(arctgx)^3}{1 + x^2}dx$; б) $\int\limits_3^8 \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; в) $\int\limits_0^\pi x\sin x dx$; г) $\int\limits_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ $y = 0$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах $r = \sin 3\varphi.$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = e^x + e, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r=3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^3, \quad y=\sqrt{x}.$

Вариант №7

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^1 \frac{(10x-2)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$; в) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+5\cos x+\sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r=6\sin 3\varphi$, $r=3 \ \ (r\ge 3)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y=\ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t), \\ y=6(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r=2\cos\varphi, \ 0\le\varphi\le\pi/6.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2, \quad y=1, \quad x=2.$

Вариант №8

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^2 e^{-x^4}\cdot x^3dx$; б) $\int\limits_9^{25}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} x\cos x dx$; г) $\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах $r=\cos 3\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y=1-\ln\sin x,\quad \pi/3\le x\le\pi/2$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}\quad 0\le t\le\pi/2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r=5(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi/3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y=e^x,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1$.

Вариант №9

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^1\frac{x}{\left(2+x^2\right)^2}dx$; б) $\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx$; в) $\int\limits_0^2 xe^{-\frac{x}{2}}dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+3\cos x+2\sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2(x-1)$, $x=3$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r=6\cos 3\varphi$, $r=3$, $(r\ge 3)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{15}{16}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 5e^{5\varphi/12}, \ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3 + 2, \quad x = 1, \quad y = 1.$

Вариант №10

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$; б) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; в) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+2)dx$; г) $\displaystyle\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ ($x \ge 0$).

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 2(1+\cos\varphi)$, $r = 2 \ (r \ge 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \le x \le 4$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/6.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 8(1 - \cos\varphi)$, $\pi/3 \le \varphi \le \pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x \ge 0.$

Вариант №11

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$; в) $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$; г) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1+3\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ y=x,\ x=4$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r=\cos\varphi, r=2\cos\varphi.$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\quad 1\le x\le 2$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\le t\le 3\pi/2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r=\sqrt{2}e^{\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi/3.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+9,\quad y=0.$

Вариант №12

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$; б) $\int\limits_{2}^{10} \frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}$; в) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$; г) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3\sqrt{x},\ y=\frac{3}{x},\ x=9$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r^2 = 9\sqrt{2}\cos 2\varphi$, $r = 3$ $(r \geq 3)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = \ln\sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sin^2 x, \quad x = \pi/2, \quad y = 0.$

Вариант №13

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int_0^1 \left(e^x + 4\right)^3 e^x dx$; б) $\int_4^{12} \frac{\sqrt{x-3}+3}{\sqrt{x-3}-3} dx$; в) $\int_0^1 xe^{2x} dx$; г) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 8x$, $x = 8$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \sin\varphi$, $r = 2\sin\varphi.$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = e^x + 6, \quad \ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad \pi/6 \le t \le \pi/4.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 6(1+\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2.$

Вариант №14

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$; б) $\int\limits_{-4/3}^{11/3} \frac{dx}{\sqrt{3x+5} - \sqrt[4]{3x+5}}$; в) $\int\limits_0^1 x \cdot arctgxdx$;

г) $\int\limits_0^{16} \sqrt{256 - x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x+4$, $x = 0$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 2\left(1+\cos\varphi\right)$, $r = 2\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = \ln\cos x + 2, \quad 0 \le x \le \pi/6$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Вариант №15

1.Вычислить определенные интегралы

а) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+4}dx$; б) $\int_{-4/3}^{1/3} \frac{dx}{6+\sqrt{3x+8}}$; в) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$; г) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x,\ y = x + 2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r^2 = 4\sqrt{2}\cos 2\varphi,\ r = 2\ (r \geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций $x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0{,}5$.

Типовой расчет № 2
по разделу «Функции нескольких переменных»

ВАРИАНТ № 1

1. Найти частные производные второго порядка: $z = \frac{x^2}{y-2}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,0	1,5	2,0	3,0	3,2
y_i	8,1	9,0	11,2	13,8	14,7

4. Найти указанные производные $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике $x = 0,\quad y = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0$.

ВАРИАНТ № 2

1. Найти частные производные второго порядка функции $z = xe^{xy}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 - y^3.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,3	0,5	0,8	1,1	2,3
y_i	1,4	0,7	-0,9	-2,3	-8,8

4. Найти указанные производные $z = x^y$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - y$$

в треугольнике $x = 1,\quad y = 1,\ x + y = 1$.

ВАРИАНТ № 3

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = x^2 \sin(x + y^2)$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 6x^2 y + 2y^3 - 24x - 30y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0
y_i	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8

4. Найти указанные производные $z = e^x\left(\cos y + x \sin y\right)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 - 3xy + y^3$$

в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$.

ВАРИАНТ № 4

1. Найти частные производные второго порядка функции:

$$z = \ln\left(x^2 + y\right).$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,2	1,7	3,3	4,1	4,3
y_i	-3,1	-5,6	-17,1	-23,1	-24,8

4. Найти указанные производные $z = y^x$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

ВАРИАНТ № 5

1. Найти частные производные второго порядка функции:

$$z = \frac{x + y^2}{2x - y}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3
y_i	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0

4. Найти указанные производные $z = x^2 + 5xy + 6y^2x + 2$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy - 2x - y$$

в прямоугольнике $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 6

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$z = xye^{x^2}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-3,4	-3,2	-3,1	-2,5	-1,5
y_i	-13,9	-12,9	-12,2	-9,1	-4,2

4. Найти указанные производные $z = \dfrac{x + y^2}{y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 0,5x^2 - xy$ в области $y = 0,5x^2$, $y = 3$.

ВАРИАНТ № 7

1. Найти частные производные второго порядка функции:

$$z = x \cdot tg\sqrt{y}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	2,1	2,5	3,0	3,1	3,3
y_i	11,1	12,8	13,9	14,5	15,1

4. Найти указанные производные $z = x^4 + 5x^2 y - 7xy^2 + 8$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 2x - y + x^2 y$$

в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 8

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = x^y$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,7	0,9	1,2	1,3	1,7
y_i	1,7	1,1	0,8	0,1	-0,5

4. Найти указанные производные $z = \dfrac{xy}{x^2+3y}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

в прямоугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

ВАРИАНТ № 9

1. Найти частные производные второго порядка функции: $z = \dfrac{2x^2 + y}{3y + x}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,1	-0,5	0,2	0,4	0,7
y_i	2,1	3,4	5,1	6,3	6,9

4. Найти указанные производные $z = x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - 15xy + 1$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

ВАРИАНТ № 10

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$z = ye^{x^2}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,2	-0,7	0,3	1,5	1,7
y_i	5,7	5,1	0,1	0,2	-0,7

4. Найти указанные производные $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 - y + 1$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 2$$

в прямоугольнике $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = -1$.

ВАРИАНТ № 11

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = \dfrac{2y^2 - 2x}{3y + x}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^2 y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	2,1	3,0	3,2	3,9	4,1
y_i	3,4	8,1	9,2	12,6	13,3

4. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = e^{x^2} + 4x - 5xy^3$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в треугольнике $x = 1$, $y = 0$, $4x - 3y = 6$.

ВАРИАНТ № 12

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = \dfrac{2x^2 + y}{3y + x}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,7	1,9	2,3	2,5	3,5
y_i	0,1	-0,6	-2,0	-2,7	-5,3

4. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = \ln x - x^2 + y^2 + 4x^3 y^2$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -5$.

ВАРИАНТ № 13

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = x^y$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-0,1	0,2	0,5	0,9	1,2
y_i	-7,1	-6,2	-4,3	-2,7	-0,9

4. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ от функции $z = e^{x^2} + 5\cos y - 4x^2 y^4$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике $x = -1,\ x = 1,\ y = -3,\ y = 4$.

ВАРИАНТ № 14

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = x \cdot tg\sqrt{y}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 + 16y^3 - 12x^2 y - 9x^2$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,2	-1,1	-0,9	-0,5	0,1
y_i	8,7	8,1	7,8	6,4	4,5

4. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ от функции $z = y\cos x + x\sin y$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6xy - x^2 - y^2 + 1$ в области $x^2 = y^2,\ x = 4$.

ВАРИАНТ № 15

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = xye^{x^2}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = -8x^3 + y^3 + 6xy^2 + 9y^2$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	3,2	3,8	4,7	5,1	5,4
y_i	10,5	12,3	14,9	16,4	16,9

4. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = x^6 + y^2 + \log_3 x + 5x^2 y^4 + 1$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в области $y = x^2,\ y = 4$.

Типовой расчет №3 по разделу «Кратные интегралы»

Вариант 1

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{4-y} f(x,y)dx$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 6$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x,\ x = 6 - y^2,\ y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 4y$.

Вариант 2

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 9$, $z = 1$, $z = 2$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x + y = 2$, $x = y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = y$.

Вариант 3

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = y^2$, $x = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y - 2x = 2$, $x + y = 2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = y$.

Вариант 4

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $2x + y = 4$, $x - 2y = 2$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 4x$.

Вариант 5

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = y^2 - 4$, $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = x^2$.

Вариант 6

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = y^2$, $x = -1$, $x = 2$, $z = 4$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = 3 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 2x^2$.

Вариант 7

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2$, $z = 2$, $y = 1$, $y = 2$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = 5 - x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 4x^2$.

Вариант 8

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^3}^{10-x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 5 - y^2$, $x = 0$, $x = 2$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x = y^2 - 4$, $x = -\frac{1}{2}y^2 + 2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = y^2$.

Вариант 9

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f(x,y)dx$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 10 - x^2$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 1$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x + 3$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = x$.

Вариант 10

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x = y^2 - 2$, $y = -1$, $y = 1$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = y^2$.

Вариант 11

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x - y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = xy$.

Вариант 12

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{2} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y-x+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x=y^2$, $x+y=6$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=3y^2$.

Вариант 13

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x-y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x=3-y^2$, $y=1$, $y=-1$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=2y^2$.

Вариант 14

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-2}^{-\sqrt{y}} f(x,y)dx$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y=4$, $x=0$, $y=x$, $z=0$, $z=1$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=5x$.

Вариант 15

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y=4$, $y=0$, $y=2x$, $z=0$, $z=2$.
3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=x+2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=x^2$.

Типовой расчет №4 по разделу «Криволинейные интегралы»
Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_{L} \frac{8y}{x} dl$, где L: парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(4;8)$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(2x^2+y\right)dx+\left(5y-3x\right)dy$, где L - парабола $y=x^2$, от точки $\left(0,0\right)$ до точки $\left(3,9\right)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(3x^5-2xy+1\right)dx+\left(5xy-4y^2+5y\right)dy$. Контур $L:\ y=4-x^2,\ y=0$.

Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L xy^2dl$, где *L:* $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, $0\le t\le \dfrac{\pi}{4}$.

2. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(2x-2y-4\right)dx+\left(-2x+10y\right)dy$, и вычислить его от точки $\left(0,1\right)$ до точки $\left(3,0\right)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(xy+2\right)dx+\left(3x+2y^2\right)dy$. Контур $L:\ y=0,\ x=4,\ x=y^2$.

Вариант 3

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2}dl$, где *L:* $r=a\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(4x^2-2y\right)dx+\left(5x+3xy\right)dy$. Контур $L:\ y=0,\ x=4,\ y=x$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^3-y+1\right)dx+\left(2xy-3\right)dy$, где $L:\ x=y^2$, от точки $\left(4,-2\right)$ до точки $\left(4,2\right)$.

Вариант 4

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \cos x\sin x dl$, где *L:* $y=\ln\sin x,\ \dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{\pi}{3}$.

2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3-3y+1\right)dx+\left(x^2-3y+5\right)dy$. Контур $L:\ y=x^2,\ y=9$.

3. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+6y^2\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,0)$ до точки $(3,9)$.

Вариант 5

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}dl$, где $L:\ y=tgx$, $0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2+5y\right)dx+\left(2x+4y+5\right)dy$, где $L:\ y=x^3$, от точки $(1,1)$ до точки $(2,8)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(2x^3+5xy+y^2\right)dx+\left(x^2+y^2-2y^3\right)dy$. Контур $L:\ y=x^2-9,\ y=0$.

Вариант 6

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, где L: $y=\cos x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x^2+10xy\right)dx+\left(5x^2-8y\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,0)$ до точки $(4,8)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(4x+y\right)dx+\left(x^2-2y^3\right)dy$. Контур $L:\ y=x^2,\ y=2-x$.

Вариант 7

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, где L: $y=\sin x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(5xy+3\right)dx+\left(2x^2-4y\right)dy$. Контур $L:\ x=0,\ y=3,\ y=x$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2 - y + 4\right)dx + \left(2xy - 3\right)dy$, где $L: \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^2 + 4, \end{cases}$, $0 \le t \le 1.$

Вариант 8

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{8y}dl$, где L: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt{8}$.
2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(5x^2 + 2y^2 - 4\right)dx + \left(3x^2 - 2y^3 + 1\right)dy$. Контур $L:\ y = x^2,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2$.
3. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x - 2xy + 5\right)dx + \left(y^2 - x^2\right)dy$, и вычислить его от точки $\left(-1,1\right)$ до точки $\left(0,0\right)$.

Вариант 9

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{y}dl$, где L: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.
2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2 + 2xy\right)dx - \left(3x^2 - y + 1\right)dy$, где $L:\ y = 2 - x^2$, от точки $\left(-1,1\right)$ до точки $\left(1,1\right)$.
3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3 - 2xy\right)dx + \left(x - 2y + 6\right)dy$. Контур $L:\ y = 0,\ x = 3,\ y = x^2$.

Вариант 10

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, где L: $r = 2\cos\varphi,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.
2. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(2x - y^2 - 2\right)dx + \left(-2xy + 3y^2\right)dy$, и вычислить его от точки $\left(0,5\right)$ до точки $\left(6,0\right)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3-3y+1\right)dx+\left(x^2-3y+5\right)dy$. Контур $L:\ y=x^2,\ y=9$.

1.

Вариант 11

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(2xy+y^2\right)dx+\left(3x^2+2y+1\right)dy$. Контур $L:\ x=0,\ y=4,\ y=x^2$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^3-y+1\right)dx+\left(2xy-3\right)dy$, где $L:\ x=y^2$, от точки $(4,-2)$ до точки $(4,2)$.

Вариант 12

1. Вычислить криволинейный интеграл длине дуги L $\int\limits_L \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(-2x^2+xy+10\right)dx+\left(2x+3y^2-5\right)dy$. Контур $L:\ y=x^2,\ y=8-x^2$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(2x^2+y\right)dx+\left(5y-3x\right)dy$, где L - парабола $y=x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(3,9)$.

Вариант 13

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L x\,dl$, где L: дуга окружности $r=R$, в I четверти.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(5x+2y^2\right)dx+3xydy$, где $L:\ y=-x^3$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,-8)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(3x^5-2xy+1\right)dx+\left(5xy-4y^2+5y\right)dy$. Контур $L:\ y=4-x^2,\ y=0$.

Вариант 14

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, где L:

$$\begin{cases} x = a\left(\cos t + t\sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

2. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(2x+2y\right)dx + \left(2x+6y-5\right)dy$, и вычислить его от точки $(1,1)$ до точки $(5,4)$.

3. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(4x^2-2y\right)dx + \left(5x+3xy\right)dy$.

Контур L: $y=0$, $x=4$, $y=x$.

Вариант 15

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}dl$, где L:

$y=\sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

2. Вычислить непосредственно и по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3-2xy\right)dx + \left(x-2y+6\right)dy$.

Контур L: $y=0$, $x=3$, $y=x^2$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2+2y+1\right)dx + \left(3xy-4\right)dy$, где L: $x=y^3$, от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

3 СЕМЕСТР

Типовой расчет № 1 по разделу «Ряды»

1. Исследовать сходимость ряда (табл.)

Вариант		**Вариан т**	
1	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}$	**2**	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n+3}{3n+2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)^{2n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n^2}}$

3	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n(n+2)}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{1+3^{2n}}$	**4**	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^3-1}{2n^2+2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+3}\right)^{3n}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(5n+2)^4}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\dfrac{n}{2^n}$.
5	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{3n+2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+5}{2n^3-1}$.	**6**	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^3+n^2-1}{3n^2+4n-5}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^5+3}$ в $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ntg\,\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, г $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ д $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n+3}{5n^2+2}\right)$.
7	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^{2n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)^4}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2}{2n^4-1}$.	**8**	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{e^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pi+1)^n}{n^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3}{3n^4-1}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{n^4+2}$.
9	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^{n/2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{n!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^4+2n-1}{5n^2+2}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\dfrac{1}{n^3}$.	**10**	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{n\cdot 3^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{3^n}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n!}$.

2. *Найти область сходимости ряда:*

Вариант	
1	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2 x^n$.
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^3}x^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n(n+1)}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!x^{n-1}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$

Задание 3. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$
2. $\int_0^{0,1} \sin\left(100x^2\right)dx$
3. $\int_0^{1} \cos\left(x^2\right)dx$
4. $\int_0^{1} \frac{\ln\left(1+x/5\right)}{x}dx$
5. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$
6. $\int_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx$
7. $\int_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx$

8. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx$

9. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$

10. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

Задание 4. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$.

Вари ант				
1.	***а)***	$f(x)=x-1,\quad -1\le x\le 1$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-2, -\pi\le x\le 0,\\ 3, 0<x\le\pi.\end{cases}$
2.	***а)***	$f(x)=\lvert x\rvert,\quad -\pi\le x\le\pi$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-x, -2\le x\le 0,\\ 0, 0<x\le 2.\end{cases}$
3.	***а)***	$f(x)=\begin{cases}1, -\pi\le x\le 0,\\ 2, 0<x\le\pi.\end{cases}$	***б)***	$f(x)=x+2,\quad -2\le x\le 2$
4.	***а)***	$f(x)=2+\lvert x\rvert,\quad -1\le x\le 1$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-4, -\pi\le x\le 0,\\ 4, 0<x\le\pi.\end{cases}$
5.	***а)***	$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad -\pi\le x\le\pi$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-5, -3\le x\le 0,\\ 5, 0<x\le 3.\end{cases}$
6.	***а)***	$f(x)=x+1,\quad -2\le x\le 2$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-2, -\pi\le x\le 0,\\ 1, 0<x\le\pi.\end{cases}$
7.	***а)***	$f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ x, 0\le x\le\pi.\end{cases}$	***б)***	$f(x)=4-\lvert x\rvert,\quad -4<x<4$
8.	***а)***	$f(x)=x+2,\quad -2\le x\le 2$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}2, -\pi\le x\le 0,\\ 1, 0<x\le\pi.\end{cases}$
9.	***а)***	$f(x)=x+1,\quad -\pi\le x\le\pi$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-2, -2\le x\le 0,\\ 3, 0<x\le 2.\end{cases}$

10.	***а)***	$f(x)=x-2, \quad -\pi\le x\le\pi$	***б)***	$f(x)=\begin{cases}-2, -4\le x\le 0,\\ 1, 0<x\le 4.\end{cases}$

Задание 5. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (вариант 1-5) или по синусам (вариант 6-10).

Вариант	
1.	$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-x, \quad 0\le x\le\pi$
2.	$f(x)=2-x, \quad 0\le x\le 2$
3.	$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{6}, \quad 0\le x\le\pi$
4.	$f(x)=x-1, \quad 0\le x\le 2$
5.	$f(x)=2-\dfrac{x}{2}, \quad 0\le x\le\pi$
6.	$f(x)=1-\dfrac{x}{2}, \quad 0\le x\le 2$
7.	$f(x)=\begin{cases}2, \ 0\le x<2,\\ 1, \ 2\le x\le\pi.\end{cases}$
8.	$f(x)=\begin{cases}x, \ 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1, \ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$
9.	$f(x)=\pi-2x, \quad x\in[0;\pi]$
10.	$f(x)=\begin{cases}1, \ 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$

Типовой расчет № 2

по разделу «Элементы теории поля»

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u=5x^2+4x^3y+5xz-e^{z^2}$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=x^2y+5z\sin y+6z^2$ в точке $M_0(-1;0;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M)=z\bar{i}+(x+y-2z)\bar{j}+(y+2z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x+2y+z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+2z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+y+z=1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(x^2y-z)\bar{i}-xyz\,\bar{j}+(xy^3+z^2)\bar{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(2x-4yz)\bar{i}+(2y-4xz)\bar{j}+(2z-4xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №2

1. Найти производную скалярного поля $u=4x^3y+5xz-e^{x+z^2}$ в точке $M_0(-1;2;1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;-2;0)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u=xyz+5z\ln y+6z^2$ в точке $M_0(1;3;-2)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M)=(x+z)\bar{i}-2z\bar{j}+(2y+x+z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $2x+2y+z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(2x-y+z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+y+3z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=x^2yz\bar{i}+xy^3z\,\bar{j}+(xy^3+2z)\bar{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(2x+3yz)\bar{i}+(2y+3xz)\bar{j}+(2z+3xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №3

1. Найти производную скалярного поля $u=4x^3\cos y+5xz^3-x+z^2$ в точке $M_0(-1;-2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u=xyz+z\ln x+6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M)=(y+z)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+(x+3z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+2y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=x^2y\bar{i}+(xy^3-z)\,\bar{j}+(xy^3+xz^2)\bar{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(2x+5yz)\bar{i}+(2y+5xz)\bar{j}+(2z+5xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №4

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2 \sin x + 2xz^3 - yz^2$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = z\cos xy$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x+z)\overline{i} + (z+2y)\overline{j} + (2x-3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x+2y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 4x\overline{i} + (y-z)\overline{j} + (3y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x+y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = x^2\overline{i} + 3xy^3\overline{j} + (xy^3z + 2xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (3x-5yz)\overline{i} + (3y-5xz)\overline{j} + (3z-5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №5

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3y + 5xz^3 - x + xz^2$ в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2yz + x\ln(x+y) + 6y^2z$ в точке $M_0(-1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (2x+y+z)\overline{i} + (x-2y)\overline{j} + (x+y-3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x+5y+2z=5$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 2x\overline{i} + 2z\overline{j} + (x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x+2y+z=2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x^2+6y)\overline{i} + (2xy^3 - z^2)\overline{j} + (2x^4y^3 + z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (6x+2yz)\overline{i} + (6y+2xz)\overline{j} + (6z+2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №6

1. Найти производную скалярного поля $u = xe^y + 2xe^z - yz^2$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xy/z$ в точке $M_0(3;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x-y-z)\overline{i} + (z+3y)\overline{j} + (2x+5z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x+4y+3z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)=(x+2y)\bar{i}-z\bar{j}+(x+z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $3x+y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(3x+4y^2z)\bar{i}+(x-yz^3)\bar{j}+(xy^3-xz^2)\bar{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(7x-yz)\bar{i}+(7y-xz)\bar{j}+(7z-xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №7

1. Найти производную скалярного поля $u=\ln(3+xy)+5xz^3$ в точке $M_0(1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;5;3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u=\sqrt{xyz-6y^2}$ в точке $M_0(2;1;4)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M)=(5x+y+z)\bar{i}+(z-2y)\bar{j}+(y+3z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x+2y+2z=5$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)=(x-z)\bar{i}+y\bar{j}+(x-z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+3y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=(x^2+y)\bar{i}+2xy^3\bar{j}+(x+y^3+xz^2)\bar{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(2x+5yz)\bar{i}+(2y+5xz)\bar{j}+(2z+5xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №8

1. Найти производную скалярного поля $u=y^2\sin(xz)$ в точке $M_0(1;-2;-3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u=(x+z)\cos y$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}(M)=(4x+z)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+(2x+4z)\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $4x+2y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)=x\bar{i}+(x-z)\bar{j}+y\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M)=x^2y^2\bar{i}+(3z-xy^3)\bar{j}+(2x+y^3z^2)\bar{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M)=(9x-5yz)\bar{i}+(9y-5xz)\bar{j}+(9z-5xy)\bar{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №9

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3 \ln y + 5xz^3 - x$ в точке $M_0(-1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (6x + y + z)\overline{i} + (x + y)\overline{j} + (x + 3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $6x + 2y + 2z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = y\overline{i} + (x - 2z)\overline{j} + (y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x + 3y + 3z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (xz^2 - 3y)\overline{i} + (xz^3 - xz)\overline{j} + (y^3 - z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (5x - 9yz)\overline{i} + (5y - 9xz)\overline{j} + (5z - 9xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №10

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2 e^{xy} + xz^3$ в точке $M_0(0;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;0;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = z\ln(x + zy^2)$ в точке $M_0(2;1;3)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x + z)\overline{i} + (z + 5y)\overline{j} + (2x + 7z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x + 2y + 4z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x + z)\overline{j} + (x - y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $4x + 4y + z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = z^2\overline{i} + 3yz^3\overline{j} + (y^3 z - 2xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (3x - 2yz)\overline{i} + (3y - 2xz)\overline{j} + (3z - 2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №11

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3 z \arccos y$ в точке $M_0(-1;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;4;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = e^{xyz} + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (y + z)\overline{i} + (x + 5y)\overline{j} + (y + x - 3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x + 2y + 2z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = zx\overline{i} + (y-x)\overline{j} + (2z-y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x+4y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x^2-y^2)\overline{i} + (y^3+xz)\overline{j} + (y^3+x^2)\overline{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (4x-8yz)\overline{i} + (4y-8xz)\overline{j} + (4z-8xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №12

1. Найти производную скалярного поля $u = zarctgx + yz^2$ в точке $M_0(0;2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u = ze^{x^2+xy}$ в точке $M_0(2;1;-7)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (3x+y)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (2x-3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x+2y+3z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + z\overline{j} + (3y-x)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $3x+y+3z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = 2x^2z\overline{i} + (y^3-3xy)\overline{j} + (x^3z-xz^2)\overline{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (7x-5yz)\overline{i} + (7y-5xz)\overline{j} + (7z-5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №13

1. Найти производную скалярного поля $u = \dfrac{4x^3\cos y}{z^2}$ в точке $M_0(-1;0;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.
2. Найти градиент скалярного поля $u = \cos(xy+z^2) + z\ln x$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.
3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (y+z)\overline{i} + x\overline{j} + (x+3z)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $x+2y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = (x+y+z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (y-z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $3x+2y+z=6$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (z^2-y)\overline{i} + xy^3\overline{j} + xyz^2\overline{k}$.
6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x-7yz)\overline{i} + (2y-7xz)\overline{j} + (2z-7xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №14

1. Найти производную скалярного поля $u = y\ln(2xz^3 + yz^2)$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = y\cos xz + xy^2$ в точке $M_0(2;1;0)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x+z)\overline{i} + z\overline{j} + (2x-y)\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+2y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 4x\overline{i} + (x-y-z)\overline{j} + (3y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $2x+4y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = xy^2\overline{i} + (xz - y^3)\overline{j} + (y^3z + yz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (-3x - yz)\overline{i} + (-3y - xz)\overline{j} + (-3z - xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант №15

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3\ln y + 5xz^3 - x + z^2$ в точке $M_0(-1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6z^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x+y)\overline{j} + y\overline{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $2x+y+2z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y-2z)\overline{j} + (2x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+2y+4z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (6z^2 - 4y)\overline{i} + (2xy^3 - xz)\overline{j} + x^3yz^2\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (4x + 5yz)\overline{i} + (4y + 5xz)\overline{j} + (4z + 5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №3

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде (φ(*x*,*y*)=*C*)).

1.1. $4xdx - 3ydy = 3yx^2dy - 2xy^2dx.$

1.2. $x(5 + y^2)^{1/2} + y'y(1 + x^2)^{1/2} = 0.$

1.3. $(4 + y^2)^{1/2}dx - ydy = x^2ydy.$

1.4. $(3 + y^2)^{1/2}dx - ydy = x^2ydy.$

1.5. $6xdx - 6ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx.$

1.6. $x(3 + y^2)^{1/2} + y(2 + x^2)^{1/2}dy = 0.$

1.7. $(5 + e^{2x})dy + ye^{2x}dx = 0.$

1.8. $yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$

1.9. $6xdx - 6ydy = 3yx^2dy - 2xy^2dx.$

1.10. $x(5 + y^2)^{1/2}dx + y(4 + x^2)^{1/2}dy = 0.$

1.11. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0.$

1.12. $(4 - x^2)^{1/2}y' + xy^2 + x = 0.$

1.13. $2xdx - 2ydy = yx^2dy - 2xy^2dx.$

1.14. $x(4 + y^2)^{1/2}dx + y(1 + x^2)^{1/2}dy = 0.$

1.15. $(8 + e^x)dy - ye^x dx = 0.$

1.16. $(5 + y^2)^{1/2} + y'y(1 - x^2)^{1/2} = 0.$

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$

2.3. $y' = \frac{y + x}{x - y}.$

2.4. $xy' = (x^2 + y^2)^{1/2} + y.$

2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

2.6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$

2.7. $y' = \frac{2y + x}{2x - y}.$

2.8. $xy' = 2(x^2 + y^2)^{1/2} + y.$

2.9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$

2.10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$

2.11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$

2.12. $xy' = (2x^2 + y^2)^{1/2} + y.$

2.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$

2.14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$

2.15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$

2.16. $xy' = 3(x^2 + y^2)^{1/2} + y.$

Задача 3. Найти решение задачи Коши.

3.1. $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$

3.2. $y' - y\,ctgx = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

3.3. $y' + y\cos x = (\sin 2x)/2, \quad y(0) = 0.$

3.4. $y' + y\,tgx = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$

3.5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$

3.6. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

3.7. $y' - y/x = x\sin x, \quad y(\pi/2) = 1.$

3.8. $y' + y/x = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi.$

3.9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

3.10. $y' + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}, \quad y(0) = 2/3.$

3.11. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4.$

3.12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e.$

3.13. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

3.14. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

3.15. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$

3.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \; y(1) = 1.$

Задача 4. Решить задачу Коши.

4.1. $y^2dx + \left(e^{2/y} + x\right)dy = 0, \; y(e) = 2.$

4.2. $(y^4e^y + 2x)y' = y, \quad y(0) = 1.$

4.3. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0, \; y(1) = e.$

4.4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, \; y(0) = 0.$

4.5. $(cos^2 y cos2y - x)y' = \sin y cosy, \; y(1/4) = \pi/3.$

4.6. $(x cos^2 y - y^2)y' = y cos^2 y, \; y(\pi) = \pi/4.$

4.7. $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy, \quad y(0) = 0.$

4.8. $(104y^3 - x)y' = 4y, \quad y(8) = 1.$

4.9. $(xy - y^3)dy + dx = 0, \; y(-1) = 0.$

4.10. $(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y, \; y(16) = \pi/4.$

4.11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, \; y(0) = 0.$

4.12. $(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy, \; y(4) = e^2.$

4.13. $2(y^4 + x)y' = y, \; y(-2) = -1.$

4.14. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, \; y(1/4) = 2.$

4.15. $2y^2dx + \left(e^{1/y} + x\right)dy = 0, \; y(e) = 1.$

4.16. $\left(xy + y^{1/2}\right)dy + y^2dx = 0, \; y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.$

Задача 5. Найти решение задачи Коши.

5.1. $y' + xy = (x+1)e^{-x}y^2, \;\; y(0) = 1.$

5.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \; y(1) = 1/2.$

5.3. $2(xy' + y) = xy^2, \; y(1) = 2.$

5.4. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, \; y(0) = 1.$

5.5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \; y(1) = 1.$

5.6. $2(y' + xy) = (x+1)e^{-x}y^2, \;\; y(0) = 2.$

5.7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \; y(1) = 3.$

5.8. $2y' + y\cos x = \cos x(1 + \sin x)y^{-1}, \; y(0) = 1.$

5.9. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), \; y(0) = -1.$

5.10. $3y' + 2xy = 2xe^{-2x^2}y^{-2}, \; y(0) = -1.$

5.11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \; y(1) = (1/2)^{1/2}.$

5.12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \;\; y(1) = 1.$

5.13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \;\; y(0) = 1/2.$

5.14. $3(xy' + y) = xy^2, \;\; y(1) = 3.$

5.15. $y' - y = 2xy^2, \;\; y(0) = 1/2.$

5.16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \; y(1) = 2^{1/2}/2.$

Задача 6. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

6.1. $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$

6.2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0.$

6.3. $3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0.$

6.4. $(2x - 1 - y/x^2)dx - (2y - 1/x)dy = 0.$

6.5. $y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0.$

6.6. $(3yx^2 + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$

6.7. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

6.8. $(sin2x - 2(\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)\,dy = 0.$

6.9. $\left(xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \dfrac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$

6.10. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx - \dfrac{2y}{x^3}dy = 0.$

6.11. $\left(\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx - \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$

6.12. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0.$

6.13. $\dfrac{1+xy}{x^2 y}dx + \dfrac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$

6.14. $\dfrac{1}{y}dx - \dfrac{x+y^2}{y^2}dy = 0.$

6.15. $\dfrac{y}{x^2}dx - \dfrac{xy+1}{x}dy = 0.$

6.16. $(xe^x + y/x^2)dx - (1/x)dy = 0.$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №4

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.1. $x^4y'' + x^3y' = 1.$

1.2. $xy''' + 2y'' = 0.$

1.3. $y''(1+x^2) + 2xy' = x^3.$

1.4. $x^5y''' + x^4y'' = 1.$

1.5. $xy''' - y'' + 1/x = 0.$

1.6. $xy''' + y'' + x = 0.$

1.7. $y^{(4)}\text{thx} = y'''.$

1.8. $xy''' + y'' = x^{1/2}.$

1.9. $y'''\text{tgx} = y'' + 1.$

1.10. $y'''\,\text{tg}\,5x = 5y''.$

1.11. $y'''\text{th}7x = 7y''.$

1.12. $x^3y''' + x^2y'' = x^{1/2}.$

1.13. $y''x^4 + y'x^3 = 4.$

1.14. $(x+1)y''' + y'' = x + 1.$

1.15. $y'''(1+\sin x) = y''\cos x.$

1.16. $xy''' + y'' = \frac{1}{x^{1/2}}.$

Задача 2. Найти решение задачи Коши.

2.1. $y''y^3+36=0, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=2.$

2.2. $y''=18\sin^3 y\cos y, \quad y(1)=\pi/2, \quad y'(1)=3.$

2.3. $4y^3y''=y^4-16, \quad y(0)=\sqrt{8}, \quad y'(0)=1/\sqrt{2}.$

2.4. $y''=50y^3, \quad y(3)=1, \quad y'(3)=5.$

2.5. $y''y^3+25=0, \quad y(2)=-5, \quad y'(2)=-1.$

2.6. $y''+18\sin y\cos^3 y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3.$

2.7. $y''=8\sin^3 y\cos y, \quad y(1)=\pi/2, \quad y'(1)=2.$

2.8. $y''=32y^3, \quad y(4)=1, \quad y'(4)=4.$

2.9. $y''y^3+16=0, \quad y(1)=2, \quad y'(1)=2.$

2.10. $y''+32\sin y\cos^3 y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=4.$

2.11. $y''=50\sin^3 y\cos y, \quad y(1)=\pi/2, \quad y'(1)=5.$

2.12. $y''=18y^3, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=3.$

2.13. $y''y^3+9=0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=3.$

2.14. $y^3y''=4(y^4-1), \quad y(0)=\sqrt{2}, \quad y'(0)=\sqrt{2}.$

2.15. $y''+50\sin y\cos^3 y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=5.$

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения.

3.1. $y'''+y''=5x^2-1.$

3.2. $y^{(4)}+4y'''+4y''=x-x^2.$

3.3. $7y'''-y''=12x.$

3.4. $y'''+3y''+2y'=3x^2+2x.$

3.5. $y'''-y'=3x^2-2x+1.$

3.6. $y'''-y''=4x^2-3x+2.$

3.7. $y^{(4)}-3y'''+3y''-y'=x-3.$

3.8. $y^{(4)}+2y'''+y''=12x^2-6x.$

3.9. $y'''-4y''=32-384x^2.$

3.10. $y^{(4)}+2y'''+y''=2-3x^2.$

3.11. $y'''+y''=49-24x^2.$

3.12. $y'''-2y''=3x^2+x-4.$

3.13. $y'''-13y''+12y'=x-1.$

3.14. $y^{(4)}+y'''=x.$

3.15. $y'''-y''=6x+5.$

3.16. $y'''+3y''+2y'=x^2+2x+3.$

Задача 4. Найти решение дифференциального уравнения.

4.1. $y''' - 3y' - 2y = (4x + 9)e^{2x}$.

4.2. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^{x}$.

4.3. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$.

4.4. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^{x}$.

4.5. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^{x}$.

4.6. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^{x}$.

4.7. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^{x}$.

4.8. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$.

4.9. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$.

4.10. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}$.

4.11. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{x}$.

4.12. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$.

4.13. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^{x}$.

4.14. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^{x}$.

4.15. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^{x}$.

4.16. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.

Задача 5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

5.1. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

5.2. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-3\sin x + 4\cos x)$.

5.3. $y'' + 2y' = 10e^{x}(\sin x + \cos x)$.

5.4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

5.5. $y'' + y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$.

5.6. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.

5.7. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$.

5.8. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + 5\cos x)$.

5.9. $y'' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x)$.

5.10. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$.

5.11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$.

5.12. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.

5.13. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

5.14. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(2\sin x - \cos x)$.

5.15. $y'' + 2y' = 3e^{x}(\sin x + \cos x)$.

5.16. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$.

Задача 6. Найти общее решение дифференциального уравнения.

6.1. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$.

6.2. $y''' - 9y' = 18\sin 3x - 9\cos 3x - 9e^{3x}$.

6.3 $y'' - y' = 2chx$.

6.4. $y'' + 25y = -10\sin 5x + 20\cos 5x + 50e^{5x}$.

6.5. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$.

6.6. $y'' + 2y' = 2sh2x$.

6.7. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$.

6.8. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.

6.9. $y'' + 3y' = 2sh3x$.

6.10. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$.

6.11. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.

6.12. $y'' + 4y' = 16sh4x$.

6.13. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$.

6.14. $y''' - 49y' = -49(\sin 7x + \cos 7x) + 14e^{7x}$.

6.15. $y'' + 5y' = 50sh5x$.

6.16. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.

Задача 7. Найти решение задачи Коши.

7.1. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7.2. $y'' + 9y = 9/\sin 3x$, $y(\pi/6) = 4$, $y'(\pi/6) = 3\pi/2$.

7.3. $y'' + 9y = 9/\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7.4. $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x})$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

7.5. $y'' + 4y = 4ctg2x$, $y(\pi/4) = 3$, $y'(\pi/4) = 2$.

7.6. $y'' - 3y' + 2y = 1/(3 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$.

7.7. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7.8. $y'' + 16y = 16/\sin 4x$, $y(\pi/8) = 3$, $y'(\pi/8) = 2\pi$.

7.9. $y'' + 16y = 16/\cos 4x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

7.10. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.

7.11. $y'' + y/4 = ctg(x/2)/4$, $y(\pi) = 2$. $y'(\pi) = 1/2$.

7.12. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$.

7.13. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^{x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7.14. $y'' + 4y = 4/\sin 2x, y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = \pi$.

7.15. $y'' + 4y = 4/\cos 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

7.16. $y'' + y' = e^x/(2+e^x)$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 9$.

Задача 8. **Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям.**

8.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 1, & x(0) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^t, & y(0) = 0. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - e^t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$

8.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + e^{2t}, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y, & y(0) = 2. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y + e^{-2t}, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y, & y(0) = 2. \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, & x(0) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y + e^{-2t}, & y(0) = 0. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + t, & x(0) = 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + \sin t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + \cos t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

8.10 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + te^t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y, & y(0) = 0. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y, & y(0) = 3. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y + 2e^t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y, & y(0) = 2. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - 2t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y, & y(0) = 2. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y + 2t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y + 2t, & y(0) = 1. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + \sin t, & x(0) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y, & y(0) = 0. \end{cases}$ 8.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 2, & x(0) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y, & y(0) = -1. \end{cases}$

4 СЕМЕСТР

Типовой расчета №1 по разделу «Теория вероятностей»

Вариант №1

1) Все буквы русского алфавита написаны на 33 карточках. Какова вероятность того, что наудачу взятая карточка окажется с гласной буквой?
2) Ребенок не умеющий читать играет с буквами разрезной азбуки: А, Г, Е, З, Л, Ь. Какова вероятность того, что переставляя буквы наугад, он составит слово «ГАЗЕЛЬ»?
3) Две одинаковые монеты радиуса r размещены внутри круга R, в который наудачу бросается точка. Вычислить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если эти монеты не пересекаются.
4) В ящике 15 шаров. Из них 3 белые, пять – синие, семь – черные. Наудачу извлекают два шара без возвращения. Найти вероятность того, что шары одного цвета.
5) Издательство отправило газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое почтовое отделение равна 0,9. Найти вероятность того, что а) оба отделения получат газеты вовремя; б) хотя бы одно получит вовремя.
6) Разрыв электрической цепи может произойти только в результате выхода из строя элемента k_1 или одновременного выхода двух элементов k_2 и k_3, которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3, 0,2, 0,2. Найти вероятность разрыва цепи.
7) При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки, число которых составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 от общего числа осколков. При попадании в танк крупный осколок пробивает его броню с вероятностью 0,9, средний - с вероятностью 0,3 и мелкий с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет его.
8) Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная схема проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий удовлетворяющих стандарту, а для изделий, не удовлетворяющих стандарту с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие признанное стандартным при проверке, действительно удовлетворяет стандарту.
9) Всхожесть семян цветов оценивается вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдет 600?
10) Известно, что в среднем 86% деталей изготовляемых в цехе являются стандартными. Случайно отобрали 1000 деталей. Найти вероятность того, что относительная частота нестандартных деталей отклонится от вероятности такой детали по модулю не более чем на 0,04.
11) В ящике лежат 10 изделий, одно из них бракованное. Из ящика вынимают изделия одно за другим до тех пор пока не будет вынуто наугад бракованное. Составить закон распределения случайной величины X - числа вынутых изделий. Найти $F(x)$ и построить ее графически. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить график распределения.

12) При каком значении параметра C функция $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ C/x^4, & x\ge 1\end{cases}$ будет плотностью вероятности случайной величины X? Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

13) На автомате изготовляются заклёпки. Диаметр их головок представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $M(X)=2$ мм, $\sigma^2=0{,}01$мм^2. Какие размеры диаметра головок можно гарантировать с вероятность 0,95? Записать функцию $f(x)$.

14) 14. Средний срок службы мотора 4 года. Оценить вероятность того, что взятый случайно мотор прослужит более 15 лет.

Вариант №2

1) Какова вероятность того, что случайно выбранное целое число от 1 до 30 является делителем числа 30.

2) На книжной полке случайным образом расставлены четыре книги по математике и три по физике. Найти вероятность того, что книги по каждому предмету окажутся рядом.

3) В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошена точка. Вероятность попадания точки в фигуру пропорциональна ее площади и не зависит от ее расположения. Найти вероятность того, что точка попадет в треугольник.

4) Безотказная работа прибора обуславливается безотказной работой каждого из трех механизмов-узлов, составляющих его и вероятности безотказной работы которых в течении времени *T* соответственно равны 0,6; 0,7; 0,9. Найти вероятность безотказной работы прибора за время *T*.

5) На обувной фабрике в отдельных цехах производят подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 0,5% каблуков, 2% подметок и 4% верхов. Произведенные верхи, подметки и каблуки случайно комбинируются в цехе, где шьют ботинки. Найти вероятность того, что изготовленная пара будет иметь хотя бы один дефект.

6) В партии, состоящей из 20 изделий, имеется 5 дефектных. Из партии выбираются для контроля 7 изделий. Если среди контрольных окажется более трех дефектных, бракуется вся партия. Найти вероятность того, что партия будет забракована.

7) В трех урнах лежат шары. В первой урне пять белых и пятнадцать черных; во второй – десять белых и десять черных и в третьей урне десять черных. Найти вероятность того, что случайно взятый шар из случайно выбранной урны окажется черным.

8) Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса – 4 , из второй – 6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятность того, что студент первой, второй, третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент попал сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежит этот студент?

9) При каждом отдельном выстреле из орудия вероятность попадания в цель равна 0.9. вычислить вероятность того, что из 19 выстрелов удачными будут 10.

10) По данным телевизионного ателье в течении гарантийного срока выходят из строя в среднем 12% кинескопов. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных кинескопов не менее 20 проработают гарантийный срок.

11) Вероятность того, что телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,8. Со склада отпущено 6 телевизоров. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - числа телевизоров, которые потребуют гарантийного ремонта; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти $F(x)$ и построить ее график.

12) Случайная величина X задана законом распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{2}{3} \\ 3x^2-2x, & \dfrac{2}{3}<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Требуется:1) найти функцию $f(x)$ 2) вероятность того, что в двух опытах величина примет значение из интервала $(0,7;0,8)$; 3) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) При средней длине некоторой детали в 20 см. найдено, что отклонения, превосходящие $\pm 0,5$ см, встречаются в среднем 4 раза из 100 деталей. Считая, что длина детали распределена по нормальному закону, определите её стандартное отклонение $\sigma(X)$.

14) В среднем из 100 деталей 20 не удовлетворяют стандарту. Оценить вероятность того, что из случайно взятых 2500 деталей будет 1950 до 2050 стандартных.

Вариант №3

1) Какова вероятность того, что задуманное двузначное число делится на 5.

2) Из чисел 1, 2, 3, …30 случайно отбирают 10 различных. Найти вероятность того, что 5 чисел четные и пять – нечетные.

3) В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в большой круг точка, попадет также и в меньший круг.

4) Найти вероятность того, что выбранное наудачу изделие первосортное, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 75% не бракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

5) Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор 0,95, второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

6) Какова вероятность того, что наудачу записанная дробь сократится на 2? Найти вероятность того, что дробь не сократится ни на два ни на три.

7) В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% брака, второго – 10%, третьего – 5%. Найти вероятность приобретения исправного телевизора, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% - со второго, 50% - с третьего завода.

8) При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-2 с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-2 соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разладке автомата. Найти вероятность того, что сигнал получен от сигнализатора С-1.

9) Два равносильных игрока играют в настольный теннис. Какова вероятность того, что игрок выиграет не менее трех партий из пяти.

10) Вероятность того, что изготовленные часы будут стандартными равна 0,97. Найти вероятность того, что среди 1000 изготовленных часов относительная частота стандартных часов отклонится от вероятности таких часов по модулю не более чем на 0,02.

11) Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Из партии контролер берёт деталь и проверяет её качество. Если она оказывается нестандартной, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если деталь окажется стандартной, то контролер берет следующую и т.д. Но всего он проверяет не более 5 деталей. Требуется: 1)составить закон распределения случайной величины X - числа проверенных деталей; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ a(1-\cos x), & 0 < x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение большее $5\pi/6$; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma(X)=20$ мм и $M(X)=0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по модулю 4 мм.

14) В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время Т лампа будет включена, равна 0,8. Оценить вероятность того, что число включенных в данный момент ламп будет отличаться от среднего числа включенных ламп по модулю а) не больше чем на 3; 2) не меньше чем на 3.

Вариант №4

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков равна 8, а разность 4.

2) На шести одинаковых карточках написаны числа 2, 4, 7, 8, 12, 10. Наудачу взяты две карточки. Какова вероятность того, что образованная из этих чисел дробь сократима?

3) Абонент ждет телефонного звонка в течении одного часа. Найти вероятность того, что вызов произойдет в последние 20 минут этого часа.

4) На книжной полке 5 книг, из них четыре словаря. Студент наудачу взял две книги. Найти вероятность того, что обе книги словари.

5) Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность промаха при одном выстреле из первого орудия равна 0,3, из второго – 0,2, из третьего – 0,1. Найти вероятность того, что а) попадет только одно орудие; б) цель будет поражена.

6) Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя первого станка равна 0,1, второго – 0,3, третьего – 0,2. Найти вероятность того, что из строя выйдут не менее двух станков.

7) В одной партии изделий 12 штук, а в другой – 10 штук. В каждой партии по два изделия бракованные. Изделие взятое наудачу из второй партии переложили в первую партию, после чего из первой партии наудачу взяли изделие. Найти вероятность того, что изделие извлеченное из первой партии будет годным.

8) Пассажир может купить билет в одной из трех касс. Вероятность того, что он направится к первой кассе 0,5; ко второй –1/3; к третьей – 1/6. Вероятность, что билетов уже нет в первой кассе – 1/5; во второй – 1/6; в третьей – 1/8. Он обратился в одну из касс и получил билет. Найти вероятность того, что он обратился в первую кассу.

9) Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,001. Найти вероятность того, что при 1000 выстрелах будет не менее двух попаданий.

10) Найти вероятность того, что из 100 посаженных семян прорастут не менее 80, если их всхожесть равна 0,6.

11) Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки – 0,9, второй – 0,98, третий – 0,75, четвертый – 0,7. Требуется: 1) составить закон распределения числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x<0, \quad x>2 \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $F(x)$; 3) вычислить вероятность события $X<1$; 4) вычислить $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.

13) При весе некоторого изделия в 10 кг, найдено, что отклонение, по абсолютной величине превосходящее 50 г, встречается в среднем 34 раза из тысячи изделий. Считая, что вес изделия есть случайная величина X, распределенная по нормальному закону, найти ее среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

14) Среднее число вызовов на АТС за оду минуту равно 20. Оценить вероятность того, что в течении случайно выбранной минуты на АТС поступят: а) более 30 вызовов б) менее 20 вызовов.

Вариант №5

1) В словаре языка А.С. Пушкина имеется 22000 различных слов, из которых 16000 А.С. Пушкин употребляет в своих произведениях только один раз. Найти вероятность того, что наудачу взятое из этого словаря слово, употреблялось писателем более одного раза.

2) Десять человек разбились на две команды, по пять человек в каждой, для игры в волейбол. Найти вероятность того, что два брата попадут в одну команду.

3) Два действительных числа выбираются так, что $|x|\le 3,\ |y|\le 5$. Какова вероятность того, что дробь $\frac{x}{y}$ окажется положительной.

4) Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент ответит на билет, содержащий три вопроса.

5) Вычислительный центр располагает тремя вычислительными устройствами. Вероятность отказа за некоторое время Т для первого устройства равна 0,2, для второго – 0,15, для третьего – 0,1. Найти вероятность того, что в данный момент откажут а) хотя бы одно устройство; б) откажет только третье устройство.

6) Вероятность того, что нужная сборщику деталь содержится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не более чем в трех ящиках.

7) В первом кармане три монеты по 20 копеек и три монеты по 3 копейки, а в левом кармане шесть монет по 20 копеек и три монеты по 3 копейки. Из правого кармана в левый перекладывают наугад пять монет. Найти вероятность того, что монета, извлеченная из левого кармана после перекладывания будет в 20 копеек.

8) У рыбака есть три излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что рыба клюнет на первом месте 1/3, на втором – ½, на третьем – ¼. Известно, что рыбак поймал рыбку, забросив удочку. Какова вероятность того, что он рыбачил на третьем месте.

9) Что вероятнее: выиграть у равносильного противника в шахматы три партии из четырех или пять из восьми?

10) Штамповка металлических клемм дает 20% брака. Найти вероятность того, что в партии из 600 клемм число не соответствующих стандарту клемм будет от 100 до 125.

11) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задает ему 5 вопросов. Пятерка ставится за 5 правильных ответов, четверка за четыре из 5, и т.д. Требуется: 1)составить закон распределения случайной величины X - оценки студента; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$; 4) найти $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ a(x-2)^3, & 2<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что величина X примет значение большее $5/2$; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Станок автомат изготавливает валики, причем контролируется их диаметр X, который имеет нормальный закон распределения с $M(X)=10$ мм, $\sigma=0{,}1$мм. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

14) Сумма всех вкладов в некоторой сберегательной кассе составляет 200000$, а вероятность того, что случайно взятый вклад не превышает 1000 $, равна 0,8. Что можно сказать о числе вкладчиков этой сберегательной кассы?

Вариант №6

1) На складе хранится 500 аккумуляторов. Известно, что после года хранения 20 штук выходят из строя. Требуется найти вероятность того, что наудачу взятый после года хранения аккумулятор окажется годным.

2) Из чисел 1, 2, 3, …30 случайно отбирают 10 различных. Найти вероятность того, что ровно 5 чисел делятся на три.

3) Два действительных числа выбираются так, что $|x|\le 1,\ 0\le y\le 1$. Найти вероятность того, что $x^2<y$.

4) Из букв слова «РОТОР», составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекают 3 буквы и складывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «ТОР».

5) Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает только два вопроса.

6) Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Найти вероятность того, что экзамен сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

7) Прибор, установленный на борту самолета может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки взлета и посадки. Крейсерский режим осуществляется в 80% всего времени полета, а условие перегрузки в 20%. Вероятность выхода прибора из строя во время перегрузки равна 0,4, а во время крейсерского полета – 0,1. Найти вероятность надежности прибора за время всего полета.

8) Имеются два ящика с красными и синими шарами: в первом 3 синих и 5 красных, во втором 7 синих и 11 красных. Наудачу выбирается шар. Шар извлекали из наудачу взятого ящика. Известно, что извлеченный шар оказался синим. Найти вероятность того, что извлекали из первого ящика.

9) В среднем 90% поездов прибывают без опоздания. Считая опоздания поездов независимыми событиями, найти вероятность того, что из пяти поездов опаздывают не более одного.

10) В среднем из 100 деталей не удовлетворяют стандарту 20 деталей. Найти вероятность того, что среди 2500 деталей будет от 1950 до 2060 стандартных деталей.

11) В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Наудачу взяты четыре изделия. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - числа бракованных изделий среди четырех; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина распределена по закону:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ a\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что в двух испытаниях хотя бы раз величина примет значение из интервала $(1{,}5;\ 2{,}0)$; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Для нормального распределения с параметрами $a=5, \quad \sigma=2$ требуется определить: 1) значение плотности вероятности в точке $x=4$; 2) вероятность события $7<X<8$; 3) вероятность того, что X не отклонится за пределы 3σ.

14) На поле прямоугольной формы посеяно 2000 рядов кукурузы. Для определения средней урожайности собрали початки в каждом десятом ряду и на основании этих данных вычислили выборочную среднюю урожайность. Дисперсия урожайности на каждом обследованном участке не превышает 20. Оценить вероятность того, что средняя урожайность на всем поле и выборочная средняя урожайность будут отличаться по абсолютной величине не более чем на 0,5 ц/га. Указание: средняя урожайность на всем поле принимается равной математическому ожиданию выборочной средней урожайности.

Вариант №7

1) Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля имеет все цифры различные. Замечание: считать номер 0000 возможным.

2) В вещевой лотерее разыгрываются пять предметов. Всего в урне 30 билетов. Первый подошедший к урне вынимает четыре билета. Найти вероятность того, что два из этих билетов окажутся выигрышными.

3) Наудачу выбираются два действительных числа x, y так, что $0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1$. Найти вероятность того, что $y^2 \le x$.

4) Имеется 10 карточек, на которых написаны числа 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6. Одну за другой вынимают две карточки. Найти вероятность того, что на одной карточке будет четное число, а на другой нечетное.

5) Журналист разыскивает нужную ему книгу в трех библиотеках. Вероятность наличия книги в первой библиотеке рана 0,9, во второй – 0,8, в третьей – 0,6. Найти вероятность того, что а) книга есть только в первой библиотеке; б) книга есть только в одной библиотеке.

6) Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на двух гранях будет одинаковое число очков, а на третьей – другое число очков.

7) На столе экзаменатора 20 билетов, пронумерованных от 1 до 20. Найти вероятность того, что студент берущий билет вторым, возьмет билет с однозначным номером.

8) Три оператора радиолокационной установки производят соответственно 25%, 35% и 40% всех измерений, допуская при этом 5%, 4% и 2% ошибок. Случайно произведенное измерение оказалось ошибочным. Какова вероятность того, что измерение производил второй оператор?

9) Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Найти наивероятнейшее число семян, которые не взойдут, если посеяли 10 семян.

10) Статистическая вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек.

11) В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны четыре детали. Требуется: 1)составить закон распределения случайной величины X - числа стандартных среди отобранных; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a\left(4x-x^2\right), & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что величина в результате испытания примет значение меньшее 1; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превосходит 10 мм. Случайные отклонения подчинены нормальному закону с $a=0,\quad \sigma(X)=5$ мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

14) Известно, что в среднем 86% составляют стандартные детали. Оценить вероятность того, что в результате проверки 1000 деталей относительная частота нестандартных деталей отклонится от вероятности изготовления нестандартной детали по абсолютной величине меньше чем на 0,04.

Вариант №8

1) Куб, грани которого окрашены, распилен на 64 одинаковых кубиков. Кубики перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу взятый кубик будет иметь одну окрашенную грань.

2) Библиотечка состоит из 10 книг, причем 5 книг стоят по 4 сома каждая, три книги – по одному сому и две книги по три сома. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят в сумме 5 сомов.

3) На отрезке длиной 20 см помещен меньший отрезок длиной 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

4) В первом ящике шары с номерами 5, 6, 7, 8, а во втором с номерами 1, 2, 3, 4. Из каждого ящика наудачу извлекли по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров извлеченных шаров равна 10?

5) Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность промаха при одном выстреле из первого орудия равна 0,5, из второго – 0,6, из третьего – 0,9. Найти вероятность того, что а) цель будет поражена; б) цель не поражена; в) попадет только второе орудие.

6) Абонент забыл последнюю цифру нужного номера телефона и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

7) Группа студентов состоит из 5 отличников, 10 хорошистов, 8 троечников и двух двоечников. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки, хорошо успевающие студенты могут с одинаковой вероятностью получить хорошие и отличные оценки, троечники получают отличные оценки только в двух случаях из десяти. Двоечники получить отличную оценку не могут. Найти вероятность того, что наугад вызванный студент получит отличную оценку.

8) Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 15% общего количества электроламп, второй - 40%, третий -45% . Продукция 1-го завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 81%, третьего – 90% . В магазине лампы оказались не рассортированными, и купленная наугад лампа оказалась негодной. Найти вероятность того, что лампа изготовлена на заводе №2

9) Оптовая база снабжает 10 магазинов, вероятность поступления от каждого из которых заявки на очередной день равна 0,6. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность этого наивероятнейшего числа.

10) В среднем 30% студентов сдают экзамен на хорошо и отлично (по данной дисциплине). Найти вероятность того, что, по крайней мере, семь человек из десяти получат хорошие или отличные оценки.

11) В коробке лежат 10 темных и 5 светлых галстуков. Продавец отобрал 3 галстука. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - числа светлых галстуков среди трех отобранных. 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ax^3, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$;3) вычислить вероятность того, что в двух опытах величина примет значение большее 2

13) Рост взрослых мужчин является нормальной случайной величиной, имеющей $M(X)=175$см. и $\sigma(X)=6$см. Требуется: 1) написать функцию плотности вероятности этой случайной величины; 2) вычислить вероятность того, что хотя бы один из отобранных четырех мужчин, будет иметь рост от 170 см до 180 см.

14) Среднее количество осадков выпадающих в данной местности равно 55 см. Оценить вероятность того, что в этой местности выпадет а) более 175 см осадков; б) менее 120см.

Вариант №9

1) Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков равна 5, а произведение равно 4.

2) Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы.

3) Наудачу взяты два положительных числа не превышающие 1. Какова вероятность того, что их сумма не превышает 1, если сумма их квадратов больше $1/4$.

4) Вини Пух собрался вкусно пообедать. С вероятностью p_1=0,3 что-нибудь вкусное есть у кролика, а с вероятностью p_2=0,6 что-нибудь вкусное есть у Пяточка, но с вероятностями $q_1=0{,}2$ $и$ $q_2=0{,}9$ их нет дома. К кому надежнее зайти, думает Вини Пух?

5) Три студента решают одну и ту же задачу. Вероятность того, что задачу решит первый студент равна 0,2, второй – 0,4, третий – 0,8. Найти вероятность того, что а) задача решена; б) задача не решена; в) задачу решит только третий студент.

6) Студентам, едущим на практику предоставляется 15 мест в Москву, 10 мест в Киев и 5 мест в Новосибирск. Найти вероятность того, что три определенные студента попадут на практику в один город.

7) . На столе экзаменатора 20 билетов, пронумерованных от 1 до 20. Найти вероятность того, что студент, берущий билет вторым, возьмет билет с двузначным номером.

8) Три стрелка производят по одному выстрелу по одной мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4. В результате произведенных выстрелов в мишени оказалось две пробоины. Найти вероятность того, что в мишень попали второй и третий стрелки.

9) Вероятность того, что покупателю магазина не требуется обувь 37 размера, равна 0,2. Найти наивероятнейшее число покупателей, которым потребуется обувь 37 размера, если в магазине ожидается 800 покупателей.

10) Найти вероятность того, что в партии из 5000 изделий отклонение относительной частоты бракованных изделий от вероятности таких изделий равной 0,02, по модулю превысит 0,01.

11) На базе хранятся 10 холодильников, среди которых 2 бракованных. Из этого числа холодильников в магазин привезли 5 холодильников. Требуется:1) составить закон распределения случайной величины X - числа годных холодильников среди привезённых в магазин; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Непрерывная случайная величина X распределена по закону:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ ax^5, 0<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что величина в результате испытания примет значение большее 1,5.

13) Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(X)=10$ мм. И $\sigma(X)=5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате опыта.

14) Среднее суточное потребление электроэнергии в данной местности равно 20000квт/час, а среднее квадратическое отклонение равно 200квт/час. Какого потребления электроэнергии можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью не меньшей 0,96?

Вариант №10

1) Абонент забыл три последние цифры номера телефона и набирает их наудачу. Найти вероятность того, что он наберет правильный номер.

2) Среди кандидатов в студенческий совет три первокурсника, пять второкурсников и семь третьекурсников. Из этого состава отбирают 5 человек. Найти вероятность того, что: а) выбраны одни второкурсники; б) выбраны одни третьекурсники.

3) Дано уравнение $x^2+ax+b=0$. Известно, что $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$, причем вероятность попадания каждой из точек a и b в какой-либо интервал отрезка $[0;1]$ пропорциональна длине интервала и не зависит от его положения относительно отрезка $[0;1]$. Найти вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни.

4) На участке *AB* у мотоциклиста-гонщика имеется 2 препятствия. Вероятность остановки на каждом из них 0,1. Вероятность, что от пункта *B* до пункта *C* не будет остановки равна 0,7. Найти вероятность того, что на участке *AC* не будет остановки.

5) На столе экзаменатора лежат 30 билетов, пронумерованных от 1 до 30. Найти вероятность того, что первые два студента, берущие билеты возьмут а) билеты с однозначными номерами; б) билеты с двузначными номерами; в) один с однозначным другой с двузначным номером.

6) При приеме партии подвергается проверке половина партии. Условие приемки партии – наличие в выборке брака не более 2%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий будет принята, если она содержит 5% брака.

7) Радиолампа может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями p_1=0.6 и p_2= 0,4. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны соответственно 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что взятая лампа проработает заданное число часов.

8) Имеется десять одинаковых коробок, из которых в девяти находятся по два черных и два белых шара; а в одной (*) 5 белых и 1 черный шар. Из одной наудачу взятой коробки извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлекался из коробки (*)?

9) Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность не менее пяти попаданий при шести выстрелах.

10) Всхожесть хранящихся на складе зерен пшеницы составляет 80%. Наудачу отобрали 100 зерен. Найти вероятность того, что число проросших семян будет в пределах от 68 до 90 штук.

11) Стрелок ведет стрельбу по цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7, при этом за каждое попадание стрелок получает 8 очков. Сделано три выстрела. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - числа очков полученных стрелком за три выстрела; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Непрерывная случайная величина задана законом распределения: $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ a/x^7, & x\geq 1\end{cases}$.

Требуется: 1) Найти параметр a; 2) Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;3) вычислить вероятность события $0{,}5< X <3$.

13) Рост взрослых женщин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с $M(X)=164$см. и $\sigma(X)=5{,}5$см. Найти вероятность того, что рост двух наудачу взятых женщин будет не меньше 162 см. и не больше 166 см.

14) Электростанция обслуживает сеть из 1800 ламп, вероятность включения каждой из которых в зимней вечер равна 0,9. Оценить вероятность того, что число ламп, включенных в сеть зимним вечером, отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 200 штук.

Вариант №11

1) Участники жеребьевки тянут жетоны из ящика. Номера жетонов от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифру 6.

2) В группе 18 девушек и 12 юношей. Надо выбрать делегацию из 2 человек. Найти вероятность того, что будут делегированы юноша и девушка.

3) В некоторый круг вписан правильный треугольник. Зная, что попадание точки в круг достоверно и что вероятность попадания точки в какую-либо часть этого круга зависит только от площади этой части и пропорциональна ей, найти вероятность попадания точки в треугольник.

4) В колоде 36 карт. Наудачу извлекают две карты без возвращения. Найти вероятность того, что а) извлеченные карты разного цвета; б) извлеченные карты одного цвета.

5) На участке АВ у гонщика имеется 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта В до пункта С не будет остановки равна 0,8. Найти вероятность того, что на участке АС не будет остановки.

6) По цели производится три независимых выстрела. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,4. Для поражения цели достаточно двух попаданий. Найти вероятность поражения цели.

7) В группе из десяти студентов, пришедших на экзамен, пять подготовлены хорошо, два – отлично, два – удовлетворительно, один – плохо. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов из двадцати возможных; хорошо подготовленный студент может ответить на 16 вопросов; удовлетворительно подготовленный – на 10 вопросов; плохо подготовленный – на 5 вопросов. Найти вероятность того, что наудачу вызванный студент ответит на три заданные ему вопроса.

8) В группе 20 лыжников, 6 конькобежцев и 4 горнолыжника. Вероятность выполнить норму мастера спорта для лыжника равна 0,9; для конькобежца – 0,8; для горнолыжника 0,75. Наудачу выбранный спортсмен не выполнил норму мастера спорта. Какова вероятность того, что это лыжник?

9) Было посеяно 28 семян тыквы с одинаковой всхожестью. Найти вероятность всхожести семян, если наиболее вероятные числа проросших семян 17 и 18.

10) Если в среднем левши составляют 1% , то каковы шансы на то, что среди случайно выбранных 200 человек левшей будет не более четырех.

11) В лотерее на каждые 100 билетов приходится один выигрыш в 1000 сомов, два выигрыша по 100 сомов и десять выигрышей по 10 сомов. Билет стоит 20 сомов. Требуется: 1)составить закон распределения случайной величины X – величины выигрыша на один билет; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ a\left(3x-x^2\right), & 0<x\le \dfrac{3}{2} \\ 1, & x>\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что после испытания величина примет значение большее 1.

13) Стрельба из орудия ведется вдоль определенного направления. Средняя дальность полета 10000 м. Предполагая, что дальность полета есть случайная величина X, распределенная по нормальному закону с $D(X)=1600$. Найти какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 100 до 200 м.

14) Среднее квадратическое отклонение каждой из 450000 независимых случайных величин не превосходит десяти. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превзойдет 0,02.

Вариант №12

1) В лотерее разыгрываются 1000 билетов. Среди них один выигрыш в 50 сомов, пять – по 20 сомов, двадцать – по 10 сомов и пятьдесят выигрышей по 5 сомов. Некто купил один билет. Найти вероятность выигрыша не менее 10 сомов.

2) Из десяти деталей две являются бракованными. Наудачу взяли 5 деталей. Найти вероятность того, что три детали из взятых будут не бракованными.

3) Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше единицы, а их произведение не больше $\dfrac{3}{16}$.

4) Студент знает 25 из 30 вопросов программы. В билете три вопроса. Двойка ставится, если студент не отвечает ни на один вопрос. Найти вероятность получения студентом двойки.

5) В одном ящике 6 белых и 4 черных шара, в другом 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что а) шары черные; б) только один черный; в) хотя бы один черный.

6) Студент знает 35 из 40 вопросов программы. Для получения зачета необходимо ответить не менее чем на два из трех заданных вопросов. Найти вероятность сдачи зачета студентом.

7) В трех урнах лежат мячи. В первой 5 футбольных мячей и 10 волейбольных; во второй урне 6 футбольных и 4 волейбольных; в третьей 5 футбольных и 5 волейбольных. Какова вероятность того, что наудачу взятый мяч из наудачу выбранной урны будет волейбольным.

8) Для сигнализации об аварии используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,2, 0,3, 0,5 к одному из трех типов. Вероятности срабатывания для которых равны 1, 0,75, 0,4 . От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего он относится?

9) В мастерской имеется 190 моторов. Вероятность того, что в данный момент мотор работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент времени работают 140 моторов.

10) В НИИ земледелия проверяется всхожесть семян кукурузы. Сколько семян следует посеять, чтобы относительная частота всхожих семян отличалась от вероятности всхожести равной 0,95 меньше чем на 0,01 с вероятностью 0,99.

11) Известно, что на некоторой фирме 10 сотрудников получают за одну неделю по 45 долларов, 25 сотрудников по 55, 40 по 65, 50 по 75, 50 по 85 и 25 по 100 долларов.

Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - зарплаты сотрудников; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения: $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ c/x^9, & x\geq 1\end{cases}$.

Требуется: 1) Найти параметр c; 2) Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;3) вычислить вероятность события $0{,}5<X<3$.

13) Для замера напряжения используются специальные тензодатчики. Определить среднюю стандартную ошибку тензодатчика, если он систематических ошибок не дает , а случайные ошибки распределены по нормальному закону, и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы $\pm 0{,}2$ мк.

14) При контрольной проверке изготовленных приборов установлено, что в среднем 15 из 100 приборов оказываются с дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от вероятности изготовления такого прибора не более, чем на 0,02.

Вариант №13

1) Найти вероятность того, что наудачу выбранный член последовательности $u_n=n^2+1,\ n=1,2,\ldots 10$ есть число кратное пяти.

2) Студент знает 20 из 30 вопросов программы. В билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент, взявший билет, ответит на два вопроса билета.

3) На отрезок *AB* длиной 12 см наугад бросают точку *M*, причем вероятность попадания точки в какой-либо подынтервал отрезка *AB* не зависит от его положения внутри *AB* и пропорциональна его длине. Какова вероятность того, что площадь квадрата построенного на *AM*, будет больше 36 см^2 и меньше 81 см^2?

4) В урне 30 шаров из них 5 белых, 10 синих, 15 красных. Шары извлекают без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение.

5) Из колоды в 52 карты наугад одновременно вынимают три карты. Найти вероятность того, что а) среди них нет красной масти; б) хотя бы одна карта красной масти.

6) В ящике содержится 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из деталей окрашена.

7) В одном пакете 10 конфет «Ласточка» и 5 конфет «Весна». В другом пакете 8 конфет «Ласточка» и 2 конфеты «Весна». Из первого пакета наудачу взяли одну конфету и переложили во второй пакет, после чего из второго пакета наудачу извлекли одну конфету. Найти вероятность того, что извлекли конфету «Весна».

8) Из 18 стрелков пять попадают в мишень с вероятностью 0,8; семь – с вероятностью 0,7; четыре –с вероятностью 0,6 и два – с вероятностью 0,5. Наудачу вызванный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. Какова вероятность того, что он принадлежит к четвертой группе стрелков?

9) В ВУЗе обучается 730 студентов. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся первого января и вероятность этого наивероятнейшего числа.

10) Из каждого десятка деталей девять удовлетворяют стандарту. Найти вероятность того, что из 50 взятых со склада деталей число стандартных окажется между 42 и 48.

11) Среди 20 приборов имеется 6 неточных. Наудачу берется 4 прибора. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - числа точных приборов среди отобранных; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Непрерывная случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a\sin x, & 0<x\le \pi/6\\ 1, & x>\pi/6\end{cases}$$

Требуется:1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что в результате опыта величина примет значение меньшее $\dfrac{\pi}{12}$.

13) Размер диаметра втулок является нормальной случайной величиной с $M(X)=2{,}5$см. и $\sigma(X)=0{,}001$. В каких границах можно гарантировать размер диаметра втулок с вероятностью 0,9973?

14) Для некоторого автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации равно 5. Оценить вероятность того, что по истечении месяца в одном автопарке будет отправлено в ремонт а) менее 15 автобусов; б)более 10.

Вариант №14

1) Куб, грани которого окрашены, распилен на 64 одинаковых кубиков. Кубики перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу взятый кубик будет иметь две окрашенных грани.

2) Из чисел 1, 2, 3, …30 случайно отбирают 10 различных. Найти вероятность того, что все отобранные числа окажутся нечетными.

3) Наугад взяты два положительных числа, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что их сумма не превышает единицы, а произведение не меньше 0,09?

4) Подброшены три игральные кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпадет тройка.

5) Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя первого станка равна 0,1, для второго – 0,3, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что а) выйдет из строя хотя бы один станок; б) из строя выйдет только первый станок.

6) Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча. После игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей.

7) В партии саженцев имеются в одинаковых количествах саженцы липы, тополя и березы. Вероятности того, что саженец приживается после посадки, равны соответственно 0,8; 0,9; 0,7. Найти вероятность того, что наудачу выбранный саженец приживется.

8) На складе 20 холодильников, изготовленных на заводе №1 и 40 – на заводе №2. Вероятность того, что холодильник изготовленный на заводе №1 будет иметь брак равна 0,1; для второго завода – 0,2. Холодильники упакованы в коробки. Наудачу взятый холодильник оказался с браком. Найти вероятность того, что он изготовлен на заводе №1.

9) В цехе имеется 10 однотипных станков. Вероятность того, что каждый станок в течении смены будет работать с остановками равна 0,2. Найти вероятность того, что в течении смены без остановок будут работать не менее двух станков.

10) При контрольной проверке изготовленных приборов было установлено, что в среднем 15 из 100 штук оказываются дефектными. Найти вероятность того, что число дефектных приборов среди взятых наудачу 400 штук будет отличаться от наиболее вероятного их числа по модулю не более чем на 20 штук.

11) Среди поступивших в ремонт 10 часов 6 штук нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в общей чистке механизма, рассматривает их поочередно, и, найдя такие, прекращает дальнейший осмотр. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - количества просмотренных часов; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ a(x^2-2x), & 2<x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что в двух опытах величина X примет значение большее 3; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков 5 мм. Вследствие неточности изготовления шарика, фактически его диаметр есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с $M(X)=5$ мм. и $\sigma(X)=0{,}05$ мм. При контроле шарики бракуются, если их диаметр отличается от номинального больше, чем на 0,1 мм. Определить какой процент шариков будет отбраковываться?

14) Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине, равна 0,6. Оценить вероятность того, что из 10000 покупателей число сделавших покупку будет заключено в пределах от 5900 до 6100.

Вариант №15

1) В лотерее разыгрываются 500 билетов. Крупные выигрыши падают на билеты, номера которых содержат три одинаковых цифры. Некто купил один билет. Найти вероятность того, что он выиграет крупный выигрыш.

2) У сборщика 12 деталей, мало отличающихся друг от друга. Из них пять деталей первого вида, четыре – второго, и три – третьего. Какова вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей окажутся три детали первого вида, две – второго и одна третьего вида?

3) Внутрь круга радиуса R брошена точка. Вероятность попадания точки в любую часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительной круга. Найти вероятность того, что точка окажется внутри квадрата, вписанного в круг.

4) В урне 15 шаров из них 10 цветных, остальные белые. Шары извлекают без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение.

5) Вероятность уничтожения цели при одном выстреле равна 0,2. Определить число выстрелов, необходимых для поражения цели с вероятностью равной 0,6.

6) В десятиламповом радиоприемнике перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наудачу выбранную лампу заменяют исправной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу приемника. Какова вероятность того, что приемник будет работать нормально после замены а) одной; б) пяти; в) десяти ламп?

7) Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй - 40%, третий -15% . Продукция 1-го завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%, третьего – 81% . В магазин лампы поступают с трех заводов. Найти вероятность того, что купленная лампа окажется стандартной.

8) В группе и 20 стрелков имеются четыре отличных стрелка; десять – хороших и шесть посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9; для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,4. Наудачу вызванный стрелок поразил цель. Найти вероятность того, что стрелял посредственный стрелок.

9) На заводе вырабатывается в среднем 80% холодильников отличного качества. Какова вероятность того, что в партии из 1000 холодильников окажется наивероятнейшее число холодильников отличного качества?

10) В течении года за индивидуальной консультацией по теории вероятностей обращаются в среднем 80% студентов. Найти вероятность того, что в этом году из 120 студентов за консультацией обратятся не менее 95 человек.

11) Вероятность попадания в цель для стрелка, делающего четыре выстрела, равна 0,3. За каждое попадание стрелок получает пять очков, а за каждый промах у него вычитают два очка. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – числа очков, полученных стрелком за 4 выстрела; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом: $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3 \\ \dfrac{a}{\sqrt{9-x^2}}, & -3<x<3 \\ 0, & x\ge 3 \end{cases}$

Требуется:1) найти параметр a; 2) найти функцию $F(x)$; 3) вычислить вероятность того, что величина примет значение большее $\sqrt{3}/2$.

13) Случайная величина X подчинена нормальному закону с $M(X)=0$. Вероятность попадания этой величины в интервал от -1 до 1 равна 0,5. Найти среднее квадратическое отклонение этой случайной величины и записать функцию $f(x)$.

14) Выборочным путем требуется определить средний вес зерен пшеницы. Сколько нужно обследовать зерен, чтобы с вероятностью большей 0,9 можно было утверждать, что средний вес отобранных зерен будет отличаться от математического ожидания этого среднего (принимаемого за средний вес зерен во всей партии) не более чем на 0,001 г? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса зерен не превышает 0,04г.

Вариант №16

1) Куб, грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков. Кубики перемешали, после чего извлекли наудачу один. Найти вероятность того, что кубик будет иметь три окрашенные грани.

2) В партии, состоящей из 20 изделий, имеются 5 дефектных. Из партии для контроля берут семь изделий. Если среди контрольных окажется более трех дефектных вся партия бракуется. Найти вероятность того, что партия будет забракована.

3) На отрезке L длиною 20 см помещен меньший отрезок l длиною 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет так же и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

4) В одном ящике 10 белых и пять черных шаров. Во втором ящике семь белых и три черных шара. Из каждого ящика наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что а) оба шара одного цвета; б) оба шара разного цвета.

5) Из чисел 1, 2, 3, …20 наудачу выбирают пять чисел. Найти вероятность того, что все числа нечетные.

6) Три стрелка поочередно ведут стрельбу по цели (одной и той же). Каждый стрелок имеет два патрона. При первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка израсходуют весь свой боезапас.

7) Литье в болванках поступает из двух цехов: 70% из первого, остальные из второго. Материал первого цеха имеет 10% брака, а второго 20%. Найти вероятность того, что наудачу взятая болванка оказывается без дефектов.

8) Два цеха штампуют однотипные детали. В первом цехе брак составляет 0,1%; во втором – 1%. Для контроля отобрано 50 изделий первого цеха и 60 – второго. Детали

оказались перемешанными. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь, оказавшаяся годной, изготовлена в первом цехе.

9) Проверяют партию из 50 приборов. Вероятность того, что прибор будет без брака равна 0,9. Найти наивероятнейшее число приборов с браком и вероятность этого наивероятнейшего числа.

10) Вероятность того, что покупателю магазина потребуется обувь 37 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что доля покупателей, которым необходим 37 размер, отклонится от вероятности этого события по модулю не более чем на 0,4, если в магазине ожидается 8000 покупателей.

11) В партии, насчитывающей 50 изделий имеется шесть бракованных. Случайно из неё отобрали три изделия. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X - числа бракованных изделий; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ a(3x-x^2), & 0<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$

Требуется:1) найти параметр a; 2) найти функцию $F(x)$; 3) вычислить вероятность того, что в трех испытаниях величина примет значение из интервала $(1;2)$.

13) Случайная величина X – ошибка измерения некоторым прибором распределена по нормальному закону с $\sigma(X)=3$мк. Систематическая ошибка прибора отсутствует. $M(X)=0$. Найти вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного из них окажется в интервале $(0;2,4)$.

14) Сколько следует проверить изделий, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности годной детали, равной 0,9, не превысит 0,01.

Вариант №17

1) В книге 50 страниц. Найти вероятность того, что номер наугад открытой страницы будет кратен 8.

2) Из последовательности чисел 1, 2, 3, …10 наугад выбирают два числа. Найти вероятность того, что одно из них меньше 6, а другое больше.

3) Два лица условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами и договорились, что пришедший первым ждет другого в течении 10 минут, после чего уходит. Найти вероятность их встречи, если приход каждого в течение указанного часа может произойти в любое время и моменты прихода независимы.

4) В партии, содержащей 20 радиоприемников, имеется три неисправных. Наудачу отобрали три приемника. Найти вероятность того, что а) отобрали только исправные радиоприемники; б) отобрали только неисправные.

5) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

6) Вероятность того, что противник находится на обстреливаемом участке равна 0,7, Вероятность попадания в этом случае равна 0,6. Для поражения достаточно одного попадания. Найти вероятность поражения при двух выстрелах.

7) На карточках написаны числа от 20 до 30. Извлекают сначала одну карточку, а потом другую (без возвращения). Найти вероятность того, что число на второй карточке будет четным.

8) Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной и той же мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого равна 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

9) Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного из них (безразлично какого) в течении года равна 0,001. Какова вероятность отказа а) двух элементов; б) не менее двух элементов в год.

10) С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Определить сколько следует взять изделий, чтобы с вероятностью 0,997 можно было утверждать, что частота изделий первого сорта отличается от наиболее вероятного их числа по модулю не более чем на 2?

11) А.А. Марков при статистическом исследовании языка «Евгения Онегина» установил, что частость гласных букв составляет 0,45. Кроме того, вероятность, что после гласной будет следовать гласная, составляет 0,128, а вероятность, что после гласной будет следовать согласная 0,872. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – числа гласных букв среди двух последовательно расположенных букв; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Непрерывная случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ c/x^8, & x\geq 1\end{cases}.$$

Требуется: 1) Найти параметр c; 2) Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;3)) найти функцию $F(x)$.

13) Случайное отклонение X размера детали от номинала распределено по нормальному закону с $M(X)=0$ и $\sigma(X)=5$мк. Каким должен быть допуск, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получилась деталь с контролируемым размером вне поля допуска?

14) Среднее число пассажиров скорого поезда равно 620. Оценить вероятность того, что в наудачу взятом скором поезде пассажиров окажется более 630.

Вариант №18

1) Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет четным.

2) Колода из 52 игральных карт делится наугад на две равные части. Найти вероятность того, что в одной из частей будет ровно один туз.

3) Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см. На плоскость наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

4) Два биатлониста произвели по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для каждого биатлониста соответственно равны 0,9 и $5/6$. Найти вероятность того, что цель не поражена.

5) В одном ящике 6 белых и 4 черных шара, в другом 8 белых и 2 черных. Из каждого ящика наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что а) хотя бы один шар среди извлеченных белый; б) только один белый.

6) Деталь проходит четыре операции обработки. Вероятность получения брака при первой обработке равна 0,01, при второй – 0,02, при третьей – 0,03, при четвертой – 0,02. Найти вероятность получения детали без брака после четырех операций, предполагая, что события получения брака на отдельных операциях являются независимыми.

7) В ящике 20 деталей, изготовленных на заводе №1 и 40 деталей – на заводе №2. На первом заводе брак составляет 5%, на втором – 10%. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь будет не бракованной.

8) В девять одинаковых закрытых урн помещено по десять шаров, различающихся только цветом. В две урны положено по пять белых шаров; в три урны – по четыре белых шара; в

четыре урны – по три белых шара. Из какой-то одной урны нажатием кнопки выброшен шар, оказавшийся белым. Найти вероятность того, что эта урна содержала три белых шара.

9) Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течении часа равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Найти вероятность того, что в течении часа позвонят пять абонентов.

10) Медиками установлено, что 94% лиц, которым сделаны прививки против туберкулеза, приобретают иммунитет против этого заболевания. Какова вероятность того, что среди 10000 граждан, получивших прививки менее 1000 не будут защищены от этого заболевания.

11) Некто решил играть в кости до первого выигрыша, но не более пяти раз, на следующих условиях: если выпадет шестерка, он получает 5 долларов, а если другое число он платит один доллар. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – суммарного выигрыша; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом: $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$

Требуется: 1) найти функцию $f(x)$; 2) вычислить вероятность того, что при двух испытаниях величина хотя бы раз примет значение из интервала $(2;\ 2{,}5)$; 3) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Детали, выпускаемые цехом, считаются высшего качества, если отклонения их размера от номинала не превосходят по абсолютной величине 2,6 мм. Случайное отклонение размера детали от номинала подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением равным 2 мм. Систематические ошибки отсутствуют ($M(X)=0$). Определить среднее число деталей высшего качества среди наудачу выбранных пяти деталей.

14) Длина изготовляемых деталей представляет случайную величину, среднее значение которой равно 50мм. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,2мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от средней длины по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Вариант №19

1) Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают одну. Найти вероятность того, что будет извлечена фигура любой масти. Замечание: под фигурой понимают даму, валета, короля.

2) На один ряд, состоящий из семи мест, случайным образом рассаживаются семь студентов. Найти вероятность того, что два друга окажутся рядом.

3) На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусов 5 см и 10 см. Найти вероятность того, что точка брошенная в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения.

4) На шести карточках написаны буквы *В, Д, З, О, Х, У*. После перетасовки вынимают наугад по одной шесть карточек с последующим их возвращением. Каждая из букв на вынутой карточки записывается. Найти вероятность того, что записано слово «ВОЗДУХ».

5) Три охотника одновременно выстрелили по одному волку. Вероятность попадания каждого из охотников одинакова и равна 0,4. Определить вероятность того, что волк будет убит, если для этого достаточно одного попадания.

6) Числитель и знаменатель рациональной дроби написаны наудачу. Какова вероятность того, что эта дробь несократима на пять?

7) На карточках написаны цифры от 0 до 9. Наудачу извлекают сначала одну, а потом другую карточку (без возвращения). Найти вероятность того, число на второй извлеченной карточке будет нечетным.

8) Счетчик регистрирует частицы трех типов – *A*, *B*, *C*. Вероятности появления этих частиц $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}3$. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями 0,8; 0,2; 0,4. Счетчик уловил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа *B*.

9) В принятой партии хлопка число длинных волокон составляет 30% от общего числа волокон. Найти вероятность того, что в пучке из семи волокон четыре окажутся длинными.

10) Из каждого десятка деталей две оказываются с дефектами. Найти вероятность того, что среди 50 наудачу взятых деталей без дефекта будет большинство.

11) На пути движения автомобиля пять светофоров, каждый из которых разрешает или запрещает проезд с вероятностью 0,5. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \le x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

Требуется: 1) найти функцию $f(x)$; 2) вычислить вероятность события $\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}$; 3) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

13) Какова вероятность того, что нормально распределенная случайная величина со средним значением равным 1 и дисперсией равной 4, примет значение меньшее 5, но больше 0. Составить функцию плотности распределения вероятностей этой случайной величины.

14) Дисперсия каждой из 30000 независимых случайных величин не превышает шести. Какой должна быть верхняя граница абсолютной величины отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий, чтобы вероятность такого отклонения превышала 0,92?

Вариант №20

1) Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков равно 8.

2) Для выполнения упражнений по перетягиванию каната 12 участников разбились на две команды по шесть человек в каждой. Найти вероятность того, что два наиболее сильных спортсмена окажутся в одной команде.

3) Два студента условились встретиться в определенном месте между 20 и21 часами. Пришедший первым ждет второго в течении $\frac{1}{4}$ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода.

4) Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в том случае, если промахнулся предыдущий. Вероятность попадания для первого охотника равна 0,6, для второго – 0,7,

для третьего – 0,8, для четвертого – 0,8. Найти вероятность того, что будет произведено а) один выстрел; б) два; в) три; г) четыре выстрела.

5) . Биатлонист производит четыре выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что цель поражена а) всеми выстрелами; б) одним выстрелом; в) только вторым выстрелом.

6) Минное заграждение поставлено в четыре линии. Вероятность подрыва корабля идущего без мер предосторожности на первой линии равна 0,6, на второй – 0,75, на третьей – 0,7, на четвертой – 0,65. Найти вероятность подрыва корабля при форсировании минного поля.

7) В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена одна стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь стандартная, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

8) Четыре стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4; для второго – 0,6; для третьего – 0,7; для четвертого – 0,8. После стрельбы в мишени обнаружены три пробоины. Найти вероятность того, что промахнулся четвертый стрелок.

9) Вероятность, для данного баскетболиста забросить мяч в корзину при броске равна 0,3. Произведено 12 бросков. Какова вероятность наивероятнейшего числа попаданий.

10) ОТК проверяет 900 деталей на стандартность. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,8. Найти с вероятностью 0,9544 границы, в которых будет заключено число стандартных деталей среди проверенных.

11) Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. Требуется: 1) составить закон распределения случайной величины X – общего числа попаданий; 2) построить график распределения; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

12) Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(4x-x^2\right), & 0\le x\le 2 \\ 0, \quad x<0, & x>2 \end{cases}$$

Требуется:1) найти параметр a; 2) найти функцию $F(x)$; 3) вычислить вероятность события $0<X<1$; 4) вычислить $M(X),\ D(X)$.

13) Случайная величина X распределена по нормальному закону со средним значением равным 40 и дисперсией равной 200. Вычислить вероятность попадания этой величины в интервал $(30;80)$. Написать функцию $f(x)$.

14) Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,04. Какое наименьшее число деталей следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,88 можно было утверждать, что доля нестандартных деталей среди них будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной детали по абсолютной величине не более чем на 0,02?

Типовой расчет №2

Вариант 1

1. Дано распределение абонентов по потребляемой мощности электроэнергии (кВт.-ч.)

Интервалы	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45

мощности								
Число вероятность	3	13	70	190	290	230	130	62

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии и эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X — потребляемой мощности электроэнергии; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию распределения и функцию плотности X. Найти интервальные оценки параметров распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95, 8) Проверить, используя критерий χ^2- гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв за уровень значимости 0,05.

2. Туристическая компания предлагает места в гостиницах. Менеджера компании интересует, насколько возрастает привлекательность гостиницы в зависимости от ее расстояния до пляжа. С этой целью по 12 гостиницам города была выяснена среднегодовая наполняемость номеров и расстояния в километрах от пляжа.

Расстояние, км	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8
Наполняемость, %	92	95	96	90	89	86	90	83	85	80	78	76

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз о наполняемости номеров гостиницы, если она будет расположена на расстоянии 1,1 км от пляжа.

Вариант 2

1. Приводится распределение волокон хлопка по их длине (в мм).

Длина волокон	Число волокон
5-8	0
8-11	27
11-14	60
14-17	85
17-20	108
20-23	127
23-26	153
26-29	172
29-32	146
32-35	82
35-38	33
38-41	9
41-44	4

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины - длины волокон хлопка; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения её, найти интервальные оценки параметров распределения X приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв за уровень значимости 0,05.

2. Компанию по прокату автомобилей интересует зависимость между пробегом автомобилей (X тыс.км) и стоимостью ежемесячного технического обслуживания (Y). Для выяснения характера этой связи было отобрано 15 автомобилей.

X	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	13	16	15	20	19	21	26	24	30	32	30	35	34	40	39

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз стоимости ежемесячного технического обслуживания автомобиля, пробег которого 22 тыс.км.

Вариант 3

1. Испытывалась чувствительность второго канала телевизоров. Данные испытаний указаны в следующей таблице, где в первой строке даны интервалы чувствительности (в мкр.в.), во второй - число телевизоров n_i чувствительность которых оказалась в данном интервале.

интевал	n_i
75-125	1
125-175	10
175-225	11
225-275	11
275-325	12
325-375	17
375-425	10
425-475	8
475-525	9
525-575	1

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - чувствительности второго канала телевизоров; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения;7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95;

проверить, используя критерий χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв уровень значимости, равным 0,05.

2. Врач-исследователь выясняет зависимость площади пораженной части легких, заболевших эмфиземой легких, от числа лет курения. Статистические данные имеют следующий вид:

Число лет курения	25	36	22	15	48	39	42	31	28	33
Площадь пораженной части легкого,%	55	60	50	30	75	70	70	55	30	35

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз о степени поражения легких у случайно выбранного пациента, больного эмфиземой, если человек курил 30 лет.

Вариант 4

1. В ОТК были измерены диаметры валиков из партии, изготовленной одним станком-автоматом. Отклонения измеренных диаметров от номинала даны в следующей таблице (в микронах):

Границы отклонений	число валиков
-20-(-15)	7
-15-(-10)	11
-10-(-5)	15
-5-0	24
0-5	49
5-10	41
10-15	26
15-20	17
20-25	7
25-30	3

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Компания занимающаяся продажей радиоаппаратуры, установила на видеомагнитофон определенной модели цену, дифференцированную по регионам.

Следующие данные показывают цены на видеомагнитофон в 8 различных регионах и соответствующее им число продаж.

Число продаж, шт.	420	380	350	400	440	380	450	420
Цена, тыс.сом	5,5	6,0	6,5	6,0	5,0	6,5	4,5	5,0

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Сделать прогноз стоимости видеомагнитофона в регионе, если объем продаж составил 460 шт.

Вариант 5

1. Приводится распределение урожайности ржи (в ц/га) на различных участках поля некоторого хозяйства:

Урожайность (ц/га)	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27
Доля участка (в% к общей посевной площади)	5	15	33	23	17	7

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Опрос случайно выбранных 10 студентов, проживающих в общежитии университета, позволяет выявить зависимость между средним баллом по результатам предыдущей сессии и числом часов в неделю, затраченных студентом на самостоятельную подготовку.

Средний балл	4,6	4,3	3,8	3,8	4,2	4,3	3,8	4,0	3,1	3,9
Число часов	25	22	9	15	15	30	20	30	10	17

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Если студент занимается самостоятельно по 12 часов в неделю, то каков прогноз его успеваемости?

Вариант 6

1. С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено измерение дальности (в м). Результаты представлены в следующей таблице:

Дальность (в м)	Число измерений
560-570	6
570-580	27
580-590	45
590-600	72
600-610	78
610-620	43
620-630	29
630-640	14
640-650	8
650-660	3

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Некоторая компания провела рекламную кампанию в магазинах с демонстрацией антисептических качеств своего нового моющего средства. Через 10 недель компания решила проанализировать эффективность этого вида рекламы, сопоставив еженедельные объемы продаж с расходами на рекламу (тыс. сом).

Объем продаж, тыс.сом	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90
Расходы на рекламу, тыс. сом	5	8	6	5	3	9	12	4	3	10

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0{,}05$. Сделать прогноз объема продаж, если расходы на рекламу составили 11 тыс. сом.

Вариант 7

1. Приводятся данные отклонения бомбы по дальности от центра цели:

Отклонение (в м)	Количество отклонений
-500-(-400)	4
-400-(-300)	12
-300-(-200)	28
-200-(-100)	56

-100-0	100
0-100	96
100-200	60
200-300	32
300-400	8
400-500	4

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеется выборка из 10 домохозяйств для изучения связи между числом телевизоров в домохозяйстве и числом членов домохозяйства. X - число членов домохозяйства; Y - число телевизоров.

X	6	2	4	3	4	4	6	3	2	2
Y	4	1	3	2	2	3	4	1	2	2

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз количества телевизоров домохозяйства, состоящего из 8 человек.

Вариант 8

1. Приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных студентов:

Рост (в см)	Число студентов
154-158	10
158-160	14
160-162	26
162-164	28
164-166	30
166-168	40
168-170	50
170-174	28
174-178	20
178-180	8

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются выборочные данные о стаже работы (X, лет) и выработке одного рабочего за смену (Y, шт.).

X	1	3	4	5	6	7
Y	14	15	18	20	22	25

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз о выработке рабочего, имеющего стаж работы 10 лет.

Вариант 9

1. Дано распределение скорости автомобилей на одном участке шоссе (км/ч):

Скорость (км/ч)	Число автомобилей
61-65	5
65-69	8
69-73	12
73-77	17
77-81	20
81-85	35
85-89	28
89-93	11
93-97	8
97-101	5

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Изучается зависимость себестоимости единицы изделия (Y, тыс.сом) от величины выпуска продукции (X , тыс. шт.) по группам предприятий за отчетный период. Экономист обследовал 5 предприятий и получил следующие данные:

X	2	3	4	5	6
Y	1,9	1,7	1,8	1,6	1,4

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз о себестоимости единицы изделия, если выпуск продукции составит 8 тыс.штук.

Вариант 10

1. Приводится суммарное число набранных баллов командами в соревнованиях:

Число баллов	Число команд
49-52	3
52-55	6
55-58	11
58-61	19
61-64	30
64-67	23
67-70	12

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются выборочные данные о глубине вспашки полей под озимые культуры (X , см) и их урожайности (Y , ц/га):

X	10	15	20	25	30
Y	5	10	16	20	24

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз об урожайности пшеницы при глубине вспашки 22 см.

Вариант 11

1. Дано распределение предела прочности образцов сварного шва (Н/мм^2):

Предел прочности	частота
28-30	8
30-32	12
32-34	15
34-36	20
36-38	15
38-40	10
40-42	6
42-44	3

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Из студентов 4-го курса естественно-технического факультета КРСУ отобраны случайным образом 10 студентов и подсчитаны средние оценки, полученные ими на первом (X) и на четвертом (Y) курсе. Получены следующие данные:

X	3,5	4,0	3,8	4,6	3,9	3,0	3,5	3,9	4,5	4,1
Y	4,2	3,9	3,8	4,5	4,2	3,4	3,8	3,9	4,6	3,0

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз средней оценки, полученной студентом на четвертом курсе, если на первом курсе его средняя оценка 4,3.

Вариант 12

1. Распределение отклонений напряжения от номинала (мв):

отклонение	частота
0.00-0.02	9
0.02-0.04	15
0.04-0.06	29

0.06-0.08	35
0.08-0.10	32
0.10-0.12	19
0.12-0.14	8
0.14-0.16	3

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются данные о связи между возрастом самолета (X , лет) и стоимостью его эксплуатации (Y млн. сом):

X	1	2	3	4	5
Y	2	4	5	8	10

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Сделать прогноз стоимости эксплуатации самолета, если его возраст 2,5 года.

Вариант 13

1. Приводится время выполнения упражнения (в с.) учениками

интервал	Кол-во учеников
8.95-9.05	4
9.05-9.15	8
9.15-9.25	10
9.25-9.35	8
9.35-9.45	6
9.45-55	4
9.55-9.65	3
9.65-9.75	1

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Исследована зависимость объема выпуска продукции (X, тыс.шт.) и себестоимости единицы изделия (Y, тыс.сом). Получены следующие данные:

X	3	4	5	6	7
Y	10	8	7	5	2

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.
Сделать прогноз себестоимости единицы изделия, если объем выпуска продукции составит 8,5 тыс.штук.

Вариант 14

1. Горизонтальное отклонение от цели (м) при испытании ракет приведено в следующей таблице:

Отклонение	Кол-во ракет
-40-(-30)	7
-30-(-20)	11
-20-(-10)	15
-10-0	24
0-10	49
10-20	41
20-30	26
30-40	17
40-50	7
50-60	3

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются выборочные данные об общем весе некоторого растения (X, г.) и весе его семян (Y, г.). Данные приведены в таблице:

X	40	50	60	70	80	90	100
Y	2	2,5	2,8	3	3,5	4	4,5

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Сделать прогноз веса некоторого растения, если вес его семян 4,4 г.

Вариант 15

1. Приводится распределение рабочих по зарплате за смену:

Зарплата (в усл.ден.ед.)	Число рабочих
230-240	24
240-250	33
250-260	40
260-270	50
270-280	60
280-290	120
290-300	180
300-310	58
310-320	30
320-330	15

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. При исследовании зависимости времени, затраченного на закрепление детали на токарном станке, от веса детали, получены следующие результаты (X - вес детали, кг, Y - время закрепления детали, с.):

X	7	8	10	12	13	14	15	17	18	20
Y	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Сделать прогноз о времени, затраченного на закрепление детали на станке, если ее вес 22 кг.

Вариант 16

1. Дано распределение нитей пряжи по крепость нитей (г):

Крепости нитей (г)	Кол-во нитей
170-180	9
180-190	52
190-200	84
200-210	128
210-220	187
220-230	225
230-240	174
240-250	107
250-260	34
260-270	5

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются следующие выборочные данные о стоимости квартир (Y) и их общей площади (X) в городе N:

X	33	40	36	60	55	80	95	70	48	53	95	63
Y	13,8	13,8	14	22,5	24	28	32	20,9	22	21,5	32,5	24

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Сделать прогноз стоимости квартиры, если ее площадь 56,4 м^2.

Вариант 17

1. Дано распределение рабочих по времени, затрачиваемого одним рабочим на изготовление одной детали.

Время (мин)	Число рабочих

2-4	1
4-6	4
6-8	23
8-10	33
10-12	20
12-14	17
14-16	2

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются следующие выборочные данные о жесткости воды (Y, град.) и количеством кальция в воде X (г/л):

X	28	56	77	191	241	262
Y	4	8	11	27	34	37

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз жесткости воды с содержанием кальция 250 мг/л.

Вариант 18

1. Даны результаты испытания стойкости удлиненных сверл диаметром 4 мм (ч.):

стойкость	Кол-во сверл
2.6-2.8	7
2.8-3.0	10
3.0-3.2	49
3.2-3.4	70
3.4-3.6	46
3.6-3.8	10
3.8-4.0	8

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика;

6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Исследуется зависимость между пределом прочности прессованной детали Y (МПа) и температурой при прессовании X (град.). Экспериментальные данные, представлены в таблице:

X	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165
Y	110	107	105	98	100	95	95	92	86	86

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0{,}05$.

Сделать прогноз предела прочности детали, если температура прессования 170 град.

Вариант 19

1. Даны результаты определения содержания фосфора в чугунных образцах:

Содержание фосфора (%)	Число образцов
0.10-0.20	5
0.2-0.3	23
0.3-0.4	38
0.4-0.5	25
0.5-0.6	5
0.6-0.7	4
0.7-0.8	2

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. Имеются данные о фондовооруженности предприятия X (тыс.сом) и производительности труда Y (тыс.сом).

X	20,7	22,8	18,7	16,5	14,7	11,3	18,8	13,4	9,5	11,8
Y	10,5	10,6	9,5	7,6	6,4	4,5	9	6,8	4,9	6,1

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$. Сделать прогноз о производительности труда, если фондовооруженность предприятия составляет 20 тыс.сом.

Вариант 20

1. Приводятся данные о среднесуточном пробеге автомобилей (в сотнях км):

Пробег	Число автомобилей
1.0-1.2	2
1.2-1.4	5
1.4-1.6	20
1.6-1.8	48
1.8-2.0	19
2.0-2.2	5
2.2-2.4	1

Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - размера диаметра валика; 6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

2. В таблице приведены результаты изучения зависимости себестоимости единицы продукции (*Y*, тыс.руб.) от величины выпуска продукции (*X*, тыс.штук) по разным предприятиям отрасли.

X	2	3	4	5	6	7	8
Y	1,9	1,7	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$.

Сделать прогноз себестоимости единицы изделия, если выпуск продукции составит 10 тыс.штук.

ПРИЛОЖЕНИЕ №4

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задание 1. Найти AB, где $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Задание 2. Найти решение системы по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,\\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3,\\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1,\\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Задание 4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -4 & -6 & 2 & -4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Задание 5. Определить модули суммы и разности векторов $\overline{a}=(3;-5;8)$ и $\overline{b}=(-1;1;-4)$.

Задание 6. Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=2$ и $|\overline{c}|=6$, определить модуль вектора $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

Задание 7. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;1;2)$, $B(2;3;3)$ и $C(1;2;-1)$

Задание 8. При каком значении λ векторы $\overline{a}=(1;1;\lambda)$, $\overline{b}=(0;1;0)$ и $\overline{c}=(3;0;1)$ компланарны?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+9}{5n^3-7n+5}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+5}\right)^{-n^2}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{3x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^2+x-14}$
5. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{6-\sqrt{x^2+20}}{3x+12}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(8x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$
7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{arctg(15-5x)}{2x^2+3x-27}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+15x)}{e^{-3x}-1}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{8^{x+6}-8^3}{e^{2x+6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

   1. $y=\dfrac{8}{x^3}-4\sqrt{x^3}+2x^7$
   2. $y=\dfrac{3\arcsin x-e^x}{5\log_3 x+6x^2}$
   3. $y=\ln\cos(2x+5)$
   4. $y=\left(x^3+1\right)^{tgx}$
   5. $y=\left(6\ln x-5^x\right)\left(15+7\sin x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arcctg6t, \\ y=2t^3-9t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, экстремум функции:

$$y=x^3-9x^2+15x-3$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

1. $\int x\sqrt{5-x^2}dx$.
2. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$
3. $\int\dfrac{3x^2+x^5e^x-4}{x^5}dx$
4. $\int(3x-2)\cos 2x\,dx$
5. $\int\dfrac{x^3-8x-14}{(x+2)(x-4)}dx$
6. $\int\dfrac{dx}{3+2\cos x}$

2 СЕМЕСТР

Контрольная работа № 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos\phi$.
4. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln(x^2 - 1), \quad 3 \le x \le 4$
5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 2$.
6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\cos\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi / 6$.
7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = x$.

Контрольная работа № 2

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x, y)dy$.
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = xy$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Контрольная работа №3

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $L\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, где L: $r = 2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(2xy + y^2\right)dx + \left(3x^2 + 2y + 1\right)dy$. Контур L: $x = 0$, $y = 4$, $y = x^2$

3. Вычислить криволинейный интеграл по координатам $\oint y^3 dx + xydy$ где L – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$.

3 СЕМЕСТР

Контрольная работа № 1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $f(x)=\frac{\pi}{2}-x, \quad 0\le x\le\pi$

Контрольная работа № 2

1. Найти производную скалярного поля $u=x^2+4x^3y+5xz-z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2+4xz+5xy-yz^2$ в точке $M_0(-1;-2;0)$ и его модуль.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M)=x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(2x-y+2z)\overline{k}$;р: $x+2y+z=2$

4. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(x-z)\overline{i}-y\,\overline{j}+(y+z)\overline{k}$.

5. Проверить является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}(M)$ найти его потенциал.

$\overline{a}(M) = (2x - 4yz)\overline{i} + (2y - 4xz)\overline{j} + (2z - 4xy)\overline{k}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Найти общий интеграл ДУ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Найти общий интеграл ДУ $y' = 2 - \dfrac{x}{y}$.
3. Найти общее решение ДУ $y' + \dfrac{2}{x}y = x$.
4. Решите ДУ $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$.
5. Решите ДУ $\left(y^2 - e^x \cos y\right)dx + \left(2xy + e^x \sin y\right)dy = 0.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

1. Найти общее решение ДУ $y''' x \ln x = y''$.
2. Найти решение задачи Коши $4y^3 y'' = y^4 - 1,$ $y(0) = 2^{1/2}$, $y'(0) = 1/(2^{3/2})$
3. Найти общее решение ДУ $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.
4. Найти решение задачи Коши $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x,$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = 0.$
5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений методом исключения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

4 СЕМЕСТР

Контрольная работа №1

1**.** Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 5X - 2Y$, если известны: $M(X) = 3, \quad M(Y) = 6, \quad D(X) = 3, \quad D(Y) = 4$.

2 Производится ряд выстрелов по мишени с вероятностью попадания 0,7 при каждом выстреле; стрельба ведется до первого попадания в мишень, но не свыше 3 выстрелов. Составить закон распределения числа произведенных выстрелов.

3. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

x_i	2	3	5
p_i	0,2	p_2	0,2

Найти $p_2, M(X), D(X)$.

4. Случайная величина задана законом распределения: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{x^2 - 4}{a}, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Требуется: 1) найти параметр *a*; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что величина примет значение из интервала $(2{,}5;3)$ 4) найти математическое ожидание и дисперсию.

Контрольная работа №2

Задание 1. Выборочное исследование длительности горения ламп дало следующие результаты:

Интервалы	0-400	400-800	800 -1200	1200 -1600	1600 – 2000	2000 – 2400	2400 -2800
Частота	121	95	76	56	45	36	21

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.

Задание 2. В итоге 5 измерений получены следующие положительные отклонения от номинального размера у партии деталей (в мм): 17, 8, 23, 9, 23. Найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии. Вычислить моду и медиану.

Задание 3. Телефонная компания желает оценить среднее время междугородных переговоров в течении выходных, когда действует льготный тариф. Случайная выборка из 50 звонков дала среднюю $\bar{x} = 14.5$ мин со средним квадратическим отклонением $s = 5.6$ мин. Постройте 95% доверительный интервал для средней продолжительности переговоров в выходные дни.

Задание 4. Используя критерий χ^2, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки:

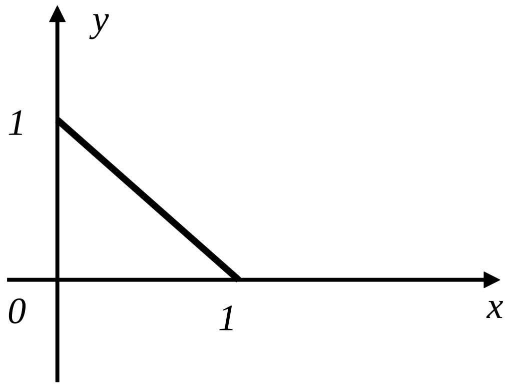
Эмпирическая частота n_i	58	96	239	328	147	132
Теоретическая частота n_i'	43	120	245	290	200	102

Задание 5. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и выборочный коэффициент корреляции. Сделать вывод о силе связи.

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2

1 СЕМЕСТР

Образец теста: "Аналитическая геометрия"

Задание №1		
Уравнение прямой, изображенной на рисунке, имеет вид ... 		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$x+y=1$
2)		$x=1$
3)		$y=1$
4)		$x-y-1=0$

Задание №2				
Установить соответствие между уравнением кривой и ее названием				
Укажите соответствие для всех 4 вариантов ответа:				
1)		эллипс	1)	$x^2+4y^2=16$
2)		окружность	2)	$4x^2-y^2=16$
3)		парабола	3)	$x^2=4y$
4)		гипербола	4)	$x^2+y^2+2y=0$

Задание №3		
Установить, какая линия определяется уравнением $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости
2)		половина гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости
3)		половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости
4)		половина гиперболы, расположенная в нижней полуплоскости

Задание №4

Написать уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(3;-3;4)$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{7}$
2)		$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-3}{1}$
3)		$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{4}$
4)		$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{7}$

Задание №5		
Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$(1;3;2)$
2)		$(2;-1;3)$
3)		$(2;-3;6)$
4)		$(4;6;1)$

Задание №6		
Даны концы $A(3;4)$ и $B(5;2)$ однородного стержня. Определить координаты его центра тяжести.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		(8;6)
2)		(-2; 2)
3)		(4; 3)
4)		(-1;1)

Задание №7		
Прямые $y-2x-10=0$ и $3y-6x+2=0\ldots$		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		пересекаются не под 90^0
2)		совпадают
3)		перпендикулярны
4)		параллельны

Задание №8

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$ и образующей с осью Ox 45^0		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$y=x+3$
2)		$y=-x-3$
3)		$-2x+y=0$
4)		$x-2y-1=0$

Задание №9		
Найти угол между плоскостями $2x-y+3z+1=0$ и $4x-2y+6z+7=0$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		0^0
2)		90^0
3)		45^0
4)		30^0

Задание №10		
Определите координаты центра и радиус сферы, заданной следующим уравнением $x^2+y^2+z^2+4z=0$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$O(0;0;2)$, $r=2$
2)		$O(0;0;-2)$, $r=2$
3)		$O(0;0;2)$, $r=4$
4)		$O(0;0;-2)$, $r=-4$

Образец теста: «Пределы»

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

Ответы:

1) -4; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 1; 3) $e^{\frac{1}{3}}$; 4) e^3.

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+2}\right)^2$$

Ответы:

1) $-\frac{1}{7}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{4}{25}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

Ответы:

1) 0; 2) -1; 3) a; 4) 1.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{7}{3}$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) ∞; 4) $\frac{4}{3}$

КОПТ № 3 «Дифференцирование функций»

Вариант 1

Найти производные:

1) $y=\frac{3x+\sin x}{\cos x-10}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=-\frac{3+\cos x}{\sin x}$; б) $y'=\frac{3-\cos x}{\sin^3 x}$;

в) $y'=\frac{3x\sin x-7\cos x-29}{(\cos x-10)^2}$; г) $y'=\frac{\cos 2x-3x\sin x-7\cos x-30}{(\cos x-10)^2}$.

2) $y=\ln^4(2x+1)$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=8\ln^3(2x+1)$; б) $y'=\dfrac{8\ln^3(2x+1)}{2x+1}$;

в) $y'=\dfrac{8}{(2x+1)^3}$; г) $y'=8\ln(2x+1)\cdot 2$.

3) $x^3+\ln y-x^2e^y=0$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=(2xye^y-3x^2)y\dfrac{1}{x^2ye^y}$; б) $y'=(2xye^y-3x^xy)y\dfrac{1}{1-x^2ye^y}$;

в) $y'=(2xye^y-3x^2y)\cdot\dfrac{1}{1-x^2ye^y}$; г) $y'=\dfrac{2xye^y-3x^2}{1-xye^y}\cdot y$.

4) $y=(2tg3x+1)^{\sin 3x}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x}\cos 3x$;

б) $y'=[3\cos 3x\ln(2tg3x+1)+\dfrac{6\sin 3x\sec^2 3x}{2tg3x+1}]\cdot(2tg3x+1)^{\sin 3x}$;

в) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x}\cdot\ln(2tg3x+1)$;

г) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x-1}\cdot\cos 3x\cdot 3$.

5) $y=2x^4-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+1$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}$; б) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^4}$;

в) $y'=8x^3+\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$; г) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}+1$.

6) $y=(x+x^3)\cdot arctgx$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=(1+3x^2)arctgx+x$; б) $y'=\dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$;

в) $y'=3x^2arctgx+x$; г) $y'=(1+3x^2)\cdot(1+x^2)$.

7) $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=3t^5+5t^3+1 \end{cases}$. Найти y''_x .

Ответы:

а) $y''_x=\dfrac{10t}{3t^2-1}$; б) $y''_x=\dfrac{10t}{3t^2+t}$;

в) $y''_x=\dfrac{10t}{3t^2+3}$; г) $y''_x=-\dfrac{10t}{3t^2-3}$.

8) $y=7^{2x}+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y'=7^x\ln 7\cdot 2+\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$; б) $y'=x\cdot 7^{x-1}+\frac{2}{5}x^{\frac{1}{5}}$;

в) $y'=7^{2x}\ln 7\cdot 2-\frac{8}{5x\sqrt[5]{x^2}}$; г) $y'=7^x\ln 7+x\cdot 7^{x-1}+\frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}$.

2 СЕМЕСТР

КОПТ № 1
«Определенный интеграл и его приложения»

Вариант №1

1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^{a\sqrt{3}}\frac{dx}{a^2+x^2}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{a}$; б) $\frac{3\pi}{2a}$; в) $\frac{\pi}{12a}$; г) $\frac{\pi}{12}$.

2. Вычислить $\int\limits_0^1\ln(x+1)dx$.

Ответы: а) $2\ln 2-1$; б) $2\ln 2$; в) $1-2\ln 2$; г) 1.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}tg^3xdx$.

Ответы: а) 1; б) $\frac{\ln 2}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1-\ln 2}{2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x^2$.

Ответы: а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{8}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $y=0$, $0\le t\le 2\pi$.

Ответы: а) $3\pi a^2$; б) πa^2; в) πa^2; г) $\frac{\pi}{2}a^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1-\cos\phi)$.

Ответы: а) $2\pi a^2$; б) $\frac{5}{2}\pi a^2$; в) $3\pi a^2$; г) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2=\left(x+4\right)^3$, $x=0$

Ответы: а) 32π; б) 64π; в) $\frac{15}{2}\pi$; г) 4π.

8. Вычислить длину дуги линии $y = \ln\sin x$ от точки с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln 3$; б) $\ln 2$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\frac{\pi^2 a}{8}$; б) $\frac{\pi\ a}{8}$; в) $\frac{\pi a^2}{32}$; г) $\frac{a\pi^2}{32}$.

10. Вычислить длину дуги линии $r = a\sin^3\frac{\phi}{3}$

Ответы: а) $3\pi a$; б) $\frac{\pi a}{2}$; в) πa; г) $\frac{3\pi a}{2}$.

КОПТ № 2

по разделу «Функции нескольких переменных»

Вариант 1

1. ***Найти область определения функции***

$$z = \frac{2x+3y-1}{x-y} + \ln\left(x-y\right)$$

Ответы:

а) $x \ge 0$; $y \ge 0$;

б) $x > y$;

в) $x \ne y$;

г) $x \ge \frac{1-3y}{2}$.

2. ***Дана функция*** $z = x\ln\frac{y}{x}$. ***Чему равно выражение*** $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1, e)$***?***

Ответы:

а) 1;

б) $\frac{e+1}{e}$;

в) 3;

г) 0.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

Ответы:

а) $z_{\min}(-4;1) = -11$;

б) $z_{\max}(-4;1) = -11$;

в) экстремума нет;

г) нет верного ответа.

4. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции*** $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x - 1$ ***в треугольнике*** $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

Ответы:

а) $z_{наиб} = -2{,}8$, $z_{наим} = -4$;

б) $z_{наиб} = -1$, $z_{наим} = -19$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{наиб} = -1$, $z_{наим} = -10$.

5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ ***для функции*** $z = x^2 y - y^2 x$***, если*** $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases}$

Ответы:

а) $3u^2 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$;

б) $u^2 \sin v \cos v(\cos v - \sin v)$;

в) $-u^2 \cos 2v(\cos v + \sin v)$;

г) $u^2 \cos 2v(u\cos v + \sin v)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 6

ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ

1 СЕМЕСТР

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 1 Дисциплина **Математический анализ**

Билет № 1

1) Матрицы. Виды матриц
2) Функция: определение, способы задания, область определения, четность, нечетность.
3) Даны векторы $\vec{a} = 0,5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $2\vec{b} - \vec{c}$.
4) Установить, какая линия определяется уравнением $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$. Построить ее.
5) Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)}{x^2 - 5x + 6} \qquad \text{б) } \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{e^{4x} - 1}.$$

6) Найти производные функций

$$\text{а) } y = \sin\left(x^3 + 2\ln x\right) + \sqrt{2}, \qquad \text{б) } y = (\cos x)^{5e^x}.$$

7) Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{x7^x - 8 + 4x\cos x}{x} dx, \qquad \text{б) } \int x^2 \cdot \sqrt[3]{2 + 3x^3} dx.$$

2 СЕМЕСТР

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 2 Дисциплина **Математический анализ**

Билет № 1

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его геометрический и физический смыслы.

2. Вычислить $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=5$.
4. Вычислить интеграл $\iint_D y\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями: $x-y=4$, $x=0$, $y=0$.
5. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int_L \sin x\cos^3 x\,dl$, где L: $y=\ln\cos x$ $\left(0\le x\le \pi/3\right)$.
6. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=\dfrac{x+y}{\ln x}$.
7. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-3x^2-2y^2+40$.

3 СЕМЕСТР

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 2 Семестр 3 Дисциплина **Математический анализ**

Билет № 1

1. Признак Даламбера.
2. Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка
3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$.
5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=(x-z)\overline{i}-y\,\overline{j}+(y+z)\overline{k}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{3y^2+1}+\dfrac{dy}{2x-1}=0$
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+y=3\sin 5x+2\cos 5x$

4 СЕМЕСТР
Кыргызко-Российский Славянский Университет

Кафедра Высшей Математики

Курс 2 Семестр 4 Дисциплина ТВМС

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № ___**1**____

1. *(З)* Классическое определение вероятности.
2. *(З)* Интервальное оценивание. Доверительная вероятность. Доверительный интервал.

---

3. *(У)* Бросают две шестигранные игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков – нечетное число.
4. *(У)* На отдельных карточках написаны буквы «и», «л», «о», «с», «ч». После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Вычислите вероятность, что получится слово «число».
5. *(У)* Случайная величина *X* задана законом распределения

X	2	3	?	11
P	0,1	?	0,3	0,2

Известно, что математическое ожидание *X* равно 5,7. Найти а) Найти $P(X=3)$, б) значение *X*, которое она принимает с вероятностью 0,3.

6. *(В)* Случайная величина задана законом распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a(x^2-x), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Вычислить вероятность того, что в двух опытах величина примет значение из интервала (1,5;2).

7. *(В)* Используя критерий χ^2 на уровне значимости 0,01 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности *X* с эмпирическим распределением выборки:

Эмпирическая частота n_i	8	16	40	72	36	18	10
Теоретическая частота n_i'	6	18	36	76	39	18	7

ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАЩИТЫ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ТЕСТОВ

Семестр 1

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет № 1,2,3,4,5 (мах 5 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 1,5**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**1,5 – 3**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**3 – 4**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**4 – 5**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа № 1,2,3,4 (мах 6 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 1,8**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2 – 3,5**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**4 – 5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**5 – 6**

***КОПТ "Аналитическая геометрия"*:** всего заданий в тесте 10. Каждое задание оценивается в 0,6 балла.

КОПТ "Пределы": всего заданий в тесте 6, каждое задание в 1 балла.

КОПТ "Дифференцирование функций одной переменной": всего заданий в тесте 8, из них 5 заданий с уровнем Уметь, 3 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 0,6 балл, задания с уровнем владеть оценивается в 1 балла.

Приложение №7. Шкалы оценивания защиты типовых расчетов, контрольных работ и КОПТ

Семестр 2

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет № 1,2,3,4 (мах 7 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**2 – 4**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**4 – 5,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**5,5 – 7**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа № 1 (мах 8 б)**	**Контрольная работа № 2,3 (мах 7 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 2.5**	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2.5 – 5**	**2 – 4**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**5 – 6.5**	**4 – 5,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**6.5-8**	**5,5 – 7**

КОПТ " Определенные интегралы и их применения": всего заданий в тесте 10, каждое задание в 0,8 балла.

КОПТ " Функции нескольких переменных": всего заданий в тесте 5, из них 3 заданий с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1 балл, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

Приложение №7. Шкалы оценивания защиты типовых расчетов, контрольных работ и КОПТ

Семестр 3

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет № 1,2,3,4 (мах 7 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**2 – 4**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**4 – 5,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**5,5 – 7**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа № 1,3 (мах 8 б)**	**Контрольная работа № 2,4 (мах 7 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 2.5**	**0 – 2**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2.5 – 5**	**2 – 4**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**5 – 6.5**	**4 – 5,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**6.5-8**	**5,5 – 7**

Приложение №7. Шкалы оценивания защиты типовых расчетов, контрольных работ и КОПТ

4-семестр

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет № 1 и №2 (мах 12 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0 – 3**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**3 – 6**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	**7 – 9**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**9 – 12**

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа № 1 (мах 10 б)**	**Контрольная работа № 2 (мах 12 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0 – 2**	**0 – 3**
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2 – 5**	**3 – 6**
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**5 – 7**	**7 – 9**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**7 – 10**	**9 – 12**

КОПТ " Случайные события": всего заданий в тесте 10, каждое задание в 1 балл.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

Название модулей дисциплины согласно РПД	**Контроль**	**Форма контроля**	**зачетный минимум**	**зачетный максимум**	**график контроля**
		Модуль 1			
Модуль 1 . Линейная и векторная алгебра	Текущий контроль	Выполнение ТР №1 (5), посещаемость (1), активность (1) , ДЗ (1)	5	8	4
	Рубежный контроль	Контрольная работа №1	3	6	
		Модуль 2			
Модуль 2. Аналитическая геометрия	Текущий контроль	Выполнение ТР №2(5), посещаемость (1), активность (1) , ДЗ (1)	5	8	7
	Рубежный контроль	КОПТ «Аналитическая геометрия»	3	6	
		Модуль 3			
Модуль 3 . Пределы функции одной переменной	Текущий контроль	Выполнение ТР №3(5), посещаемость (1), активность (1) , ДЗ (1)	5	8	11
	Рубежный контроль	Контрольная работа №2 или КОПТ «Пределы»	3	6	
		Модуль 4			
Модуль 4 . Дифференцир. функций одной переменной	Текущий контроль	Выполнение ТР №4(5), посещаемость (1), активность (1) , ДЗ (1)	5	8	14
	Рубежный контроль	Контрольная работа №3 или КОПТ «Дифференцирование функций»	3	6	
		Модуль 5.			
Модуль 5. Неопределенные интегралы.	Текущий контроль	Выполнение ТР №5(5), посещаемость (1), активность (1) , ДЗ (1)	5	8	17
	Рубежный контроль	Контрольная работа №4 «Неопределенные интегралы»	3	6	
ВСЕГО за семестр					
Промежуточный контроль (Зачет с оценкой			**20**	**30**	
Семестровый рейтинг по дисциплине			**60**	**100**	

Семестр 2

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Определенные интегралы и их применения	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	29
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа №1 «Определенные интегралы и их применения»	4	8	
Модуль 2					
Функции двух и нескольких переменных	Текущий контроль	Защита типового расчета № 2 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	33
	Рубежный контроль	КОПТ «Функции двух и нескольких переменных»	4	7	
Модуль 3					
Кратные интегралы	Текущий контроль	Защита типового расчета № 3 (7), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)	6	10	36
	Рубежный контроль	Контрольная работа №2	4	8	
Модуль 4					
Криволинейные интегралы	Текущий контроль	Защита типового расчета № 4 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	40
	Рубежный контроль	Контрольная работа №3	4	7	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Экзамен)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

Семестр 3

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Ряды	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	5
	Рубежный контроль	Контрольная работа №1	4	8	
Модуль 2					
Теория поля	Текущий контроль	Защита типового расчета № 2 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	9
	Рубежный контроль	Контрольная работа №2	4	7	
Модуль 3					
ДУ первого порядка	Текущий контроль	Защита типового расчета № 3 (7), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)	6	10	12
	Рубежный контроль	Контрольная работа №3	4	8	
Модуль 4					
ДУ высших порядков	Текущий контроль	Защита типового расчета № 4 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	17
	Рубежный контроль	Контрольная работа №4	4	7	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Экзамен)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

Семестр 4

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Теория вероятностей	Текущий контроль	Защита типового расчета № 1 (12), ДЗ (2), КОПТ"Случайные события" (10)	14	24	32
	Рубежный контроль	Контрольная работа №1 "Случайные величины"	6	10	
Модуль 2					
Математическая статистика	Текущий контроль	Защита типового расчета №2 (12), ДЗ (2), посещаемость (5), активность (5)	13	24	38
	Рубежный контроль	Контрольная работа №2 "Математическая статистика"	7	12	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Зачет)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

ПРИЛОЖЕНИЕ № 9

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета №1

Задание 1.Найти матрицу $P=(2A-3B)C$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: $2A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 10 & 6\\ 2 & -8 & 0\end{pmatrix};$

$$3B=3\cdot\begin{pmatrix}0 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 15 & 3 & 18\end{pmatrix};$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}4 & 10 & 6\\ 2 & -8 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 15 & 3 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -9\\ -13 & -11 & -18\end{pmatrix};$$

$$P=(2A-3B)C=\begin{pmatrix}4 & -2 & -9\\ -13 & -11 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot3-2\cdot1-9\cdot7 & 4\cdot(-2)-2\cdot1-9\cdot0\\ -13\cdot3-11\cdot1-18\cdot7 & -13\cdot(-2)-11\cdot1-18\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-53 & -10\\ -176 & 15\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

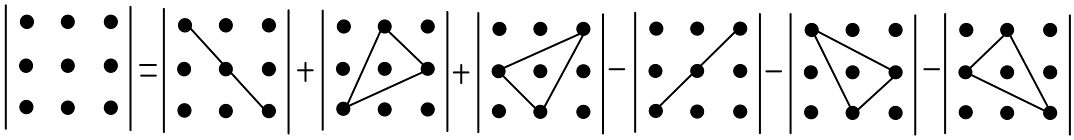
Решение. Разложим определитель, например, по третьей строке, так как в ней один из элементов равен нулю, получим:

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=3A_{31}+3A_{32}+0A_{33}+2A_{34}=$$

$$=3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}+3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}+2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=3(6+18-20-3)-3(6+6+10-18-20-1)-2(12+12-6-4)=$$
$$=3-3(-17)-2(14)=3+51-28=26.$$

Замечание. Здесь и далее для вычисления определителей третьего порядка использована схема



Задание 3. Решить систему уравнений а) с помощью обратной матрицы; б) методом Крамера; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме данная система примет вид: $AX = B$. Решение данного матричного уравнения находится по формуле: $X = A^{-1}B$.

Находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -8-3-8+2=-17.$$

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица.

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4-(-4)=8, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-0)=2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-(-3))=-1, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4-0=4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-6)=10, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-8-3)=11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-0=-1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2-0)=-2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-1=3.$$

Получим обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\\ 10 & 11 & 3\end{pmatrix}.$$

Подставляя значения в формулу $X=A^{-1}B$, получим:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\\ 10 & 11 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ 5\\ 13\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-48+10-13\\ 6+20-26\\ -60+55+39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -2\end{pmatrix},$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

б) Определитель системы $\det A=-17\neq 0$, следовательно, существует единственное решение системы.

Вычислим вспомогательные определители $\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\Delta_{x_3}$, полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}-6 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -1\\ 13 & 4 & -2\end{vmatrix}=-24-13-24+10=-51;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 5 & -1\\ 3 & 13 & -2\end{vmatrix}=20+18-26-12=0;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -6\\ 1 & -2 & 5\\ 3 & 4 & 13\end{vmatrix}=52-24+15-36+40-13=34.$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-51}{-17}=3,\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{0}{-17}=0,\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{34}{-17}=-2,$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

в) Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 0 & -6\\ 1 & -2 & -1 & 5\\ 3 & 4 & -2 & 13\end{array}\right).$$

Элемент $a_{11}=-2\neq 0$ принимаем за разрешающий. Преобразование проведем методом Гаусса, используя правило прямоугольников:

1. Элементы ключевой строки и всех выше расположенных строк, остаются неизменными;
2. Элементы ключевого столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;

3. Все прочие элементы матрицы вычисляются по мнемоническому правилу прямоугольников:

Новый элемент = старый элемент × разрешающий элемент – элемент ключевого столбца × элемент ключевой строки.

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 34 & -68 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \div 34 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

На основе последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2\cdot(-2) = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

Задание 4. Найти общее решение для однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение системы методом Гаусса. По правилу прямоугольников (см. задание 3) имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r = 1 < n = 3$ и система имеет ненулевое решение.

Пусть x_1 – базисная переменная, x_2, x_3 – свободные переменные. Выразим базисную переменную через свободные переменные, получим: $x_1 = 2x_2 - 3x_3$. Придадим свободным переменным значения $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$. Общее решение получим в виде: $X = (2t_1 - 3t_2; t_1; t_2)$.

Задание 5. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. а) *Проверим условие коллинеарности* $\vec{a} \parallel \vec{c} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{c_x} = \dfrac{a_y}{c_y} = \dfrac{a_z}{c_z}$. *Так как* $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{-3}{2} \neq \dfrac{1}{-3}$ *то векторы* $\vec{a}$ и $\vec{c}$ *не коллинеарны.*

Так как условие перпендикулярности двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$**,** то находим скалярное произведение этих векторов. Имеем,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 10 - 6 - 3 = 1,$$

следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не ортогональны.

б) Используем формулу: $np_{2\vec{b}+3\vec{c}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right)}{\left|2\vec{b} + 3\vec{c}\right|}$. Решение проведем по действиям, во-первых, находим координаты вектора $2\vec{b} + 3\vec{c}$, получим

$$2\vec{b} + 3\vec{c} = 2(0;1;4) + 3(5;2;-3) = (0;2;8) + (15;6;-9) = (15;8;-1).$$

Далее

$$\vec{a} \cdot \left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right) = (2;-3;1) \cdot (15;8;-1) = 30 - 24 - 1 = 5,$$

$$\left|2\vec{b} + 3\vec{c}\right| = \sqrt{15^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{290}.$$

Следовательно, $np_{2\vec{b}+3\vec{c}}\vec{a} = \dfrac{5}{\sqrt{290}} = \dfrac{5\sqrt{290}}{290} = \dfrac{\sqrt{290}}{58}$.

Задание 6. Дан вектор $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, если $\left|\vec{p}\right| = 1$, $\left|\vec{q}\right| = 2$, $\left(\widehat{\vec{p}\vec{q}}\right) = \pi/6$. Найти длину вектора $\vec{a}$**.**

Решение. Найдём скалярный квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2 = \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) \cdot \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right).$$

Раскроем скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) \cdot \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) = \vec{p}^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 2\vec{q} \cdot \vec{p} + 4\vec{q}^2 = \vec{p}^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4\vec{q}^2 =$$

$$= \left|\vec{p}\right|^2 + 4\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \cdot \cos\left(\vec{p} \wedge \vec{q}\right) + 4\left|\vec{q}\right|^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 4 = 1 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 = 17 + 4\sqrt{3}.$$

Находим длину вектора $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{17 + 4\sqrt{3}}$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Найдем координаты векторов:

$\overline{AC}=(-2-3;-3-4;6-5)=(-5;-7;1)$,

$\overline{AD}=(3-3;-6-4;-3-5)=(0;-10;-8)$.

Вычислим их векторное произведение:

$$\overline{AC}\times\overline{AD}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -5 & -7 & 1\\ 0 & -10 & -8\end{vmatrix}=66\bar{i}-40\bar{j}+50\bar{k}.$$

Модуль векторного произведения равен:

$$\left|\overline{AC}\times\overline{AD}\right|=\sqrt{66^2+(-40)^2+50^2}=\sqrt{8456}=2\sqrt{2114},$$

Тогда

$$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}\left|\overline{AC}\times\overline{AD}\right|=\sqrt{2114}\text{ (кв. ед.).}$$

б) Так как координаты векторов: $\overline{AB}=(1-3;2-4;1-5)=(-2;-2;-4)$, $\overline{AC}=(-2-3;-3-4;6-5)=(-5;-7;1)$, $\overline{AD}=(3-3;-6-4;-3-5)=(0;-10;-8)$,

то $V_{пир.}=\left|\frac{1}{6}\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -2 & -4\\ -5 & -7 & 1\\ 0 & -10 & -8\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot 252=42$ (куб. ед).

Задание 8. Сила $\vec{F}=(5;-3;9)$ приложена к точке $A(3,4,-6)$. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2,6,5)$; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки B.

Решение. Найдем координаты вектора перемещения: $\overrightarrow{AB}=(-1;2;11)$.

Для нахождения работы силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения $A(3,4,-6)$, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2,6,5)$, применим формулу: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. Получим:

$$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=5\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+9\cdot 11=88\text{ (усл. ед.).}$$

б) Момент силы $\vec{F}$ относительно точки $B(2,6,5)$ есть вектор

$$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & -11\\ 5 & -3 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -11\\ -3 & 9\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & -11\\ 5 & 9\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}\bar{k}=-51\bar{i}-64\bar{j}+7\bar{k}.$$

Следовательно, модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки B равен:

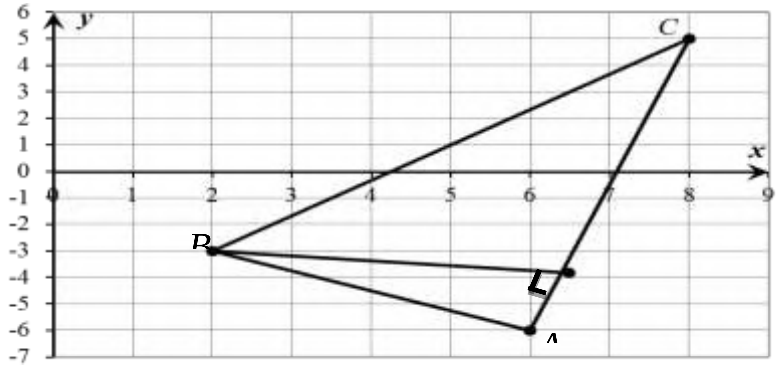
$$\left|\overrightarrow{M}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{F}\right|=\sqrt{(-51)^2+(-64)^2+7^2}=\sqrt{6746}.$$

Образец выполнения типового расчета № 2

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(6;-6)$, $B(2;-3)$, $C(8;5)$. Требуется: 1) сделать чертеж; 2) составить уравнение стороны AB; 3) найти длину стороны AB; 4) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 5) вычислить расстояние от вершины C до стороны AB; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой).

Решение:

1) Сделаем чертеж.



2) Для составления уравнения стороны AB используем формулу $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, где $A(6;-6)$, $B(2;-3)$: $\frac{y-(-6)}{-3-(-6)}=\frac{x-6}{2-6}$ или $\frac{y+6}{3}=\frac{x-6}{-4}$ или $-4y-24=3x-18$ или $3x+4y+6=0$.

3) Для нахождения длины AB используем формулу расстояния между двумя заданными точками $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Подставляя значения, имеем

$$d=\sqrt{(2-6)^2+(-3-(-6))^2}=\sqrt{16+9}=5 \text{(ед. дл.)}.$$

4) Для составления уравнения высоты BD используем условие перпендикулярности прямых BD и AC, т.е. используем формулу $k_2=-\frac{1}{k_1}$:

$k_{BD}k_{AC}=-1$. Найдем k_{AC}, используя формулу $k_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, имеем

$k_{AC}=\frac{5-(-6)}{8-6}=\frac{11}{2}$, следовательно, $k_{BD}=-\frac{1}{11/2}=-\frac{2}{11}$. Составим уравнение высоты

BD по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$, зная, что $k_{BD}=-\frac{2}{11}$ и что она проходит через точку $B(2;-3)$.

Получим: $y-(-3)=-\frac{2}{11}(x-2)$ или $11y+33=-2x+4$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид: $2x+11y+29=0$.

5) Расстояние от вершины $C(8;5)$ до стороны AB, уравнение которой было найдено в п.2: $3x+4y+6=0$, найдем по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Получим:

$$d=\frac{|3\cdot 8+4\cdot 5+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{50}{5}=10 \text{ (ед.дл.).}$$

6) Составим, например, уравнение средней линии MN треугольника ABC. Найдем середину (т.*M*) стороны BC и середину (т.*N*) стороны AC, используя формулы $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

$$x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{8+2}{2}=5;\quad y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{5-3}{2}=1;$$

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{6+8}{2}=7;\quad y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-6+5}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Т.о., $M(5;1)$, $N(7;-\frac{1}{2})$.

Составим уравнение MN, используя формулу $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

$$\frac{y-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{x-5}{7-5}\Rightarrow\frac{y-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{x-5}{2}\Rightarrow\frac{y-1}{-3}=\frac{x-5}{4}\Rightarrow 4y-4=-3x+15\Rightarrow$$
$$3x+4y-19=0.$$

7) Для составления уравнения прямой, проходящей через точку $A(6;-6)$ параллельно прямой BC, используем условие параллельности двух прямых $k_1=k_2$.

Найдем угловой коэффициент прямой BC по формуле $k_{BC}=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$:

$$k_{BC}=\frac{5-(-3)}{8-2}=\frac{4}{3}.$$

Уравнение искомой прямой найдем по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$:

$$y-(-6)=\frac{4}{3}(x-6)\Rightarrow 3y+18=4x-24\Rightarrow 4x-3y-42=0.$$

8) Площадь треугольника *ABC* найдем по формуле $S=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{matrix}\right\|$:

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2-6 & -3-(-6)\\ 8-6 & 5-(-6)\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-4 & 3\\ 2 & 11\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-44-6|=25 \text{ (кв. ед).}$$

9) Для вычисления угла *A* треугольника *ABC* используем формулу $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Найдем сначала k_{AB}, зная уравнение *AB:* $3x+4y+6=0$. Преобразуем это уравнение к виду $y = kx + b: 4y = -3x - 6$ или $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. Отсюда $k_{AB} = -\frac{3}{4}$. Угловой коэффициент прямой AC был найден в п.3: $k_{AC} = \frac{11}{2}$. Заметим, что $k_1 = k_{AC}$, $k_2 = k_{AB}$.

Следовательно, $tgA = \dfrac{-\frac{3}{4} - \frac{11}{2}}{1 + (-\frac{3}{4}) * \frac{11}{2}} = 2$ или $A = arctg2 \approx 1{,}11$ *рад.*

Задача 2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение кривой, так как

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 5(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) + 9 = 5(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) +$$
$$+9(y^2 + 2 \cdot 1y + 1 - 1) + 9 = 5(x-3)^2 - 45 + 9(y+1)^2 - 9 + 9 = 0,$$

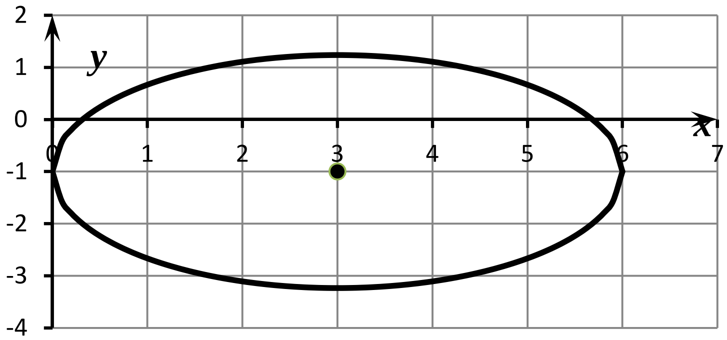
то уравнение можно написать в виде:

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 - 45 = 0$$

или

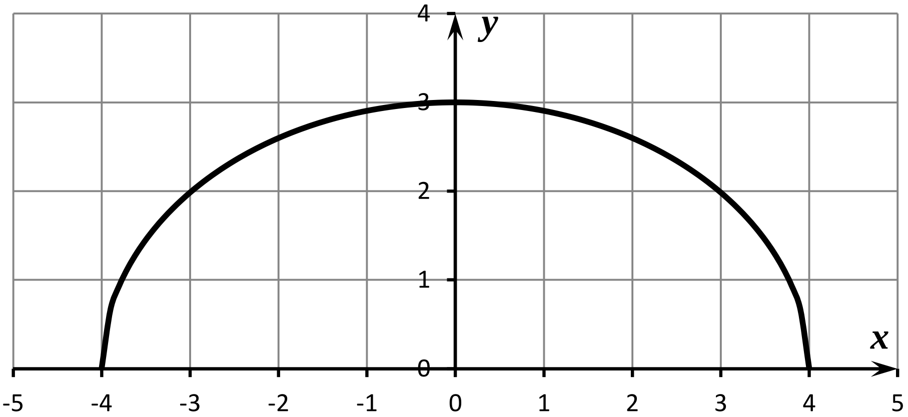
$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса, его центр симметрии находится в точке $(3;-1)$, полуоси $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.



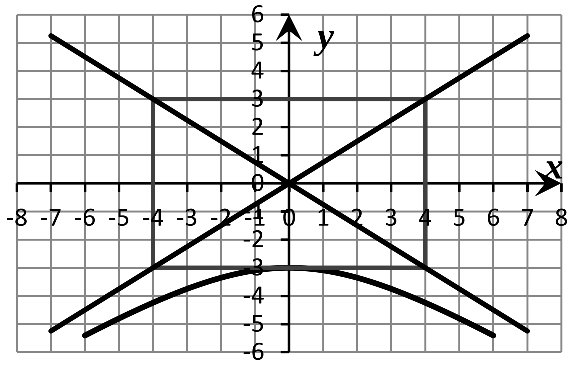
б) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим: $y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$ или $y^2 = 9 - \frac{9}{16}x^2$, $\frac{9}{16}x^2 + y^2 = 9$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ – каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями, равными $a = 4$, $b = 3$. Так как, по условию, в уравнении перед радикалом стоит знак «+», то исходное уравнение определяет часть эллипса, расположенную выше оси *Ox*.



в) $y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 + x^2}$. Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим:

$y^2 = \frac{9}{16}(16 + x^2)$ или $y^2 = 9 + \frac{9}{16}x^2$, $-\frac{9}{16}x^2 + y^2 = 9$, $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями, равными $a = 4,\ b = 3$. Так как, по условию, в уравнении перед радикалом стоит знак «-», то исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенную ниже оси *Ox*.



Задача 3. Найти расстояние от точки $M_0(-12, 7, -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3, 4, -7)$, $M_2(1, 5, -4)$, $M_3(-5, -2, 0)$.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получим:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z+7 \\ 1+3 & 5-4 & -4+7 \\ -5+3 & -2-4 & 0+7 \end{vmatrix} = 25(x+3)-34(y-4)-22(z+7) = 25x-34y-22z+57=0$$

Тогда используя формулу $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, в которой $A=25,\quad B=-34,$ $C=-22,\quad D=57$, и $x_0=-12,\quad y_0=7,\quad z_0=-1,$ получим:

$$d=\frac{|25\cdot(-12)-34\cdot 7-22\cdot(-1)+57|}{\sqrt{25^2+(-34)^2+(-22)^2}}=\frac{459}{\sqrt{2265}} \text{ (ед.дл)}$$

Задача 4. Найти угол между плоскостями $x-3y+5=0,\ 2x-y+5z-16=0.$

Решение. Угол между плоскостями находим по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Координаты нормальных векторов заданных плоскостей соответственно равны: $\overrightarrow{n_1}=(1;-3;0)$ и $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;5)$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+0\cdot 5}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{30}}=\frac{5}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Задача 5. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$ с плоскостью $x-2y+z-6=0$.

Решение. Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости от уравнения прямой в каноническом виде переходим к уравнению прямой в параметрическом виде:

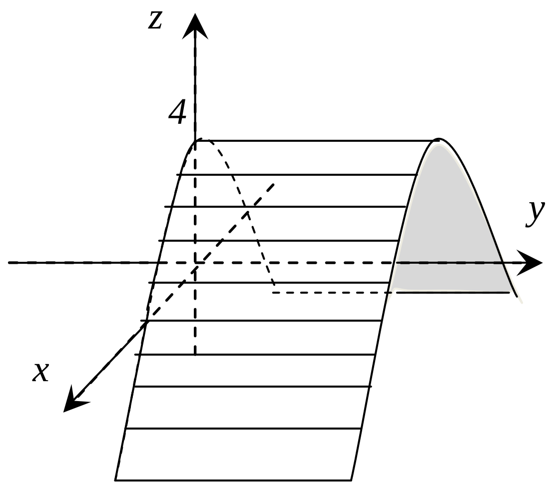
$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1}=t, \\ \dfrac{y-4}{-2}=t, \\ \dfrac{z-5}{1}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+3, \\ y=-2t+4, \\ z=t+5 \end{cases}$$

Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости, получим равенство $t+3-2(-2t+4)+t+5-6=0$ из которого вытекает, что $6t-6=0$, т.е $t=1$.

Следовательно, $\begin{cases} x=t+3=1+4=5, \\ y=-2t+4=-2\cdot 1+4=2, \\ z=t+5=1+5=6. \end{cases}$ точка пересечения имеет координаты $(5, 2, 6)$.

Задача 6. Определить тип поверхности и сделать схематический чертеж $z = 4 - x^2$.

Решение. Данное уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с направляющей параллельной оси Oy и образующей параболой, которая симметрична относительно оси Ox, сдвинута на 4 единице по оси Oz, направлена в отрицательную сторону оси Oz. Таким образом, данное уравнение описывает параболический цилиндр.



Образец выполнения типового расчета №3
Вариант №1

I.Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение

I. Вычислить пределы, не применяя правила Лопиталя.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)\left(\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}\right)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n+2)-(4n-1)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{9n+2}}{n}+\frac{\sqrt{4n-1}}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{5+\frac{3}{\infty}}{\sqrt{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{\left(3n^2+1\right)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$$

3) $$\lim_{x\to-2}\frac{2x+5}{\ln\left(x+3\right)}=\frac{2\cdot(-2)+5}{\ln\left(-2+3\right)}=\frac{1}{\ln 1}=\frac{1}{0}=\infty.$$

4) $$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\textit{Разделим числитель и знаменатель на }\left(x+3\right)\right|$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\
-\underline{x^3+3x^2} & \overline{x^2+2x-3} \\
2x^2+3x & \\
-\underline{2x^2+6x} & \\
-3x-9 & \\
-\underline{-3x-9} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2-6x-27 & x+3 \\
-\underline{x^2+3x} & \overline{x-9} \\
-9x-27 & \\
-\underline{-9x-27} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0.$$

5)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{tg(2x)}{2x}\right)^3\cdot(2x)^3}{\left(\dfrac{arctg(3x)}{3x}\right)^3\cdot(3x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot(2x)^3}{1\cdot(3x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^3}{27x^3}=\frac{8}{27}.$$

7) $$\lim_{x\to -2}\frac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{\dfrac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\left(x^2-4\right)}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}.$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\frac{1}{4}.$$

9) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{2n^2}{n^3}+\dfrac{6n}{n^3}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9n^2}{n^3}+\dfrac{5n^3}{n^3}-\dfrac{8n}{n^3}+\dfrac{4}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9}{n}+5-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}=$$
$$=\frac{2-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{6}{\infty}+\dfrac{12}{\infty}}{\dfrac{9}{\infty}+5-\dfrac{8}{\infty}+\dfrac{4}{\infty}}=\frac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение. Т.к. знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-2}$ равен нулюпри $x=2$, то функция терпит разрыв при $x=2$. Установим тип этой точки разрыва, для этого найдем предел слева и справа в этой точке.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{-0}}}=\frac{2}{3+5^{-\infty}}=\frac{2}{3+\dfrac{1}{5^{\infty}}}=\frac{2}{3+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{+0}}}=\frac{2}{3+5^{+\infty}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Т.о. у функции существуют и левосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\dfrac{2}{3}$ и правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=0$, но между собой они не равны. Значит точка $x=2$ является точкой разрыва 1 рода. Скачок функции равен $\left|\dfrac{2}{3}-0\right|=\dfrac{2}{3}$.

Образец выполнения типового расчета №4
Вариант №1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

д) $y=x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(8-7t), \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

5. Найти производную неявной функции $x^3+3y^3-xy=0$

Решение

Задание 1.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x}{1}=9$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{ctg\dfrac{\pi x}{6}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(2x-6)'}{\left(ctg\dfrac{\pi x}{6}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}\cdot\dfrac{\pi}{6}}=\frac{2}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{6}}=-\frac{12}{\pi}$$

Задание 2.

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$

$$y' = \left(5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x}\right)' = \left(5x^3 - 8x^{-2} + 4x^{1/2}\right)' = 5\cdot 3x^2 - 8\cdot(-2)x^{-3} + 4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} =$$

$$= 15x^2 + \frac{16}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

б) $y = \dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)' = \frac{(\cos x)'(x^3+9) - \cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2} == \frac{-\sin x\cdot(x^3+9) - 3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в) $y = \sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y' = \left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)' =$$

$$= \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y = \left(2arctgx + 3^x\right)\left(5\arcsin - \sqrt{3}\right)$

$$y' = \left(2arctgx + 3^x\right)'\cdot\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right)'\cdot\left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2} + 3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 0\right)\cdot\left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(\frac{2}{1+x^2} + 3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx + 3^x\right)$$

д) $y = x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y = \ln(x^{e^x})$; $\ln y = e^x \ln x$;

Продифференцируем обе части равенства:

$\dfrac{y'}{y} = e^x\ln x + e^x\dfrac{1}{x}$; $\qquad y' = y\left(e^x\ln x + \dfrac{e^x}{x}\right)$

$$y' = x^{e^x}\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x}\right)$$

Задание 3. Найти производую y'_x функции $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arccos t \end{cases}$

Вычислим x'_t и y'_t :

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}2t = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$$

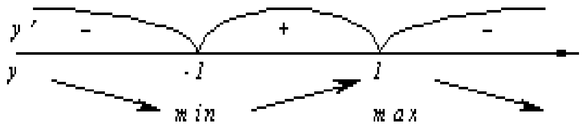
Задание 4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Решение.

Исследуем функцию на монотонность и найдем экстремум

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Найдем критические точки 1рода



$$y' = 0, \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0,$$

$$x = 1, \quad x = -1.$$

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ функция убывает,

при $x \in (-1, 1)$ функция возрастает.

$x = -1$ - точка минимума, $y_{min} = y(-1) = \dfrac{-1}{1+(-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$x = 1$ - точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.

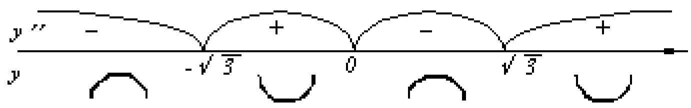
Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2 - (1-x^2)((1+x^2)^2)'}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$\frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x(1+x^2)(1-x^2-2x^2)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Найдем критические точки 2 рода:

$y''=0$, $\dfrac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3}=0.$



$x=0, \quad x=\sqrt{3}, \quad x=-\sqrt{3}$

При $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ функция выпуклая,

при $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ функция вогнутая.

$x=0, \quad x=\sqrt{3}, \quad x=-\sqrt{3}$ - точки перегиба.

Задание 5. Найти производную функции $x^3+3y^3-xy=0$

Продифференцируем по x равенство $x^3+3y^3-xy=0$:

$$3x^2+3\cdot 3y^2\cdot y'-xy'-y=0$$

Из полученного соотношения найдем y':

$3x^2-y=(-9y^2+x)y'$

$y'=\dfrac{3x^2-y}{x-9y^2}$

Образец выполнения типового расчета №5

Вариант №1

1. $\int\sin^3 x\cos x dx$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx$

3. $\int x^3e^{x^4}dx$

4. $\int\left(3x+2\right)\sin 2x\, dx$

5. $\int\dfrac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

6. $\int\dfrac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

7. $\int\dfrac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$.

8. $\int\dfrac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$

9. $\int\dfrac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

10. $\int\sqrt{9-x^2}dx.$

Решение

1. $\int\sin^3 x\cos x dx=\left|\cos x dx=d\sin x\right|=\int\sin^2 x d\sin x=\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx=\begin{vmatrix}\sqrt{x+4}=t, \quad x=t^2-4\\ dx=(t^2-4)'dt=2tdt\end{vmatrix}=\int(t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt=2\int(t^4-4t^2)dt=$

$$=2\left(t^4-4t^2\right)+C=2\frac{t^5}{5}-8\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{\left(x+4\right)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(x+4\right)^3}+C.$$

3. $\int x^3e^{x^4}dx=\frac{1}{4}\int e^{x^4}4x^3dx=\left|4x^3dx=dx^4\right|=\frac{1}{4}\int e^{x^4}dx^4=\frac{1}{4}e^{x^4}+C.$

4. $\int(3x+2)\sin 2xdx=\begin{vmatrix} u=3x+2 \quad \Rightarrow \quad du=(3x+2)'dx=3dx \\ dv=\sin 2xdx \quad \Rightarrow \quad v=\int dv=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{vmatrix}=$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x-\int-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 3dx=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C$$

5. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

Разложим знаменатель на множители $(x^2+2x-3)(x-4)=(x-1)(x+3)(x-4)$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$2x^2+41x-91=A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3);$$

$$2x^2+41x-91=A(x^2-x-12)+B(x^2-5x+4)+C(x^2+2x-3);$$

$$2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x+(-12A+4B-3C).$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=2 \\ x & -A-5B+2C=41 \\ x^0 & -12A+4B-3C=-91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим $A=4, \quad B=-7, \quad C=5$.

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx=\int\frac{4}{x-1}dx-\int\frac{7}{x+3}dx+\int\frac{5}{x-4}dx=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$$

6. $$\int\frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^5}-\frac{x^5e^x}{x^5}-\frac{14}{x^5}\right)dx=\int\left(3x^{-3}-e^x-14x^{-5}\right)dx=$$

$$=3\int x^{-3}dx-\int e^xdx-14\int x^{-5}dx=3\frac{x^{-2}}{-2}-e^x-14\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{2x^2}-e^x+\frac{7}{2x^4}+C.$$

7. $$\int\frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}4dx=\left|\frac{dx}{x}=d\ln x\right|=\int\sqrt[4]{\ln x}d\ln x=\frac{(\ln x)^{5/4}}{5/4}+C=\frac{4}{5}\sqrt[4]{\ln^5 x}+C.$$

8. $$\int\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t, & x=t^2+1\\ & dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{t+1}{t-1}2tdt=2\int\frac{t^2+t}{t-1}dt=$$

$$=2\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|\right)+C=t^2+4t+4\ln|t-1|+C=$$

$$=x-1+4\sqrt{x-1}+4\ln\left|\sqrt{x-1}-1\right|+C.$$

9. $$\int\frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}=\left|\begin{matrix}tg\,\frac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg(tg\,\frac{x}{2}+1)+C\,.$$

10. $$\int\sqrt{9-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=3\sin t, & dx=3\cos tdt\\ t=\arcsin\frac{x}{3}, & \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t\end{matrix}\right|=\int 3\cos t\cdot 3\cos tdt=$$

$$=9\int\cos^2 tdt=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)+C$$

$$\left(\sin\arcsin\frac{x}{3}=\frac{x}{3}, \quad \frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}2\sin t\cos t=\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)$$

<u>2 СЕМЕСТР</u>

Образец выполнения типового расчета №1
Вариант №1

1.Вычислить $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

2. Вычислить $\int\limits_{1}^{2} x^2 \ln x dx$.

3. Вычислить $\int\limits_{1}^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

5.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 3$ ($y \geq 3$).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \leq x \leq 4$.

8.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}$.

9.Вычислить длину дуги линии $r = 2\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

10.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение.

Задание 1.Вычислить $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right|\Big|_{e}^{e^2} = \ln\left|\ln e^2\right| - \ln\left|\ln e\right| = \ln\left|2\ln e\right| - \ln 1 = \ln 2$$

Задание 2. Вычислить $\int\limits_{1}^{2} x^2 \ln x dx$.

Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$,

тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}$.

Согласно формуле $\int\limits_{a}^{b} u dv = u \cdot v\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v du$ получим:

$$\int_1^2 x^2\ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\left(2^3\ln 2 - \ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} = \frac{24\ln 2 - 7}{9}.$$

Задание 3. Вычислить $\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Первообразную найдем, введя подстановку $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. При $x = 1$, $t_1 = \sqrt[6]{1} = 1$; при $x = 64$, $t = \sqrt[6]{64} = 2$.

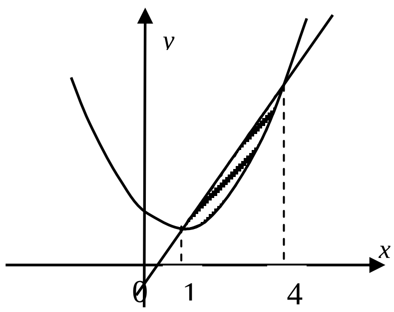
$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \int_1^2 \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t^2} = 6\int_1^2\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int_1^2\frac{t^2+1}{1+t^2}dt - 6\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt = 6t\Big|_1^2 - 6arctg\,t\Big|_1^2 = 6(2-1) - 6(arctg 2 - arctg 1) =$$

$$= 6 - 6\left(arctg 2 - \frac{\pi}{4}\right) = 6 + \frac{3\pi}{2} - 6arctg 2.$$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

Сделаем чертеж. Уравнению $y = x^2 - 2x + 3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x = 1$, $y = 2$, т. к. $y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2$. Уравнению $y = 3x - 1$ соответствует прямая.



Найдем точки пересечения заданных линий $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ $x^2 - 2x + 3 = 3x - 1$, $x^2 - 5x + 4 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

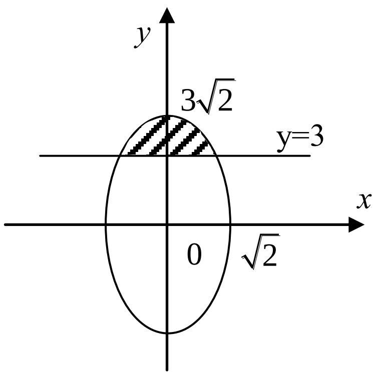
$$\int_1^4 (3x - 1 - (x^2 - 2x + 3))dx = \int_1^4 (3x - 1 - x^2 + 2x - 3)dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - 4 - x^2)dx = \frac{5x^2}{2}\Bigg|_1^4 - 4x\Big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

Задание 5.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 3$ ($y \geq 3$).

Решение:

Уравнениями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).



Уравнению $y = 3$ соответствует прямая, параллельная осиOx. Сделаем чертеж. Получаем фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx .$$

Найдем пределы изменения параметра t. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{2}\sin t \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3 = 3\sqrt{2}\sin t ,$$

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; t = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi, \qquad k \in Z$$

При $k = 0$, $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; при $k = 1$, $t_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Значит $\frac{3\pi}{4} \geq t \geq \frac{\pi}{4}$, $dx = -\sqrt{2}\sin t dt$.

Искомая площадь равна

$$S = \int_{3\pi/4}^{\pi/4} \left(3\sqrt{2}\sin t - 3\right)\left(-\sqrt{2}\right)\sin t dt = -6\int_{3\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 t dt + 3\sqrt{2}\int_{3\pi/4}^{\pi/4} \sin t dt =$$

$$= -6\int_{3\pi/4}^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - 3\sqrt{2}\cos t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} = -3\int_{3\pi/4}^{\pi/4} dt + 3\int_{3\pi/4}^{\pi/4} \cos 2t dt -$$

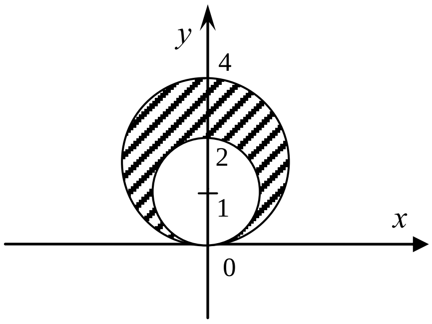
$$-3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = -3t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} + \frac{3}{2}\sin 2t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} - 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}\right) - 6 = \frac{3\pi}{2} - 3 \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r = 2\sin\varphi$.



Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, а $r\sin\varphi = y$, и умножая обе части равенства $r = 2\sin\varphi$ на r, получим

$r^2 = 2r\sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2y$,

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$,

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – это окружность с центром в точке $(0;\ 1)$ и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r = 4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке $(0;\ 2)$ и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$.

Площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\left(4\sin\varphi\right)^2 - \left(2\sin\varphi\right)^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_0^{\pi}d\varphi - 3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = = 3(\pi - 0) - \frac{3}{2}\left(\sin 2\pi - \sin 0\right) = 3\pi$$

(кв. ед.).

Задание 7. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \le x \le 4$.

Решение:

Уравнению $y^2 = (x+1)^3$, или $y = \pm\sqrt{(x+1)^3} = \pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}dx$. Возьмем $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}\left(x+1\right)^{1/2}$.

Тогда

$$L=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx=\frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}(9x+13)^{\frac{1}{2}}d(9x+13)=\frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3}-\sqrt{4^3}\right)=\frac{1}{27}(343-8)=\frac{1}{27}\cdot 335=\frac{335}{27}\text{ (лин. ед.).}$$

Задание 8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0\le t\le\sqrt[4]{8}$.

Решение:

Длина дуги вычисляется по формуле $L=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t'))^2}dt$.

Найдем $x_t'=\left(\frac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y_t'=\left(2-\frac{t^4}{4}\right)'=-t^3$. Тогда

$$L=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3)\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(8+1)^3}-1\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\text{ (лин. ед.)}$$

Задание 9. Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r'))^2}d\varphi .$$

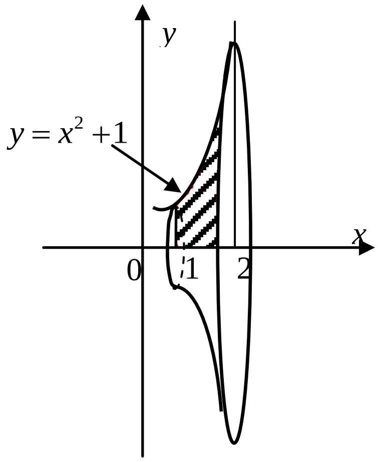
Найдем $r'=(2\sin\varphi)'=2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}d\varphi=2\int_0^{\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_0^{\pi}=2(\pi-0)=2\pi$$ (лин. ед.).

Задание 10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение:

Сделаем чертеж.



$$V_x = \pi \int_1^2 (x^2+1)^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx + 2\pi \int_1^2 x^2 dx + \pi \int_1^2 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2 + 2\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 +$$

$$+\pi \left. x \right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(2^5 - 1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(2^3 - 1\right) + \pi(2-1) = \frac{178}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

Образец выполнения типового расчета №2
Вариант №1

1. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x-2y}$:

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2e^{x-2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2e^{x-2y}.$$

2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Приравнивая их к нулю, получим, $3x^2 - 3y = 0$, $3y^2 - 3x = 0$.

2. Решаем систему $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ \left(x^2\right)^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0 \end{cases}$ из последней системы, получим $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2, \\ x^3 - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Следовательно, критические точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,\; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3.$$

4. Вычисляем значения этих производных в каждой критической точке:

1) $M_1(0;0)$: $A_1 = 6 \cdot 0 = 0$; $B_1 = -3$; $C_1 = 6 \cdot 0 = 0$.

2) $M_2(1;1)$: $A_2 = 6 \cdot 1 = 6$; $B_2 = -3$; $C_2 = 6 \cdot 1 = 6$.

5. Проверяем в каждой точке выполнение достаточного условия

1) $\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – экстремума нет.

2) $\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ – экстремум есть, причем $A_2 = 6 > 0$, следовательно, в точке M_2 минимум.

6. Находим экстремальное значение функции $z_{\min} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = -1$.

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	120	140	230	370	445	570	655	770

Решение.

1) Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

xi	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	120	120	1
2	2	140	280	4
3	3	230	690	9
4	4	370	1 480	16
5	5	445	2 225	25
6	6	570	3 420	36
7	7	655	4 585	49
8	8	770	6 160	64
$\sum$	36	3300	18 960	204

Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 204a+36b=18960, \\ 36a+8b=3300. \end{cases}$$

Ее решение $a=\dfrac{685}{7}$, $b=-\dfrac{195}{7}$ дает искомую зависимость: $y=\dfrac{685}{7}x-\dfrac{195}{7}$.

Ответ: $y=\dfrac{685}{7}x-\dfrac{195}{7}$.

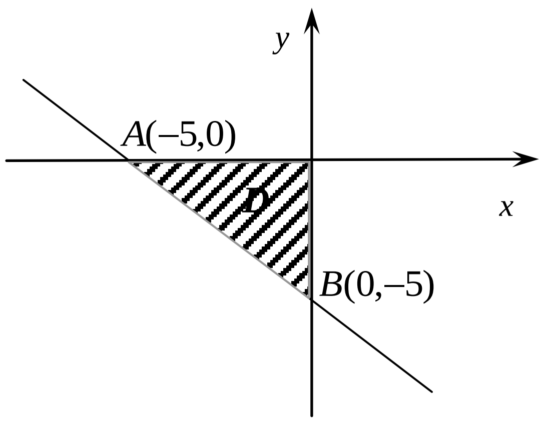
4. Вычислить $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z=y^2e^x+x^2y^3+1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^x+2xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x+2y^3,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2ye^x+6y^2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ в замкнутой области *D*, ограниченной линиями: $x+y+5=0$ и осями координат.

Решение.



1) Для определения критических точек внутри области находим частные производные функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+4y+2$.

Приравниваем их к нулю и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y+3=0, \\ -x+4y+2=0 \end{cases}$$

Получим $x=-2$; $y=-1$. Итак, имеется одна внутренняя критическая точка $M_1(-2,-1)$, принадлежащая заданной области*D*.

2) Определяем значение функции в этой точке: $z(M_1)=(-2)^2-(-2)(-1)+2(-1)^2+3(-2)+2(-1)+1=-3$.

3) Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезков *OA, OB* и отрезка прямой *AB.*

а) На отрезке *OA* $y=0$, а заданная функция принимает при $y=0$ такой вид: $z=x^2+3x+1\ \left(-5\le x\le 0\right)$.

Эта функция – функция одного переменного, должна быть рассмотрена на отрезке $\left[-5,0\right]$ (см. рис). Так как на этом отрезке функция z непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в критических точках функции, лежащих внутри интервала, где $\frac{dz}{dx}=0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим, прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dx}=2x+3;\ 2x+3=0;\ x=-\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x=-\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $-5\le x\le 0$:

$$z(-\frac{3}{2},0)=-\frac{5}{4};\qquad z(-5,0)=11;\ \ z(0,0)=1.$$

Сравнение показывает, что $\left(z_{наиб}\right)_{OA}=11; \left(z_{наим}\right)_{OA}=-\frac{5}{4}$.

б) На отрезке OB $x=0$, а данная функция при $x=0$ принимает вид:

$$z=2y^2+2y+1\left(-5\le y\le 0\right).$$

Полученная функция одного переменного должна быть рассмотрена на отрезке $\left[-5,0\right]$ (см. рис.) и в силу непрерывности на нем должны существовать наименьшее и наибольшее значения.

Определим прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dy}=4y+2;\ 4y+2=0;\ y=-\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y=-\frac{1}{2}$ и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(0,-\frac{1}{2})=\frac{1}{2};\ z(0,-5)=41;\ z(0,0)=1.$$

Сравнение показывает, что $\left(z_{наиб}\right)_{OB}=41$; $\qquad \left(z_{наим}\right)_{OB}=\frac{1}{2}$.

в) Исследуем функцию на отрезке *AB,* принадлежащем границе области.

Уравнение *AB*: $x+y+5=0$. Поэтому не ней $y=-x-5$.

Подставляя это значение y в заданную функцию, получаем

$$z=4x^2+26x+41.$$

Наибольшее и наименьшее значения этой функции должны быть определенындля значений $-5\le x\le 0$:

$$\frac{dz}{dx}=8x+26\,;\;8x+26=0\,;\;x=-\frac{13}{4}\,.$$

Находим соответствующее значение *y*. Из $y=-x-5$ следует, что

$$y=-\left(-\frac{13}{4}\right)-5=\frac{13}{4}-5=-\frac{7}{4}\,.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4},-\frac{7}{4}\right)$, так как она лежит в исследуемой области.

Определим значение функции в найденной точка и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(-\frac{13}{4},-\frac{7}{4})=-\frac{5}{4}\,; \qquad z(0,-5)=41\,;\; z(-5,0)=11\,.$$

Сравним результаты и получим, что $\left(z_{наиб}\right)_{AB}=41$; $\quad \left(z_{наим}\right)_{AB}=-\frac{5}{4}$.

4) Сравним значения функции *z* во внутренней критической точке M_1 с наибольшими и наименьшими значениями на границе, составленной из отрезков*OA, OB, AB*, найденными в пунктах а, б и в.

Видим, что в заданной замкнутой области

$$z_{наиб}=z(0,-5)=41\,;$$

$$z_{наим}=z(-2,-1)=-3\,.$$

Таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла во внутренней критической точке $M_1(-2,-1)$, а наибольшего – на границе области, в точке $B(0,-5)$.

Ответ: $z_{наиб}=z(0,-5)=41$, $z_{наим}=z(-2,-1)=-3$.

Образец выполнения типового расчета №3 по разделу "Кратные интегралы"
Вариант №1

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

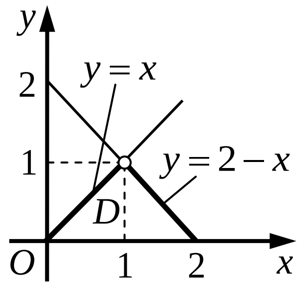
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x$, $x=2-y^2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho\left(x,y\right)=2y$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=4$, $z=0$, $z=3$.

Решение

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

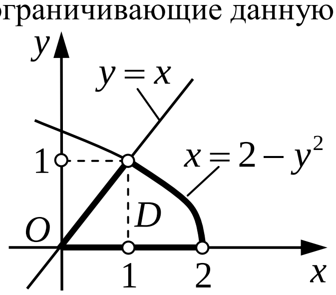
Решение. Построим область интегрирования.



$$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx = \left| \begin{matrix} 0 \le y \le 1 & 0 \le x \le 2 \\ x = y & y = x \\ x = 2 - y & y = 2 - x \end{matrix} \right| = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 2 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 2y$.

Решение. Построим кривые, ограничивающие данную пластину.



Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы $x = 2 - y^2$ и прямой $y = x$. Приравниваем:

$$y = 2 - y^2 \;\Rightarrow\; y^2 + y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 1,\; y_2 = -2(\notin D).$$

Определим статические моменты пластины относительно осей *Ox* и *Oy* и массу пластины.

$$S_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} y \cdot 2y dx = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} 2y^2 dx = \int_0^1 dy \cdot 2y^2 x\Big|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy \cdot 2y^2\left(2 - y^2 - y\right) = \int_0^1 \left(4y^2 - 2y^4 - 2y^3\right)dy = \left(4\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{40 - 12 - 15}{30} = \frac{13}{30}.$$

$$S_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} x\cdot 2y\,dx=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\left.\frac{x^2}{2}\right|_y^{2-y^2}=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\cdot y\left(\left(2-y^2\right)^2-y^2\right)=\int\limits_0^1 y\left(4-4y^2+y^4-y^2\right)dy=\int\limits_0^1\left(4y-5y^3+y^5\right)dy$$

$$=\left.\left(4\frac{y^2}{2}-5\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}\right)\right|_0^1=2-\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{24-15+2}{12}=\frac{11}{12}.$$

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} 2y\,dx=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\left.x\right|_y^{2-y^2}=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\left(2-y^2-y\right)=\int\limits_0^1\left(4y-2y^3-2y^2\right)dy=\left.\left(4\frac{y^2}{2}-2\frac{y^4}{4}-2\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^1=$$

$$=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{12-3-4}{6}=\frac{5}{6}.$$

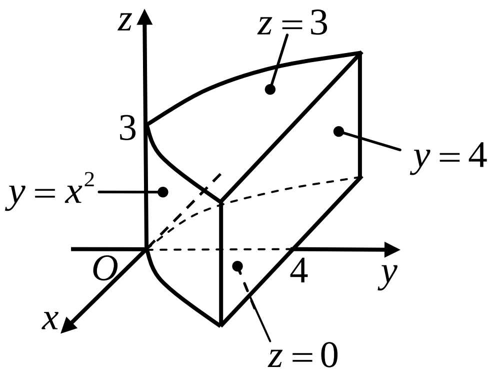
Тогда, координаты центра тяжести пластины x_c и y_c будут равны:

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{11\cdot 6}{12\cdot 5}=\frac{11}{10}=1{,}1$$

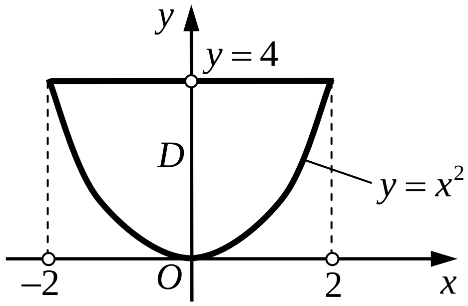
$$y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\frac{13}{30}}{\frac{5}{6}}=\frac{13\cdot 6}{30\cdot 5}=\frac{13}{25}=0{,}52.$$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=4$, $z=0$, $z=3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело.



Для определения пределов интегрирования, спроектируем его на координатную плоскость *Oxy*.



Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$:

$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy \int_0^3 dz = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy \cdot z\Big|_0^3 = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} dy \cdot (3-0) =$$

$$= 3\int_{-2}^{2} dx \cdot y\Big|_{x^2}^{4} = 3\int_{-2}^{2} dx \cdot \left(4 - x^2\right) = 3\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = 3\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(12x - x^3\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= (24-8) - (-24+8) = 16 - (-16) = 32 \text{ куб.ед.}$$

Образец выполнения типового расчета №4 по разделу "Криволинейные интегралы"

Вариант №1

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x} dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ 2)$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2x - y)dx + \left(5y^2 - 4x\right)dy$, где L - парабола $y = x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy$ в положительном направлении, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$.

Решение

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x} dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ 2)$.

Решение. Т.к.кривая L задана в декартовой системе координат, то

$$dl=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx=\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\right]^2}dx=\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\cdot 2x\right]^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx.$$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{4y}{x}dl=\int\limits_1^2 \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_1^2 2x\sqrt{1+x^2}dx=\left|\begin{matrix}\textit{заносим } 2x \textit{ под знак}\\ \textit{дифференциала}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_1^2\sqrt{1+x^2}d\left(x^2\right)=\int\limits_1^2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=\left.\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{2}{3}\left(\left(1+4\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=5,57$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L(2x-y)dx+\left(5y^2-4x\right)dy$, где L - парабола $y=x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

Решение. Кривая L задана в декартовой системе координат, поэтому

$$dy=\left(x^2\right)'dx=2xdx.$$

Подставляя в заданный интеграл $y=x^2,\ dy=2xdx$, имеем

$$\int\limits_L(2x-y)dx+\left(5y^2-4x\right)dy=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left(5\left(x^2\right)^2-4x\right)2xdx=$$

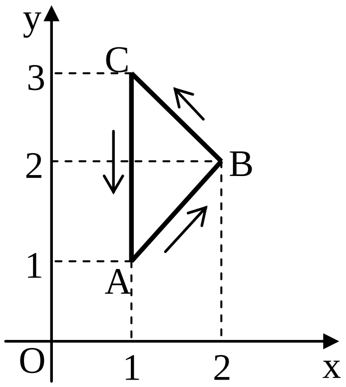
$$=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left(10x^5-8x^2\right)dx=\int\limits_0^2\left(2x-x^2+10x^5-8x^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(2x-9x^2+10x^5\right)dx=\left.\left(2\frac{x^2}{2}-9\frac{x^3}{3}+10\frac{x^6}{6}\right)\right|_0^2=4-3\cdot 8+\frac{10}{6}\cdot 64=4-24+\frac{320}{3}=$$

$$=\frac{320}{3}-20=\frac{320-60}{3}=\frac{260}{3}$$

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L\left(2x^2-y\right)dx+\left(3y+x^2\right)dy$ в положительном направлении, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$.

Решение. Контур L представляет замкнутый контур, состоящий из трех участков (сторон треугольника): AB, BC и CA. Рассмотрим искомый интеграл на каждом из этих участков, учитывая положительное направление обхода:



$$\oint\limits_{\Delta ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} .$$

Участок AB. Составим уравнение этого участка, используя уравнение прямой проходящей через две точки

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad y = x .$$

$$\int\limits_{AB} \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = \int\limits_1^2 \left[2x^2 - x + \left(3x + x^2\right)\cdot 1\right]dx = \int\limits_1^2 \left[3x^2 + 2x\right]dx =$$

$$= \left(x^3 + x^2\right)\Big|_1^2 = (8+4) - (1+1) = 10.$$

Участок BC. Уравнение этого участка имеет вид:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-2}{3-2} \quad \Rightarrow \quad y = 4 - x .$$

Тогда $y' = (4-x)' = -1$. Учитывая, что при движении из точки B в точку C x изменяется от 2 до 1, получаем

$$\int\limits_{BC} \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = \int\limits_2^1 \left[2x^2 - (4-x) + \left(3\cdot(4-x) + x^2\right)\cdot(-1)\right]dx =$$

$$\int\limits_2^1 \left[x^2 + 4x - 16\right]dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 16x\right)\Bigg|_2^1 = \left(\frac{1}{3} + 2 - 16\right) - \left(\frac{8}{3} + 8 - 32\right) = \frac{23}{3}.$$

Участок CA. Уравнение этого участка: $\dfrac{x-1}{1-1} = \dfrac{y-1}{3-1} \quad \Rightarrow \quad x = 1$.

Заменив в подынтегральной функции x на 1, x' на 0, и учитывая, что при перемещении из точки C в точку A y изменяется от 3 до 1, имеем

$$\int\limits_{CA} \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = \int\limits_3^1 \left[\left(2\cdot 1^2 - y\right)\cdot 0 + 3y + 1^2\right]dy = \int\limits_3^1 \left[3y + 1\right]dy =$$

$$= \left(3\frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_3^1 = \left(\frac{3}{2} + 1\right) - \left(\frac{27}{2} + 3\right) = -14.$$

Тогда искомый интеграл равен $\oint\limits_L \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = 10 + \dfrac{23}{3} - 14 = \dfrac{11}{3}$.

<u>**3 СЕМЕСТР**</u>

Образец выполнения типового расчета №1 по разделу "Ряды"
Вариант №1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n!}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$
$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0, \\ 2, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам
$$f(x) = x - 1, \quad x \in (0;1)$$

Решение

Задание 1. Так как в числителе и знаменателе стоят многочлены, то для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Выберем в качестве эталонного ряда ряд в виде отношения переменных в максимальной степени, стоящих в числителе и знаменателе, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который является расходящимся.

Тогда,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \quad (\ne 0 \ne \infty).$$
Следовательно, ряды ведут себя одинаково и т.к. эталонный ряд расходится, то и исследуемый ряд тоже расходится.

Задание 2. Применим радикальный признак Коши. Находим
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^2 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(\frac{2-0}{3+0}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 3. Общий член ряда содержит показательную функцию, поэтому для исследования его на сходимость применим признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)\cdot 3^n}{n^2\cdot 3^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(1+0+0)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 4.Проверим выполнение необходимого условия сходимости

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}}=\frac{5-0+0}{2+0}=\frac{5}{2}\neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то необходимое условие сходимости не выполняется и исследуемый ряд расходится.

Задание 5. Данный ряд является знакочередующимся. Следовательно, применяем теорему Лейбница.

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{2}{1}>\frac{2}{2!}=1>\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}>\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}>\ldots>\frac{2}{n!}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n!}=\frac{2}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится. Выясним характер сходимости. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда, т.е. ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$, исследуем его на сходимость. Это знакоположительный ряд, общий член которого содержит факториал. Поэтому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)!}}{\frac{2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то ряд из модулей сходится, а следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задание 6. Данный ряд является полным степенным рядом, т.к. содержит все степени $x-3$, с коэффициентами $a_n=\frac{1}{n^2}$. Поэтому, для нахождения области сходимости можно воспользоваться радиусом сходимости в форме Даламбера

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=(1+0)^2=1.$$

Тогда интервал сходимости определится неравенством: $-R<x-3<R$, т.е. $-1<x-3<1,\ 2<x<4$.Проверим граничные точки, для чего подставим $x=2$ и $x=4$ в исследуемый степенной ряд.

$x=2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ - это знакочередующийся ряд. По теореме Лейбница:

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}>\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится (можно показать что абсолютно) и $x=2$ является точкой сходимости.

$x=4$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд, который сходится, т.к. показатель степени знаменателя $p=2>1$. Поэтому, $x=4$ также является точкой сходимости исследуемого степенного ряда.

Таким образом, область сходимости – это отрезок $x\in[2,4]$.

Задание 7. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Воспользуемся стандартным разложением функции e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

Заменим в нем x на $-6x^2$:

$$e^{-6x^2}=1+\frac{-6x^2}{1!}+\frac{\left(-6x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-6x^2\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-6x^2\right)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Область сходимости этого ряда $x\in(-\infty,+\infty)$ содержит отрезок интегрирования $[0;0{,}1]$, поэтому применим свойство почленного интегрирования степенных рядов:

$$\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx = \int_0^{0,1}\left(1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{6}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0,1-\frac{6}{1!}\frac{0,1^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{0,1^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{0,1^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{0,1^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$=0,1-0,002+0,000036-\ldots=$$

$$=\left|\textit{с учетом точности } \varepsilon=0,001\right|\approx 0,1-0,002=0,098.$$

Задание 8. Данная функция является *нечетной* 2π -периодической функцией, следовательно коэффициенты $a_0=0$ и $a_n=0$, а $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$. На интервале $(0,\pi)$ $f(x)=2$, поэтому

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{4}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{4}{\pi n}(\cos\pi n-\cos 0)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi(2k-1)}, & \textit{если } n=2k-1 \quad (\textit{т.е. } n-\textit{нечетное})\\ 0, \quad \textit{если } n=2k & (\textit{т.е. } n-\textit{четное})\end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x$$

Задание 9. Т.к. требуется разложить функцию в ряд по косинусам, то интервал $(0,1)$ представляет собой половину периода, т.е. $T=2l=2$, $l=1$. На второй половине периода $(-1,0)$ продлеваем ее четным образом, т.е. полагаем $b_n=0$, а

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx=\frac{2}{1}\int_0^{1}(x-1)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^{1}=2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-1,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)\cos\left(\frac{\pi n x}{1}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{применим формулу интегрирования по частям} & \int_a^b UdV = UV\big|_a^b - \int_a^b VdU \\ U = x-1, & dU = (x-1)'\,dx = dx \\ dV = \cos(\pi n x)dx, & V = \int \cos(\pi n x)dx = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n x) \end{array} \right| =$$

$$= 2\left((x-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n x)dx \right) =$$

$$= 2\left((1-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n) - (0-1)\frac{1}{\pi n}\sin(0) - \frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n x)\right)\Big|_0^1 \right)$$

$$= 2\left(0 - 0 + \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\cos(\pi n) - \cos(0)\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k \quad (\text{т.е. } n - \text{четное}) \\ \dfrac{-4}{\pi^2 (2k-1)^2}, & \text{при } n = 2k-1 \quad (\text{т.е. } n - \text{нечетное}) \end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2k-1)^2}\cos\pi(2k-1)x$$

Образец выполнения типового расчета №2 по разделу "Элементы теории поля"
Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u = 2x^2 + 5z\cos y + 6z$ ***в точке*** $M_0(-1;0;-2)$ ***по направлению от точки*** M_0 ***к точке*** $M_1(1;0;0)$.

Решение.

Найдем вектор $\overline{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{M_0M_1}=(2;0;2);\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{4+0+4}}=\frac{1}{3};\ \cos\beta=0;\ \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{4+0+4}}=\frac{2}{3}.$$

Найдем частные производные функции и вычислим их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-5z\sin y;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=5\cos y+6;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=4\cdot(-1)=-4;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=-5\cdot(-2)\cdot\sin 0=0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5\cdot\cos 0+6=11.$$

Теперь найдем производную по направлению по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_{M_0}=-4\cdot\frac{1}{3}+0\cdot 0+11\cdot\frac{2}{3}=\frac{18}{3}=6.$$

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial\lambda}>0$, то функция в данном направлении возрастает.

2. Найти градиент скалярного поля $u=x^2+4x^3y+5xz-z^2$ ***в точке*** $M_0(1;2;-1)$ ***и его модуль.***

Найдем частные производные функции и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+12x^2y+5z;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=4x^3;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=5x-2z;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=2\cdot1+12\cdot1^2\cdot2+5\cdot(-1)=21;\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=4\cdot1^3=4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5\cdot1-2\cdot(-1)=7.$$

Теперь найдем градиент по формуле $grad u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$;

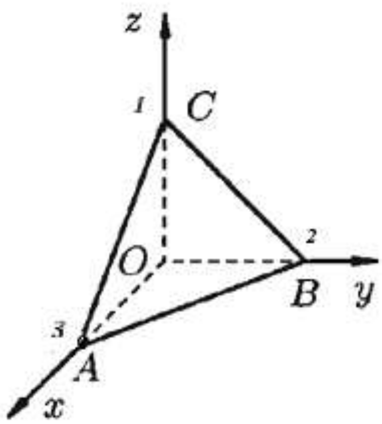
$$\left.grad\,u\right|_{M_0}=21\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k},$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\left|\left.grad\,u\right|_{M_0}\right|=\sqrt{21^2+4^2+7^2}=\sqrt{441+16+49}=\sqrt{506}.$$

3.Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=2z\overline{i}+(x+3y-2z)\overline{j}+(y+2z)\overline{k}$ ***через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P:*** $2x+3y+6z=6$ ***и координатными плоскостями по формуле Остроградского.***

Решение. Поток поля $K=\oiint\limits_S a_n ds$



Согласно формуле Остроградского $\oiint\limits_S a_n ds = \iiint\limits_V div\overline{a} \cdot dv$.

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} .$$

По условию $P = 2z$, $Q = x + 3y - 2z$, $R = y + 2z$.

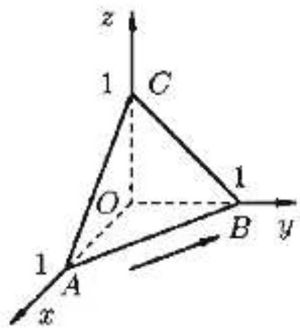
$$div\vec{a}(M) = 0 + 3 + 2 = 5$$

$$K = \oiint\limits_S a_n ds = \iiint\limits_V 5dv = 5\iiint\limits_V dv = 5 \cdot V_{пир} = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot CO = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5$$

4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M) = y\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$; **p:** $x + y + z = 1$.



Решение.

Согласно определению

$$C = \oint\limits_L ydx + (y+z)dy + (x-y)dz .$$

$$\oint\limits_L = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} .$$

На отрезке *AB*: $z = 0$, $x + y = 1$, $y = 1 - x$, $dy = -dx$, $dz = 0$, следовательно

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_0^1 (1-x)dx + (1-x-0)(-dx) = \int\limits_0^1 0dx = 0 .$$

На отрезке *BC*: $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy$, $dx = 0$, следовательно

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_1^0 (y + (1-y))dy + (0-y)(-dy) = \int\limits_1^0 (y+1)dy = \left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{3}{2} .$$

На отрезке *CA*: $y = 0$, $x + z = 1$, $z = 1 - x$, $dz = -dx$, $dy = 0$, следовательно

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 0 + 0 + (x-0)(-dx) = \int\limits_0^1 (-x)dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2} .$$

$C = 0 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$.

5. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (x^2y - 3z)\bar{i} - x^2yz\,\bar{j} + (xy^3 + z)\bar{k}$ **.**

Решение.

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

По условию $P = x^2y - 3z$, $Q = -x^2yz$, $R = xy^3 + z$.

Найдем частные производные $\frac{\partial R}{\partial y} = 3xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -x^2y$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -3$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^3$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xyz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$.

$$rot\vec{a}(M) = \left(3xy^2 + x^2y\right)\vec{i} + \left(-3 - y^3\right)\vec{j} + \left(-2xyz - x^2\right)\vec{k}$$

6. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M) = (3x - 4yz)\bar{i} + (3y - 4xz)\bar{j} + (3z - 4xy)\bar{k}$ ***потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля*** $\vec{a}(M)$ ***найти его потенциал.***

Решение.

Вычислим дивергенцию поля по формуле $div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

По условию $P = 3x - 4yz$, $Q = 3y - 4xz$, $R = 3z - 4xy$.

$div\vec{a}(M) = 3 + 3 + 3 = 9 \neq 0$, следовательно поле не соленоиальное.

Вычислим ротор поля, для этого найдем частные производные

$\frac{\partial R}{\partial y} = -4x$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -4x$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -4y$, $\frac{\partial R}{\partial x} = -4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4z$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -4z$.

$rot\vec{a}(M) = \left(-4x + 4x\right)\vec{i} + \left(-4y + 4y\right)\vec{j} + \left(-4z + 4z\right)\vec{k} = 0$, следовательно поле потенциальное. Найдем потенциал поля, используя формулу

$$U(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi,y_0,z_0)d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\xi,z_0)d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\zeta + C$$

В качестве фиксированной точки выберем начало кооринат $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$P(\chi, y_0, z_0) = 3\chi, \quad Q(x, \xi, z_0) = 3\xi, \quad R(x, y, \zeta) = 3\zeta - 4xy.$$

$$U(x,y,z) = \int_0^x 3\chi d\chi + \int_0^y 3\xi d\xi + \int_0^z (3\zeta - 4xy) d\zeta + C = \left.\frac{3\chi^2}{2}\right|_0^x + \left.\frac{3\xi^2}{2}\right|_0^y + \left.\left(\frac{3\zeta^2}{2} - 4xy\zeta\right)\right|_0^z +$$

$$+C = \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + \frac{3z^2}{2} - 4xyz + C$$

Образец выполнения типового расчета №3 по разделу «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $xy' + y = 0,$**. (Ответ представить в виде (φ(*x*,*y*)=*C*)).**

Решение. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{или} \quad x\frac{dy}{dx} = -y.$$

Разделив переменные, получим уравнение

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим общий интеграл:

$$\ln|y| = -\ln|x| + C.$$

Поскольку *C*-произвольная постоянная, то мы можем взять ее в логарифмическом виде, т.е. положить $C = \ln|C|$. Тогда наше общее решение примет вид

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Пользуясь свойством логарифмов, перепишем последнее равенство в виде

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

откуда $y = \dfrac{C}{x}$ - общее решение нашего уравнения или *xy*=C.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(x + y)dx = xdy$.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом $xdy = -(x + y)dx$ или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \dfrac{y}{x}}{1}.$$

Сделаем замену переменной $\dfrac{y}{x}=t$ или $y=xt$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=t+x\cdot\dfrac{dt}{dx}$, и уравнение примет вид:

$$t+x\cdot\frac{dt}{dx}=-1-t,$$

$$x\cdot\frac{dt}{dx}=-1-2t. \qquad (3)$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{dt}{2t+1}=-\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем его:

$$\int\frac{dt}{2t+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

или

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(2t+1)}{2t+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\ln|2t+1|=-\ln|x|+\ln C.$$

Используя свойства логарифмов, получим общий интеграл уравнения (3):

$$2t+1=\frac{C}{x^2}.$$

Так как $t=\dfrac{y}{x}$, то $2\dfrac{y}{x}+1=\dfrac{C}{x^2}$ или $2xy+x^2=C$, откуда $y=\dfrac{C-x^2}{2x}$ - общее решение дифференциального уравнения.

Задача 3. Найти решение задачи Коши $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^3$, $y|_{x=0}=1$

Решение: Уравнение линейное $P(x)=\dfrac{2}{x+1}$, $Q(x)=(x+1)^3$, поэтому полагаем $y=u\cdot v$.Тогда $y'=\dfrac{dy}{dx}=u\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{du}{dx}v$. Подставляя в исходное уравнение y и $\dfrac{dy}{dx}$, получим:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-\frac{2}{x+1}uv=(x+1)^3.$$

Группируем второй и третий члены и выносим *v* за скобки:

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-\frac{2}{x+1}u\right)=(x+1)^3.$$

Для определения u и *v*получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}-\dfrac{2}{x+1}u=0,\\ u\dfrac{dv}{dx}=(x+1)^3.\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx}=\frac{2}{x+1}u\,.$$

Разделив переменные в этом уравнении, получаем

$$\frac{du}{u}=\frac{2dx}{x+1}.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$\ln|u|=2\ln|x+1|$$

(в силу произвольности функции u, считаем, чтоC=0) и, окончательно, получим $u=(x+1)^2$.

Подставляя найденную функцию $u=(x+1)^2$ во второе уравнение системы, находим функцию v:

$$(x+1)^2\frac{dv}{dx}=(x+1)^3.$$

Отсюда $\dfrac{dv}{dx}=(x+1)$ и $v=\dfrac{(x+1)^2}{2}+C.$

Следовательно, общее решение данного уравнения $y=uv$ имеет вид:

$$y=(x+1)^2\cdot\left[\frac{(x+1)^2}{2}+C\right]=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2.$$

Находим частное решение, удовлетворяющее условию: $y\big|_{x=0}=1$:

$$1=\frac{(0+1)^4}{2}+C(0+1)^2\Rightarrow C=\frac{1}{2}.$$

Ответ: Частное решение имеет вид $y=\dfrac{(x+1)^4}{2}+\dfrac{1}{2}(x+1)^2.$

Задача 4. Решить задачу Коши $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$, $y(0)=\pi/2$.

Решение. Данное уравнение является линейным относительно функции $x(y)$ и её первой производной $x'(y)=\dfrac{dx}{dy}$, тогда :

$$\frac{dx}{dy}-x\cos y=\sin 2y. \qquad (1)$$

Данное уравнение решим методом ***вариации произвольной постоянной***. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dx}{dy}-x\cos y=0$$

Его общее решение имеет вид $x=Ce^{\sin y}$.

Решение уравнения (11) ищем в виде

$$x = C(y)e^{\sin y}, \qquad (2)$$

где $C(y)$ - неизвестная функция. Подставляя (12) в (11), получим

$$C'(y)e^{\sin y} + C(y)e^{\sin y}\cos y - C(y)e^{\sin y}\cos y = \sin 2y,$$

откуда $C'(y) = e^{-\sin y}\sin 2y$.

Интегрируя по частям, получим

$$C(y) = \int e^{-\sin y}\sin 2y dy = 2\int e^{-\sin y}\cos y \sin y dy =$$

$$= 2\int \sin y d\left(-e^{-\sin y}\right) = \begin{vmatrix} u = \sin y; & du = \cos y dy \\ dv = d(-e^{-\sin y}); & v = -e^{-\sin y} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-\sin y e^{-\sin y} + \int e^{-\sin y}\cos y dy\right) = 2\left(-\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y}\right) + C$$

В итоге:

$$C(y) = -2e^{-\sin y}\left(1 + \sin y\right) + C \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$x = (-2e^{-\sin y}\left(1 + \sin y\right) + C)e^{\sin y} = Ce^{\sin y} - 2\left(1 + \sin y\right)..$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(0)=\pi/2$:

Ce-2(1+1)=0 или C=4/e.

Ответ. Частное решение имеет вид $x=4e^{\sin y-1}-2(1+\sin y)$

Задача 5. Найти решение задачи Коши. $x^2y^2y' + xy^3 = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=-1$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x^2y^2:

$$y' + \frac{1}{x}y = y^{-2}\frac{1}{x^2}.$$

Это уравнение Бернулли, где $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$, $n = -2$. Заменяя функцию yпо формуле $y=uv$, получим $y' = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$, и исходн**ое уравнение перепишется в виде:**

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{u^2v^2x^2}$$

или

$$u\frac{dv}{dx} + v(\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u) = \frac{1}{u^2v^2x^2}.$$

Для определения u и vполучаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{x}u = 0, \\ u\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{u^2v^2x^2}. \end{cases}$$

Функцию u находим из первого уравнения системы:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} = 0.$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя в нем переменные, получаем

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}.$$

Отсюда, интегрируя, имеем $\ln|u| = -\ln|x|$ или

$$u = \frac{1}{x}.$$

Подставляя найденноеuво второе уравнение системы, получаем

$$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{v^2x^2},$$

или

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} = \frac{1}{v^2}.$$

Разделив переменные, имеем

$v^2dv = xdx,$ откуда $\dfrac{v^3}{3} = \dfrac{x^2}{2} + C_1$или, положив$C = 3C_1$, получим

$$v^3 = \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения:

$$y^3 = u^3v^3 = \frac{1}{x^3}\left(\frac{3}{2}x^2 + C\right).$$

Найдем частное решение: $(-1)^3 = \dfrac{1}{1^3}\left(\dfrac{3}{2}\cdot 1^2 + C\right) \Rightarrow -1 = \dfrac{3}{2} + C \Rightarrow C = -\dfrac{5}{2}.$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y^3 = \frac{1}{x^3}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}\right).$$

Задача 6. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(2y-3)dx + (2x+3y^2)dy = 0$.

Решение. **Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:**$M(x,y) = 2y - 3, \quad N(x,y) = 2x + 3y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y-3) = 2; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3y^2) = 2;$$

так что $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, т.е. условие (3) выполнено. Таким образом, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Поэтому:

1) **Из условия** $\dfrac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ находим $U(x,y)=\int(2y-3)dx=2xy-3x+\varphi(y),$

(6)

где $\varphi(y)$ **берем вместо постоянной *C*.**

2) Дифференцируем найденное $U(x,y)$ по переменной *y*:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy-3x+\varphi(y))=2x+\varphi'(y)$$

3)Приравняем найденную производную к функции $N(x,y)$, так как она является производной искомой функции $U(x,y)$ по переменной *y*:

$2x+\varphi'(y)=2x+3y^2$ откуда $\varphi'(y)=3y^2$.

Интегрируя последнее равенство, находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=\int 3y^2dy=y^3+C.$$

4)Подставляя найденное значение $\varphi(y)$ **в (6), получим искомую функцию**

$U(x,y)=2xy-3x+y^3+C.$

5)**Приравняем** $U(x,y)=C$ **−тогда получим общий интеграл:**

$$u(x,y)=2xy-3x+y^3=\mathrm{C}$$

Ответ:$u(x,y)=2xy-3x+y^3=\mathrm{C}$**- общий интеграл искомого уравнения.**

Образец выполнения типового расчета №4 по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений»

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y''-2xy'=0$.

Решение.

$$(1+x^2)y''-2xy'=0$$

$$y'-p(x)_1\ y''=p'$$

$$(1+x^2)p'-2xp'=0$$

$$\int dp/p=\int 2xdx/(1+x^2)$$

$$\ln|p|=\ln|1+x^2|+\ln c_1$$

$$p=c_1(1+x^2)$$

$$dy/dx=c_1(1+x^2)$$

$$dy=c_1(1+x^2)dx$$

$y=c_1(x+x^3/3)+c_2$ - общее решение.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$1+y'^2=2yy''$$

Решение. Это дифференциальное уравнение II - го порядка, не содержащее x в явном виде. Применим подстановку $y'=p(y)$ и тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Получим уравнение I - го порядка относительно p:

$$1+p^2=2yp\frac{dp}{dy}. \qquad (1)$$

Разделим переменные:

$$\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y},$$

отсюда, интегрируя, получим

$$\ln(1+p^2)=\ln|y|+\ln C_1$$

или

$$1+p^2=C_1y,$$

$p=(C_1y-1)^{1/2}$ -общее решение уравнения (1).

Заменив p на $\dfrac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=(C_1y-1)^{1/2},$$

Отсюда, разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{(C_1 y - 1)^{1/2}} = dx$$

или, интегрируя это уравнение, получим

$\frac{2}{C_1}(C_1 y - 1)^{1/2} = x + C_2$ - общий интеграл уравнения (1).

Задача 3. Найти общее решение уравнения

$y'' + 3y' + 2y = x^2$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $\boldsymbol{y'' + 3y' + 2y = 0}$.. Для этого составим характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$ и найдем его корни:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1,\ k_1 = \frac{-3-1}{2} = -2, \quad k_2 = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Корни характеристического уравнения ***действительные и различные***, следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид

$y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

Находим $y_{чн}(x)$. Правая часть заданного уравнения имеет вид $P_2(x)$, $\alpha = 0$***не совпадает с корнями*** k_1 ***и*** k_2 ***характеристического уравнения.*** Следовательно, частное решение $y_{чн}(x)$ ищем в виде $y_{чн} = Q_2(x)$ или

$y_{чн}(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Для определения A, B, C найдем $y'_{чн}$ и $\boldsymbol{y''_{чн}}$:

$y'_{чн} = 2Ax + B$; $y''_{чн} = 2A$.

Подставим в данное уравнение выражение для $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

или

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = x^2. \qquad (1)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения (1), найдем A, B, C:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2B = 0 \\ 2A + 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -3/2 \\ C = 7/4 \end{cases}.$$

Таким образом, $y_{чн}(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{4}$ и общее решение имеет вид

$$y_{он}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}.$$

Задача 4. Найти общее решение уравнения

$$y''-7y'+6y=(x-1)e^x.$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-7y'+6y=0.$Для этого составим характеристическое уравнение $k^2-7k+6=0$ и найдем его корни:

$$D=(-7)^2-4\cdot 6=25,\ k_1=\frac{7-5}{2}=1,\ k_2=\frac{7+5}{2}=6.$$

Корнихарактеристического уравнения ***действительные различные***. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{оо}=C_1e^x+C_2e^{6x}.$$

Находим $y_{чн}(x)$. Правая часть заданного уравнения имеет вид$P_1(x)\cdot e^x$**.** Так $\alpha=1$***совпадает с однимкорнем характеристического уравнения,*** то частное решение $y_{чн}(x)$ ищем в виде $y_{чн}=xQ_1(x)e^x$ или

$$y_{чн}(x)=x(Ax+B)\cdot e^x=(Ax^2+Bx)\cdot e^x.$$

Найдем производные $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн}=(2Ax+B)\cdot e^x+(Ax^2+Bx)\cdot e^x=(Ax^2+2Ax+Bx+B)\cdot e^x,$$
$$y''_{чн}=(2Ax+2A+B)e^x+(Ax^2+2Ax+Bx+B)e^x=(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)e^x.$$

Подставляя $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$в уравнение (9), получим:

$$(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)e^x-7(Ax^2+2Ax+Bx+B)\cdot e^x+$$
$$+6(Ax^2+Bx)\cdot e^x=(x-1)e^x.$$

или

$$(-10Ax-5B+2A)\cdot e^x=(x-1)\cdot e^x.$$

Сокращая на e^x, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{array}{l|l} x\ : & \left\{\begin{array}{r} -10A=1,\\ -5B+2A=-1. \end{array}\right. \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\dfrac{1}{10},\\ B=\dfrac{4}{25}. \end{array}\right.$$

Следовательно, частным решением является функция

$$y_{чн}(x)=x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{4}{25}\right)e^{x}=\left(\frac{4}{25}x-\frac{1}{10}x^{2}\right)e^{x},$$

а общим -

$$y_{он}=C_1e^{x}+C_2e^{6x}+\left(\frac{4}{25}x-\frac{1}{10}x^{2}\right)e^{x}.$$

Задача 5. Найти общее решение уравнения

$y''-5y'+6y=8\sin 3x$.

Решение.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'+6y=0$. Для этого составим характеристическое уравнение $k^2-5k+6=0$ и найдем его корни:

$$D=(-5)^2-4\cdot 6=1;\quad k_1=\frac{5-1}{2}=2,\quad k_2=\frac{5+1}{2}=3..$$

Корни характеристического уравнения ***действительные и различные***, следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид

$y_{оо}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

Число $\alpha+i\beta=3i$ -- чисто мнимое, не совпадающее с корнями $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$ характеристического уравнения . Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{чн}=A\cos 3x+B\sin 3x.$$

Найдем производные $y'_{чн}, y''_{чн}$:

$y'_{чн}=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$,

$y''_{чн}=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$.

Подставив в уравнение $y''-5y'+6y=8\sin 3x$ $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$**,** получаем равенство

$$(-9A-15B+6A)\cos 3x+(-9B+15A+6B)\sin 3x=8\sin 3x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$ правой и левой частей уравнения

$$\begin{array}{l}\cos 3x:\\ \sin 3x:\end{array}\begin{cases}-9A-15B+6A=0,\\ -9B+15A+6B=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3A+15B=0\\ 15A-3B=8\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{20}{39},\quad B=\frac{8}{78}.$$

Таким образом, $y_{чн} = -\dfrac{20}{39}\cos 3x + \dfrac{8}{78}\sin 3x$

$$y_{он} = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} - \frac{20}{39}\cos 3x + \frac{8}{78}\sin 3x.$$

Задача 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}.$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

и найдем его корни:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0; \quad k_1 = k_2 = 1.$$

Так как корни характеристического уравнения ***действительные и равные***, то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{оо} = C_1e^x + C_2xe^x = e^x(C_1 + C_2x)..$$

Находим $y_{чн}(x)$. Так как правая часть уравнения есть сумма двух функций $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = e^{-x}$, то частное решение будем искать в виде $y_{чн} = y_{ч1} + y_{ч2}$, где $y_{ч1}$ - частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$, а $y_{ч2}$ - частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

Найдем частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = \sin x.$$

Правая часть имеет вид (18), где $M = 1, N = 0, \beta = 1$ и тогда $\alpha \pm i\beta = i$ и значит не совпадает с корнями характеристического уравнения $k_1 = k_2 = 1$. Поэтому частное решение $y_{ч1}$ будем искать в виде (19):

$$y_{ч1} = A\cos x + B\sin x.$$

Далее находим

$$y'_{ч1} = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y''_{ч1} = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставив $y_{ч1}$, $y'_{ч1}$ и $y''_{ч1}$ в наше уравнение $y'' - 2y' + y = \sin x$, получим

$$(-A - 2B + A)\cos x + (-B + 2A + B)\sin x = \sin x$$

или

$$-2B\cos x + 2A\sin x = \sin x$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ правой и левой частей уравнения:

$$\begin{array}{l} \cos x: \\ \sin x: \end{array}\left|\begin{cases} -2B=0, \\ 2A=1 \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} B=0, \\ A=1/2. \end{cases}$$

Таким образом $y_{ч1}=\dfrac{1}{2}\cos x$.

Найдем частное решение второго уравнения

$y''-2y'+y=e^{-x}$.

Правая часть $f_2(x)=e^{-x}$ имеет вид (5), где $P_n(x)=1,\quad \alpha=-1$ и значит не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение $y_{ч2}$ будем искать в виде

$y_{ч2}=De^{-x}$.

Тогда $y'_{ч2}=-De^{-x}$ и $y''_{ч2}=De^{-x}$. Подставив $y_{ч2}$, $y'_{ч2}$ и $y''_{ч2}$ в уравнение $y''-2y'+y=e^{-x}$, получим $De^{-x}+2De^{-x}+De^{-x}=e^{-x}$ или $4De^{-x}=e^{-x}$ и отсюда $D=\dfrac{1}{4}$. Поэтому $y_{ч2}=\dfrac{1}{4}e^{-x}$. Таким образом, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{он}=C_1e^x+C_2e^x x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^{-x}.$$

Задача 7. Найти решение задачи Коши $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$., y(0)=1, y'(0)=2

Решение. Соответствующее линейное однородное уравнение - $y''+4y=0$. Его характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm 2i$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{00}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$$

Общее решение данного неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_{чн}=C_1(x)\sin 2x+C_2(x)\cos 2x,$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ - неизвестные функции от x. Для их нахождения составляем систему (4), которая в этом конкретном случае имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin 2x+C_2'(x)\cos 2x=0 \\ 2C_1'(x)\cos 2x-2C_2'(x)\sin 2x=\dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}.$$

Решаем эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ методом Крамера. Находим

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}=-2\sin^2 2x-2\cos^2 2x=-2(\sin^2 2x+\cos^2 2x)=-2\neq 0.$$

Так определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение.
Находим частные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix}=1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}=tg 2x.$$

Тогда по формулам Крамера имеем

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/2; \; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -tg2x/2. \qquad (34)$$

Откуда интегрированием (34), получаем $C_1(x) = -x/2 + \overline{C_1}$, $C_2(x) = \ln|\cos 2x|/4 + \overline{C_2}$. Следовательно, решение неоднородного уравнения (33) окончательно имеет вид

$$y_{он} = \overline{C}_1 \sin 2x + \overline{C_2} \cos 2x \text{ - } \frac{x}{2} \sin 2x + \cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|.$$

Используя начальные условия, получаем, C_1=1, C_2=1. Тогда частное решение имеет вид

$y_{он} =$ sin2x+cos2x-(x/2)sin2x+cos2$x$ln|cos2x|.

Задача 8. Найти е решение системы дифференциальных уравнений .

$$\begin{cases} dx/dt = -7x + y \\ dy/dt = -2x - 5y \end{cases}$$

Решение. Одно из уравнений системы (например, первое уравнение, в этом случае стремятся получить дифференциальное уравнение относительно x) продифференцируем почленно по t и получим уравнение второго порядка.

$$x'' = -7x' + y'$$

Выразим из первоначальной системы уравнений y, y' через x, x' т.е.

$$y = x' + 7x, \qquad y' = -2x - 5y = -2x - 5(x' + 7x) = -5x' - 37x$$

И подставим в уравнение второго порядка относительно x

$$x'' = -7x' + y' = -12x' - 37x$$

Мы получили уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения будет:

$$x = c_1 e^{-6t} \cos t + c_2 e^{-6t} \sin t$$

Находим производную и, подставляя x, x' в значение для y получим:

$$y = c_1 e^{-6t} (\cos t - \sin t) + c_2 e^{-6t} (\sin t + \cos t)$$

Задание 9. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

Решение. При решении будем использовать метод исключения.

Возьмем второе уравнение системы $\frac{dy}{dt} = -x + 3y$ и выразим из него x:

$$x = -\frac{dy}{dt} + 3y \quad (*)$$.

Продифференцируем обе части полученного уравнения по *t*:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}$$

По-другому это выглядит следующим образом:

$$(x)' = (-y' + 3y)$$
$$x' = -y'' + 3y'$$

Подставим $x = -\frac{dy}{dt} + 3y \quad (*)$ и $\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}$ в первое уравнение системы $\frac{dx}{dt} = -2x + 4y$:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = -2\left(-\frac{dy}{dt} + 3y\right) + 4y$$

Упростим это уравнение:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 2\frac{dy}{dt} - 6y + 4y$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

Получили обыкновенное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. С производными оно выглядит следующим образом:

$$y'' - y' - 2y = 0$$.

Далее необходимо составить и решить характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$
$$D = 1 + 8 = 9; \ \sqrt{D} = 3$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ – мы получили различные действительные корни, поэтому:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$.

Продифференцируем полученное решение по t:

$$y'(t) = (C_1e^{-t} + C_2e^{2t})' = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$$

Теперь подставим $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$ и $y'(t) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$ в уравнение (*):

$$y'(t) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$$

Упростим полученное уравнение:

$$x(t) = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$$

Итак, мы нашли обе функции.

Общее решение системы будет:

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \end{cases}, \quad где \quad C_1, C_2 - const$$

Подставляя начальные условия в общее решение системы получим систему уравнений относительно C_1 и C_2. Почленно вычитая из первого уравнения второе уравнение системы, получаем

$$\begin{cases} x(0) = 4C_1 + C_2 = 3 \\ y(0) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 1;\ C_2 = -1$$

Подставим найденные коэффициенты в систему:

$$\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} - e^{2t} \\ y(t) = e^{-t} - e^{2t} \end{cases}$$

Это и будет частное решение системы.

4 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета №1 по разделу «Теория вероятностей»

1. На карточках написаны числа от 30 до 40. Наудачу извлекают одну карточку. Найти вероятность того, что извлекут карточку с числом кратным трем.

Решение.

Введем событиеA – число кратно трем.

$n = 11$ (можно извлечь любую из 11 карточек),

$m = 4$ (чисел делящихся на три будет всего четыре: 30; 33; 36; 39).

$P(A)=\frac{4}{11}$.

2. Телефонный номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

Решение.

Введем событие *А*–все цифры различны.

$n=10^6$(столько всех шестизначных номеров существует, считая 000000 – возможным).

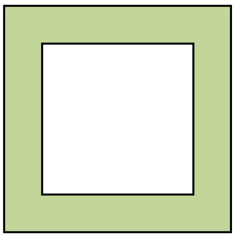
$m=A_{10}^6=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$ (столько будет существовать номеров с различными цифрами).

$$P(A)=\frac{A_{10}^6}{10^6}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{10^6}=0.1512.$$

3. В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

Решение.

Закрасим в квадрате множество точек, удаленных от ближайшей стороны меньше, чем на 1 см.



Площадь квадрата со стороной 4 см равна 16 см$^{2.}$ Площадь закрашенной части квадрата

16см^2 – 4см^2 = 12см^2.

Значит, искомая вероятность равна $P(A)=\frac{s}{S}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

4. ***В магазин поступила партия обуви одного фасона, размера, но разного цвета. В ней 40 пар черного цвета, 26 – коричневого , 22 – красного, 12 –синего. Коробки с обувью оказались нерассортированными по цвету. Найти вероятность того, что наудачу взятая коробка, окажется с обувью красного или синего цвета.***

Решение.

Введем событие *А*- взятая наудачу коробка с обувью красного или синего цвета. Введем дополнительные два события :

В – коробка с обувью красного цвета;

С- коробка с обувью синего цвета.

Алгебра события $A=B+C$ (или коробка с обувью красного цвета или синего). События*В*, *С* несовместные. По теореме сложения имеем

$$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{22}{100}+\frac{12}{100}=\frac{34}{100}=0,34.$$

5. На каждой отдельной карточке написаны буквы, составляющие слово «МАШИНА» Карточки перемешали и положили в пакет. После чего извлекли одну за другой (без возвращения) четыре карточки. Найти вероятность того, что в порядке выхода карточек можно прочитать слово «ШИНА».

Решение.

Введем событие*А* – можно прочитать слово «ШИНА».

Введем дополнительно еще события

A_1 - первая буква «Ш»; A_2 - вторая буква «И»; A_3 - третья буква «Н»;

A_4 - четвертая буква «А».

Алгебра события $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4$(одновременно должны наступить события и первая буква «Ш» и вторая «И» и третья «Н» и четвертая «А»). События A_1,A_2,A_3,A_4 - зависимые.

По теореме умножения для зависимых событий:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{180}.$$

6***. Два студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятность того, что задачу решит первый студент равна 0,7; для второго студента эта вероятность составляет 0,8. Найти вероятности следующих событий:А – оба студента решат задачу;***

В – только первый решит задачу.

Решение.

Пусть событие K_1 состоит в том, что первый студент решит задачу; K_2 - второй студент решит задачу. По условию $P(K_1)=0,7$, $P(K_2)=0,8$.

$\bar{K}_1$ - первый студент не решит задачу, $\bar{K}_2$ - второй студент не решит задачу.

$P(\bar{K}_1)=1-P(K_1)=0,3$, $P(\bar{K}_2)=1-P(K_2)=0,2$.

Событие А равносильно событию “ первый студент решит задачу и второй студент решит задачу”, т.е. $A=K_1\cdot K_2$.

Причем события K_1, K_2 независимые. По теореме умножения для независимых событий $P(A)=P(K_1)\cdot P(K_2)=0,7\cdot 0,8=0,56$.

Событие В равносильно событию “первый студент решит задачу и второй студент не решит задачу”, т.е. $B=K_1\cdot\bar{K}_2$.

$P(B)=P(K_1)\cdot P(\bar{K}_2)=0,7\cdot 0,2=0,14$.

7. На сборку поступают однотипные изделия из четырех цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0,04, 0,03, 0,06, 0,02. Первый цех поставляет 30 изделий, второй цех – 20, третий цех – 50, четвертый – 25. Изделия оказались перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется бракованным.

Решение.

Введем событие*А* – взятое наудачу изделие бракованное.

Возможные гипотезы: B_1- изделие изготовлено в первом цехе;

B_2 - изделие изготовлено во втором цехе; B_3- изделие изготовлено в третьем цехе; B_4 - изделие изготовлено в четвертом цехе.

Событие $A=B_1\cdot A+B_2\cdot A+B_3\cdot A+B_4\cdot A$.

Вероятность $P(A)$ будет вычисляться по формуле полной вероятности. Вычислим:

$$P(B_1)=\frac{30}{125},\quad P(B_2)=\frac{20}{125}, P(B_3)=\frac{50}{125},\quad P(B_4)=\frac{30}{125},$$

$$P_{B_1}(A)=0{,}04,\qquad P_{B_2}(A)=0{,}03, P_{B_3}(A)=0{,}06,\qquad P_{B_4}(A)=0{,}02.$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=\frac{30}{125}+\frac{20}{125}+\frac{50}{125}+\frac{25}{125}=1.$$

Вероятность события*А*:

$$P(A)=\frac{30}{125}\cdot 0{,}04+\frac{20}{125}\cdot 0{,}03+\frac{50}{125}\cdot 0{,}06+\frac{25}{125}\cdot 0{,}02=0{,}0424.$$

8. ***Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей на три класса, которые включают 20%, 50% и 30% водителей соответственно. Вероятности того, что в течение года водитель попадет в аварию, равны 0,01, 0,03 и 0,1 соответственно для каждого класса. Наугад выбранный водитель в течение года попал в аварию. Какова вероятность того, что он относится к первому классу?***

Решение

Обозначим через A событие – водитель попал в аварию.

Возможны следующие предположения (гипотезы): B_1 – водитель относится к первому классу, B_2 – ко второму, B_3 – к третьему.

Вероятности гипотез равны:

$$P(B_1)=0,2; \qquad P(B_2)=0,5; \qquad P(B_3)=0,3.$$

Условные вероятности того, что водитель попадет в аварию, при условии, что он относится к первому, второму, третьему классу соответственно равны:

$$P_{B_1}(A)=0,01; \qquad P_{B_2}(A)=0,03; \qquad P_{B_3}(A)=0,1.$$

Вероятность того, что попавший в аварию водитель относится к первому классу, по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}=$$

$$=\frac{0,2\cdot 0,01}{0,2\cdot 0,01+0,5\cdot 0,03+0,3\cdot 0,1}=0,043.$$

9. Всхожесть семян некоторого сорта растений равна 80%. Для опыта отбирается 5 семян. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян прорастет 3 семени. Не менее 3.

Будем считать высев 5 семян проведением пяти независимых испытаний. Для каждого из 5 посеянных семян вероятность прорасти постоянна $P(A)$=0,8. Вероятность противоположного события $P(\overline{A})=1-0,8=0,2$. Надо найти $P_5(3)$, т.е. вероятность того, что в 5 испытаниях событие A появится ровно 3 раза. Значит, n=5; p=0,8; q=0,2; k=3.

По формуле Бернулли имеем:

$P_5(3)=C_5^3\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^2=0,2048$;

$P_5(4)=C_5^4\cdot(0,8)^4\cdot(0,2)^1=0,4096$; $P_5(5)=C_5^5\cdot(0,8)^5\cdot(0,2)^0=0,32768$

$P_5(k\geq 3)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=0,02048+0,4096+0,32768=0,94208.$

10. Вероятность изготовления стандартной детали на автомате равна 0,95. Изготовлена партия в 200 деталей. Найти наивероятнейшее число нестандартных деталей и вероятность этого наивероятнейшего числа.

Решение:

По условию $n=200$; $q=0,95$; $p=1-0,95=0,05$.

Так как $n=200$ достаточно велико, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

$k_0=200\cdot 0,05=10$.

Вычислим вероятность $P_{200}(10)$, используя локальную теорему Лапласа:

$x=\dfrac{10-200\cdot 0,05}{\sqrt{200\cdot 0,05\cdot 0,95}}=0$. По таблице найдем $\varphi(0)=0,3989$.

$$P_{200}(10) = \frac{0{,}3989}{\sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} = \frac{0{,}3989}{\sqrt{9{,}5}} \approx 0{,}13.$$

11. Батарея состоит из трех орудий. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудия равна соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по цели один раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить график распределения. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение:

Введем случайную величину X – число попаданий в цель. Возможные значения величины:

$x_1 = 0$ - ни одно орудие не попало; $x_2 = 1$ - попало одно орудие;

$x_3 = 2$ - попали два орудия; $x_4 = 3$ - попали три орудия.

Величина X – дискретная. Вычислим вероятность каждого значения:

$p_1 = P(X = 0) = (1 - 0{,}5)(1 - 0{,}6)(1 - 0{,}8) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ (и первое и второе и третье орудия промахнулись);

$p_2 = P(X = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}26$ (первое орудие попало, второе и третье промахнулись или второе орудие попало, первое и третье промахнулись или третье орудие попало, первое и второе промахнулись);

$p_3 = P(X = 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}46$;

$p_4 = P(X = 3) = +0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$.

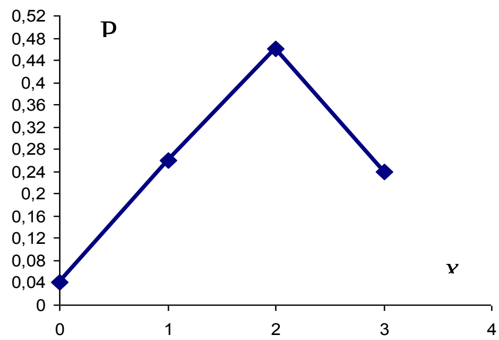
Закон распределения:

X	0	1	2	3	$\sum p_i$
p	0,04	0,26	0,46	0,24	1

Проверим правильность составленного закона

$\sum p_i = 1 \Rightarrow \quad 0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}46 + 0{,}24 = 1.$

Построим график распределения



Вычислим $M(X) = 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}26 + 2 \cdot 0{,}46 + 3 \cdot 0{,}24 = 1{,}9$.

Для дисперсии вычислим $M(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}04 + 1^2 \cdot 0{,}26 + 2^2 \cdot 0{,}46 + 3^2 \cdot 0{,}24 = 4{,}26$.

$D(X) = 4{,}26 - (1{,}9)^2 = 0{,}65$;

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}65} \approx 0{,}81$.

Найдем функцию распределения $F(x) = P(X < x)$:

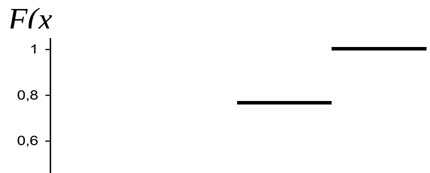
$F(x) = 0$, $x \le 0$;

при изменении $0 < x \le 1$, $F(x) = 0{,}04$;

при изменении $1 < x \le 2$, $F(x) = 0{,}04 + 0{,}26 = 0{,}3$;

при изменении $2 < x \le 3$, $F(x) = 0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}46 = 0{,}76$;

для всех $x > 3$, $F(x) = 1$.



$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0{,}04, & 0<x\le 1 \\ 0{,}3, & 1<x\le 2 \\ 0{,}76, & 2<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$

12. Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \alpha\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр α ;2) вычислить вероятность событий $1<X<1{,}5$.
3) Найти $M(X),\ D(X)$.

Решение:

1) Параметр α найдем из свойства функции плотности вероятности: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

Найдем $f(x)=F'(x)$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \alpha(2x-1), & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

Вычислим: $\int\limits_1^2 \alpha(2x-1)dx=\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{\alpha}{4}\cdot(9-1)=\frac{\alpha}{4}\cdot 8=2\alpha$.

Приравняем: $2\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$.

Функции $F(x)$, $f(x)$ принимают вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

2) Вычислим вероятность события $1<X<1{,}5$.

Используем формулу $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$:

Найдем $F(1{,}5)=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Big|_{x=1{,}5}=\frac{1}{2}\left(1{,}5^2-1{,}5\right)=0{,}375$, $F(1)=0$.

$P(1<X<1{,}5)=F(1{,}5)-F(1)=0{,}375$.

3) $M(X)=\int\limits_1^2 \frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\cdot xdx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(x^3-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{17}{24}$;

$$M(X^2)=\int_1^2 \frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\cdot x^2dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^4-x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\frac{49}{40};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{49}{40}-\left(\frac{17}{24}\right)^2\approx 0,7233.$$

13. ***Размер диаметра втулок, изготовленных на заводе, можно считать нормально распределенной случайной величиной с*** $M(X)=2{,}5$ ***см и*** $\sigma(X)=0{,}01$***см. Втулки годные, если их размер находится в пределах*** $2{,}5\pm 0{,}02$. ***Какой процент изготовленных втулок, являются браком?***

Решение:

Втулка будет негодной, если $|X-2{,}5|>0{,}02$, где X – случайная величина, - размер диаметра втулки.Вычислим сначала вероятность противоположного события $|X-2{,}5|\le 0{,}02$ по формуле $P\left(|X-M(X)|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

$$P\left(|X-2{,}5|\le 0{,}02\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}02}{0{,}01}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

Тогда $P\left(|X-2{,}5|>0{,}02\right)=1-0{,}9544=0{,}0456$.

Следовательно, $4{,}56\%\approx 5\%$ - втулок бракованных.

14. Среднее число дождливых дней в году в данном пункте равно 120. Какова вероятность того, что в этом пункте будет более 200 дождливых дней в году?

Решение:

Введем случайную величину X – число дождливых дней в году.

По условию $M(X)=120$, $\alpha=200$.

Согласно формуле $P\left(X>\alpha\right)\le\frac{M(X)}{\alpha}$, имеем $P\left(X>200\right)\le\frac{120}{200}=0{,}6$.

Следовательно $P\left(X>200\right)\le 0{,}6$.

Образец решения типового расчета №2 по разделу «Математическая статистика»

1. Обследование качества пряжи на крепость дало следующие результаты:

Крепость нити (г), x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
Число случаев, n_i	7	25	28	30	8	2

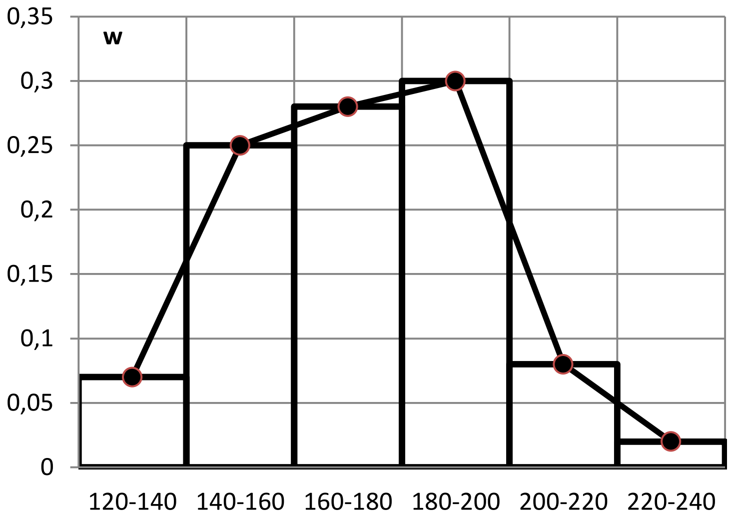
Требуется: 1) построить гистограмму и полигон относительных частот; 2) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график; 3) рассчитать моду и медиану; 4) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса; 5) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* - крепость нити;6) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения; 7) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию плотности и функцию распределения, найти интервальные оценки параметров нормального распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95; 8) проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

Решение:

1) Построим гистограмму и полигон относительных частот, для этого найдем относительные частоты (высоты соответствующих прямоугольников гистограммы) по формуле $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Для построения полигона на гистограмме соединим середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямых.

интервалы	n_i	ω_i
120-140	7	0,07
140-160	25	0,25
160-180	28	0,28
180-200	30	0,3
200-220	8	0,08
220-240	2	0,02
$\sum$	**100**	**1**

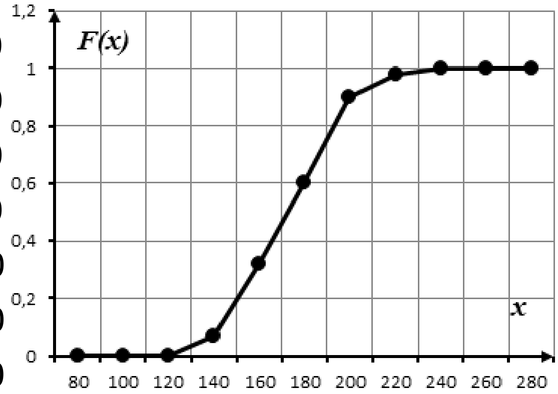


2) Найдем эмпирическую функцию распределения, для этого сначала найдем наколенные частоты

x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
n_i	7	25	28	30	8	2
n_x	7	32	60	90	98	100

Очевидно, что для всех $x \in (-\infty;120]$ функция распределения равна нулю. Пусть теперь $x \in (120;140]$. В этом случае число $\dfrac{n_x}{n}$ не определено, так как неизвестно, сколько выборочных значений случайной величины, принадлежащих этому интервалу, меньше x. Если $x = 140$, то $n_x = 7$, $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n} = \dfrac{7}{100} = 0,07$. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что точками, в которых значение функции $F^*(x)$ можно определить, являются правые концы интервалов и все точки интервала $x \in [240;\infty)$. Определим значения функции $F^*(x)$ в указанных точках

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 120 \\ 0{,}07 & при \quad x=140 \\ 0{,}32 & при \quad x=160 \\ 0{,}6 & при \quad x=180 \\ 0{,}9 & при \quad x=200 \\ 0{,}98 & при \quad x=220 \\ 1 & при \quad x\ge 240 \end{cases}$$



При графическом изображении данной функции, соединим точки графика, соответствующие концам интервалов, отрезками прямой. В результате график функции $F^*(x)$ будет представлять собой непрерывную линию.

3) Рассчитаем моду и медиану. Распределение задано интервальным рядом. Наибольшая частота $n_4=30$ отвечает интервалу 180-200, следовательно (или в начале так как) этот интервал является модальным. Поэтому по формуле

$$Mo\approx x_{Mo}+\Delta x\cdot\frac{n_{Mo}-n_{Mo-1}}{(n_{Mo}-n_{Mo-1})+(n_{Mo}-n_{Mo+1})}),$$

в которой $x_{Mo}=180$ –начало модального интервала; $n_{Mo}=30$ – частота модального интервала; $n_{Mo-1}=28$ – частота интервала, стоящего перед модальным; $n_{Mo+1}=8$ – частота интервала, стоящего после модального, получим $Mo\approx 180+20\dfrac{30-28}{(30-28)+(30-8)}\approx 181{,}67$.

Для нахождения медианы по формуле $Me\approx x_{Me}+\Delta x\cdot\dfrac{n/2-(n_x)_{Me-1}}{n_{Me}}$ нужно определить медианный интервал. Объем ряда $n=\sum n_i=7+25+28+30+8+2=100$, тогда $n/2=50$. Среди накопленных частот находим число 50. Такого числа нет, поэтому берем первое, большее 50 значение. Это будет 60. Интервал 160-180, ему соответствующий, и будет медианным. Следовательно, $x_{Me}=160$ –начало медианного интервала; $n_{Me}=28$ – частота медианного интервала; $(n_x)_{Me-1}=32$ – накопленная частота интервала, стоящего перед медианным.

Подставим найденные значения в формулу, получим

$$Me\approx 160+20\frac{100/2-32}{28}\approx 172{,}86.$$

4) Вычислим выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесс. В качестве вариант x_i возьмем середины интервалов. Для упрощения расчетов удобно перейти к условным вариантам. В качестве условного нуля выберем $C=190$:

$$u_i=\frac{x_i-C}{h}=\frac{x_i-190}{20}.$$

Вспомогательные расчеты сведены в таблицу.

интервалы	n_i	x_i	u_i	u_in_i	$u_i^2n_i$	$u_i^3n_i$	$u_i^4n_i$

120-140	7	130	-3	-21	63	-189	567
140-160	25	150	-2	-50	100	-200	400
160-180	28	170	-1	-28	28	-28	28
180-200	30	190	0	0	0	0	0
200-220	8	210	1	8	8	8	8
220-240	2	230	2	4	8	16	32
$\sum$	**100**			**-87**	**207**	**-393**	**1035**

Далее, используя таблицу, найдем:

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-87}{100} = -0,87, \qquad \overline{u^2} = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{207}{100} = 2,07;$$

$$D_u = \overline{u^2} - \bar{u}^2 = 2,07 - (-0,87)^2 = 1,3131; \quad \sigma_u = \sqrt{D_u} = \sqrt{1,3131} = 1,1459$$

$$\bar{x}_в = h \cdot \bar{u} + C = 20 \cdot (-0,87) + 190 = 172,6;$$

$$D_в = h^2 \cdot D_u = 20^2 \cdot 1,3131 = 525,24; \qquad \sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{525,24} = 22,92.$$

Коэффициент вариации $V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\% = \frac{22,92}{172,6} \cdot 100\% = 13,28\%$.

Для расчета коэффициента асимметрии и эксцесса найдем начальные условные моменты от первого до четвертого порядков

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \cdot n_i}{n} = \frac{-87}{100} = -0,87 \; ; \quad \alpha_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i^2 \cdot n_i}{n} = \frac{207}{100} = 2,07 \; ;$$

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i^3 \cdot n_i}{n} = \frac{-393}{100} = -3,93 \; ; \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i^4 \cdot n_i}{n} = \frac{1035}{100} = 10,35 \; .$$

Теперь рассчитаем второй, третий и четвертый центральные моменты:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2,07 - (-0,87)^2 = 1,3131,$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = -3,93 - 3 \cdot 2,07 \cdot (-0,87) + 2 \cdot (-0,87)^3 = 0,1557 \; ,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 =$$

$$= 10,35 - 4 \cdot (-3,93) \cdot (-0,87) + 6 \cdot 2,07 \cdot (-0,87)^2 - 3 \cdot (-0,87)^4 = 4,3556$$

Вычислим коэффициент асимметрии и эксцесс:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\left(\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}\right)^3} = \frac{0,1557}{\sqrt{1,3131}^3} \approx 0,1035;$$

$$E_x = \frac{\mu_4}{\left(\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}\right)^4} - 3 = \frac{4,3556}{\sqrt{1,3131}^4} - 3 \approx 0,4739.$$

Значения коэффициентов асимметрии и эксцесса малы.

По виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса можно сделать вывод, что заданное распределение близко к нормальному.

6) Найдем точечные оценки параметров выбранного закона распределения.

Несмещенной оценкой математического ожидания является выборочная средняя $\overline{x}_в = 172,6$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия $s_в^2 = \dfrac{n}{n-1} D_в = \dfrac{100}{99} \cdot 525,24 = 530,545.$

7) Запишем функцию плотности и функцию распределения:

$a = 172,6$; $\sigma = \sqrt{530,545} = 23,034$;

$$f(x) = \frac{1}{23,034\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-172,6)^2}{2\cdot 23,034^2}} ; \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-172,6}{23,034}\right)$$

Найдем интервальные оценки параметров нормального распределения *X*. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ имеет вид

$$\overline{x}_в - t_\gamma \frac{s_в}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_\gamma \frac{s_в}{\sqrt{n}} ,$$

где $\overline{x}_в = 172,6$, $s_в = \sqrt{s_в^2} = \sqrt{530,545} = 23,034$.

Для уровня значимости $\gamma = 0,95$ и объема выборки $n = 100$ находим по таблице значение $t_\gamma = 1,984$.

$$172,6 - 1,984\frac{23,034}{\sqrt{100}} < a < 172,6 + 1,984\frac{23,034}{\sqrt{100}} ;$$

$$168,0301 < a < 177,1699 .$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения

$$s_в\left(1-q\right) < \sigma < s_в(1+q) .$$

По таблице (приложение 4) при $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ найдем $q = 0,143$. Тогда, искомый интервал таков:

$$23,034\left(1-0,143\right) < \sigma < 23,034\left(1+0,143\right);$$

$$19,74 < \sigma < 26,323 .$$

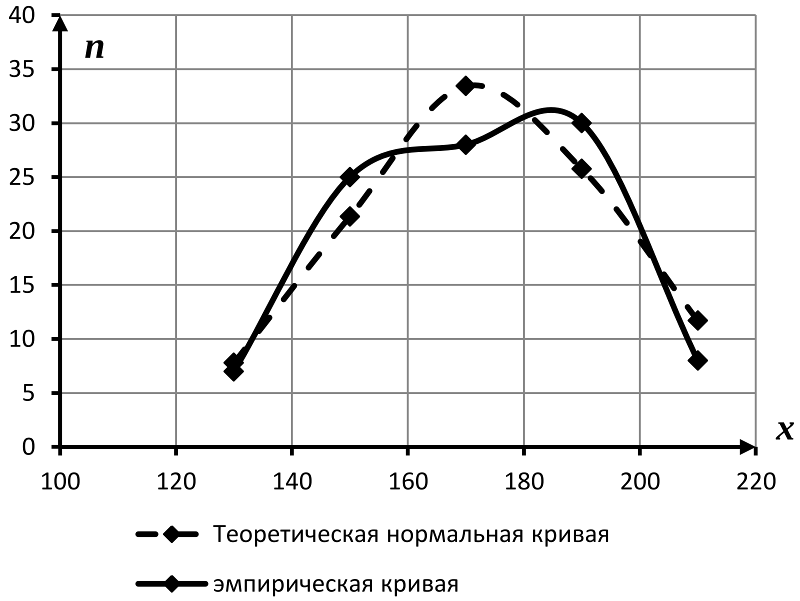
8) Проверим, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

Пронормируем случайную величину *X*, т.е. перейдем к случайной величине $Z = \dfrac{X - \overline{x}_в}{\sigma_в}$, и вычислим концы интервалов: $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$, $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x}_в}{\sigma_в}$, причем наименьшее значение *Z* (т.е. z_1) примем равным $-\infty$, а наибольшее (т.е. z_{s+1}) примем равным ∞. Затем вычислим теоретические частоты $n_i' = nP_i$, где *n* - объем выборки, $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – вероятности попадания *X*в интервалы $(x_i ; x_{i+1})$; $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Интервалы 5 и 6 объединены, так как по правилу применения критерия Пирсона интервалы частота которых менее 5 должны быть объединены.

№	*Границы интервала*		*Эмпирическая частота* n_i	*Границы интервала*		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	*Теорет. частота* $n_i' = nP_i$
	x_i	x_{i+1}		z_i	z_{i+1}				
1	120	140	7	$-\infty$	-1,42	-0,5	-0,4222	0,0778	7,78
2	140	160	25	-1,42	-0,55	-0,4222	-0,2088	0,2134	21,34
3	160	180	28	-0,55	0,32	-0,2088	0,1255	0,3343	33,43
4	180	200	30	0,32	1,19	0,1255	0,3830	0,2575	25,75
5	200	220	$\left.\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right\}10$	1,19	$+\infty$	0,3830	0,5	0,117	11,7
6	220	240							
Сумма			***100***					***1***	***100***

Построим графики эмпирической кривой и теоретически нормальной кривой



Как видно из графиков, представленных на рисунке, теоретические и эмпирические кривые отличаются друг от друга. Для определения значимо ли это расхождение вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона, составим для этого расчетную таблицу:

№	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	7	7,78	-0,78	0,608	0,0782
2	25	21,34	3,66	13,4	0,6277
3	28	33,43	-5,43	29,48	0,8819
4	30	25,75	4,25	18,06	0,7015
5	10	11,7	-1,7	2,89	0,2470
Сумма	***100***	***100***			$\chi^2_{набл} \approx 2{,}54$

Находим число степеней свободы: по выборке рассчитаны два параметра, значит, $r = 2$. Количество интервалов после объединения $m = 5$. Следовательно,

$k = 5 - 2 - 1 = 2$. Зная, что $\alpha = 0{,}05$ и $k = 2$, по таблице критических точек распределения хи-квадрат находим $\chi^2_{крит}(\alpha; k) = \chi^2_{крит}(0{,}05; 2) = 6{,}0$. Итак, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

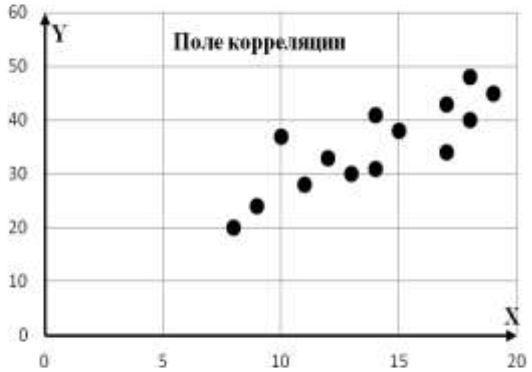
Задача 2. Приведены результаты исследования стоимости основных производственных фондов *X* (млн. сом) и объемов строительно-монтажных работ *Y* (млн. сом), выполненных в течение года:

x_i	8	9	11	13	14	12	17	10	15	18	14	17	19	18
y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Необходимо построить график исходных данных. Полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии. Определить направление и тесноту связи. Проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0{,}05$.

Сделать прогноз объема строительно-монтажных работ, если стоимость основных производственных фондов составит 20 млн. сом.

Решение. График зависимости переменных *X* и *Y* строится в прямоугольной декартовой системе координат. На оси абсцисс откладываются значения факторного признака *X* (стоимость основных производственных фондов), а по оси ординат – результативного признака *Y* (объем строительно-монтажных работ).



Характер расположения точек на графике показывает, что связь между переменными может выражаться линейным уравнением регрессии $\overline{y}_x = kx + b$.

Параметры уравнения регрессии находим методом наименьших квадратов, путем составления и решения системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Все расчеты приведены во вспомогательной таблице

№ п/п	x	y	x^2	y^2	xy
1	8	20	64	400	160
2	9	24	81	576	216
3	11	28	121	784	308

4	13	30	169	900	390
5	14	31	196	961	434
6	12	33	144	1089	396
7	17	34	289	1156	578
8	10	37	100	1369	370
9	15	38	225	1444	570
10	18	40	324	1600	720
11	14	41	196	1681	574
12	17	43	289	1849	731
13	19	45	361	2025	855
14	18	48	324	2304	864
$\sum$	195	492	2883	18138	7166
Сред	13,929	35,143	205,929	1295,571	511,857

В таблице все средние находятся по формуле средней арифметической простой, например: $\overline{X}=\frac{\sum x}{n}=\frac{195}{14}=13,929$.

Подставляя полученные суммы в систему нормальных уравнений, учитывая, что $n=14$, получим:

$$\begin{cases} 205,929k+13,929b=511,857, \\ 13,929k+b=35,143. \end{cases}$$

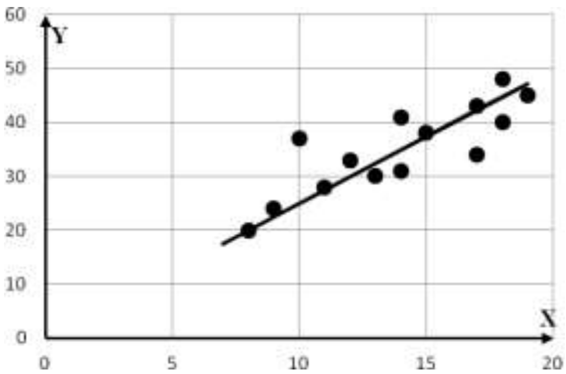
Решив систему, получим $k=2,4829$, $b=0,03997$.

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид:

$$\overline{y}_x=2,4829x+0,03997.$$

Коэффициент регрессии показывает, что при увеличении стоимости основных производственных фондов (т.е. переменной *X)* на 1 млн. сом объем строительно-монтажных работ в среднем увеличивается на 2,4829 млн. сом.

Если в уравнение регрессии подставить фактические значения переменной *X*, то определяются возможные (теоретические) значения переменной $\overline{y}_x$. Соединив точки с координатами $\left(x_i;\overline{y}_{x_i}\right)$, получим прямую линию регрессии (или линию тренда):



При линейной зависимости, степень тесноты связи между переменными *X* и *Y* определяется с помощью коэффициента корреляции:

$$r_в=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Подставляя данные из расчетной таблицы и учитывая, что

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{205,929 - 13,929^2} \approx 3,453$,

$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{1295,571 - 35,143^2} \approx 7,78$,

получим:

$$r_в = \frac{511,857 - 13,929 \cdot 35,143}{3,45 \cdot 7,78} = 0,833.$$

Так как $r_в > 0$, то между признаками *X* и *Y* связь прямая. Согласно шкале Чеддока эта связь высокая.

Так как исходные данные являются выборочными, то необходимо оценить существенность и значимость величины коэффициента корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу: коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю, и изучаемый фактор не оказывает существенного влияния на результативный признак. $H_0 : r_Г = 0$, при $H_1 : r_Г \neq 0$.

Для проверки нулевой гипотеза найдем наблюдаемое значение критерия $T_{набл} = \frac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}} = \frac{0,833\sqrt{12}}{\sqrt{1-0,833^2}} \approx 5,21$. Критическое значение находим по таблице критических точек распределения Стьюдента (приложение 3) по заданному уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = n - 2 = 14 - 2 = 12$ для двусторонней критической области, получим $t_{кр}\left(0,05;12\right) = 2,18$. Так как $T_{набл} > t_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами коэффициент корреляции существенно отличен от нуля в генеральной совокупности. Значит, стоимость основных производственных фондов оказывает статистически существенное влияние на объем строительно-монтажных работ.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 10

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1 по разделу «Линейная и векторная алгебра»

Вариант №1

Задание 1. Найти AB, где $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1+3\cdot(-5) & (-2)\cdot 0+3\cdot 1 & (-2)\cdot 4+3\cdot(-3)\\ 4\cdot 1+0\cdot(-5) & 4\cdot 0+0\cdot 1 & 4\cdot 4+0\cdot(-3)\\ (-5)\cdot 1+1\cdot(-5) & (-5)\cdot 0+1\cdot 1 & (-5)\cdot 4+1\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & 3 & -17\\ 4 & 0 & 16\\ -10 & 1 & -23\end{pmatrix}$$

Задание 2. Найти решение системы по формулам Крамера

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3,\\ 2x_1+x_2+x_3=11,\\ x_1+x_2+2x_3=8.\end{cases}$$

Решение. Основная матрица системы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Находим

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=5$. Так как $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение. Далее находим вспомогательные определители:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20,\qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10,\qquad \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5.$$

По формулам Крамера получим:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{20}{5}=4,\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{10}{5}=2,\ x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{5}{5}=1.$$

Ответ. $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=1$.

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12. \end{cases}$$

Решение. Прямой ход метода Гаусса проведем по алгоритму, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rangA=2$, так как $M_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, то M_2 – базисный минор, а переменные x_1 и x_2 – базисные. Базисные переменные x_1 и x_2 оставим в левой части, а свободные переменные x_3 и x_4 переносим в правые части уравнений. Получим систему:

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2=5-3x_3-x_4, \\ -x_2=3-7x_3+5x_4 \end{cases}$$

Из последней системы, выражая базисные переменные через свободные, получим:

$$\begin{cases} x_1=6-26x_3+14x_4, \\ x_2=-3+7x_3-5x_4 \end{cases}$$

Задавая неосновным переменным значения $x_3=C_1,\ x_4=C_2$, получим ***общее решение*** $(6-26C_1+14C_2;-1+7C_1-5C_2;C_1;C_2)$ в базисе $x_1,\ x_2$.

Задание 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

Решение.

$$\begin{vmatrix} -4 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{вынесем общий множитель} \\ \text{из I и IV строк} \end{array}\right) = 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{используем свойство:} \\ \text{I строка+II}\times 2, \\ \text{IVстрока+II}\times(-3) \\ \end{array}\right) == 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot A_{24} = 4(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 144$$

Задание 5. Определить модули суммы и разности векторов $\overline{a} = (3; -5; 8)$ и $\overline{b} = (-1; 1; -4)$.

Решение. Находим сумму и разность вектор, используя формулу:
$\vec{a} \pm \vec{b} = \left\{ a_x \pm b_x; \quad a_y \pm b_y; \quad a_z \pm b_z \right\}$

Получим:

$$\overline{a} + \overline{b} = (3-1; -5+1; 8-4) = (2; -4; 4),$$

$$\overline{a} - \overline{b} = \left(3-(-1); -5-1; 8-(-4)\right) = (4; -6; 12)$$

Модуль вектора находится по формуле $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$. Получим

$$\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6, \ \left|\overline{a} - \overline{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Задание 6. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $\left|\overline{a}\right| = 4, \quad \left|\overline{b}\right| = 2$ и $\left|\overline{c}\right| = 6,$ определить модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}.$

Решение. Найдём скалярный квадрат вектора $\vec{p}$:

$\vec{p}^{\,2} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$ Раскроем скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{p}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}\right) =$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) + \left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{c}\right) + \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right) =$$

$$= 4^2 + 2^2 + 6^2 + 2\left(4 \cdot 2\cos 60^0 + 4 \cdot 6\cos 60^0 + 2 \cdot 6\cos 60^0\right) = 100$$

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{\vec{p}^{\,2}} = \sqrt{100} = 10.$$

Задание 7. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1; 1; 2)$, $B(2; 3; 3)$ и $C(1; 2; -1)$

Решение. Найдем координаты векторов: $\overline{AB} = \{3, 2, 1\}, \quad \overline{AC} = \{2, 1, -3\}$.
Используя формулу, вычислим векторное произведение

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{j}} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{k}} =$$

$$= -7\vec{\boldsymbol{i}} + 11\vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{k}}$$

Вычислим модуль векторного произведения

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 11^2 + (-1)^2} = \sqrt{171}.$$

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, следовательно $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{171}}{2}$.

Задание 8. При каком значении λ векторы $\bar{a} = (1;1;\lambda)$, $\bar{b} = (0;1;0)$ и $\bar{c} = (3;0;1)$ компланарны?

Решение: Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю. Следовательно,

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3\lambda = 0,$$ решением последнего уравнения является значение $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

Образец выполнения контрольной работы №2 по разделу «Пределы функции одной переменной»

Вариант №1

I.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 2n^2 + 6n + 12}{9n^2 + 5n^3 - 8n + 4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + n + 4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 - 6x - 27}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5^{x^2-4} - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2} - 1}$

Решение

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 2n^2 + 6n + 12}{9n^2 + 5n^3 - 8n + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{2n^2}{n^3} + \frac{6n}{n^3} + \frac{12}{n^3}}{\frac{9n^2}{n^3} + \frac{5n^3}{n^3} - \frac{8n}{n^3} + \frac{4}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{12}{n^3}}{\frac{9}{n} + 5 - \frac{8}{n^2} + \frac{4}{n^3}} =$$

$$= \frac{2 - \frac{2}{\infty} + \frac{6}{\infty} + \frac{12}{\infty}}{\frac{9}{\infty} + 5 - \frac{8}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{2 - 0 + 0 + 0}{0 + 5 - 0 + 0} = \frac{2}{5}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{\left(3n^2+1\right)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$$

3) $$\lim_{x\to-2}\frac{2x+5}{\ln\left(x+3\right)}=\frac{2\cdot(-2)+5}{\ln\left(-2+3\right)}=\frac{1}{\ln 1}=\frac{1}{0}=\infty.$$

4) $$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\textit{Разделим числитель и знаменатель на } \left(x+3\right)\right|$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \hline -\left(x^3+3x^2\right) & x^2+2x-3 \\ 2x^2+3x & \\ -\left(2x^2+6x\right) & \\ -3x-9 & \\ -\left(-3x-9\right) & \\ 0 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} x^2-6x-27 & x+3 \\ \hline -\left(x^2+3x\right) & x-9 \\ -9x-27 & \\ -\left(-9x-27\right) & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0.$$

5)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$$

6) $$\lim_{x\to0}\frac{tg^3\left(2x\right)}{arctg^3\left(3x\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{tg\left(2x\right)}{2x}\right)^3\cdot\left(2x\right)^3}{\left(\frac{arctg\left(3x\right)}{3x}\right)^3\cdot\left(3x\right)^3}=\lim_{x\to0}\frac{1\cdot\left(2x\right)^3}{1\cdot\left(3x\right)^3}=\lim_{x\to0}\frac{8x^3}{27x^3}=\frac{8}{27}.$$

7) $$\lim_{x\to -2}\frac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\left(x^2-4\right)}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}.$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\cdot x^2}{\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\frac{1}{4}.$$

Образец выполнения контрольной работы №3 по разделу «Дифференцирование функций»

Вариант №1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$. 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\frac{\cos x}{x^3+9}$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

д) $y=x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(8-7t\right),\\ y=t^7-7t^2.\end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности,экстремум функции:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Решение

Задание 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x}{1}=9.$$

Задание 2.

а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$

$$y'=\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}\right)'=\left(5x^3-8x^{-2}+4x^{1/2}\right)'=5\cdot 3x^2-8\cdot(-2)x^{-3}+4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}=$$

$$=15x^2+\frac{16}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}$$

б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)'=\frac{(\cos x)'(x^3+9)-\cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2}==\frac{-\sin x\cdot(x^3+9)-3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)'=$$

$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

$$y'=\left(2arctgx+3^x\right)'\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)'\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0\right)\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$\left(\frac{2}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx+3^x\right)$$

д) $y=x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y=\ln(x^{e^x})$; $\ln y=e^x\ln x$;

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x};\qquad y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

$$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

Задание 3. Найти производую y'_x функции $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arccos t\end{cases}$

Вычислим x'_t и y'_t :

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}2t = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$$

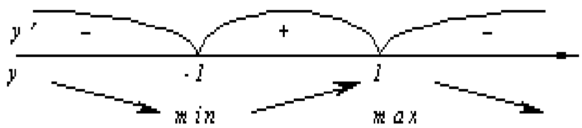
Задание 4.Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Решение.

Найдем первую производную

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Найдем критические точки 1рода



$$y' = 0, \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0,$$

$$x = 1, \quad x = -1.$$

При $x \in \left(-\infty, -1\right) \cup \left(1, +\infty\right)$ функция убывает,

при $x \in \left(-1, 1\right)$ функция возрастает.

$x = -1$ - точка минимума, $y_{min} = y(-1) = \dfrac{-1}{1+(-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$x = 1$ - точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.

при $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$ функция вогнутая.

$x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$ - точки перегиба.

Образец выполнения контрольной работы №4 по разделу «Неопределенные интегралы»

Вариант №1

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$.   2. $\int x\sqrt{x+4}dx$

3. $\int \dfrac{dx}{3+2\sin x + \cos x}$ 4. $\int \left(3x+2\right)\sin 2x\, dx$

5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$ 6. $\int \frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

Решение

1. $\int \sin^3 x \cos x dx = \left|\cos x dx = d\sin x\right| = \int \sin^2 x d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x+4}=t, & x=t^2-4 \\ dx=(t^2-4)'dt=2tdt \end{vmatrix} = \int (t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4-4t^2)dt =$

$$= 2\left(t^4-4t^2\right)+C = 2\frac{t^5}{5}-8\frac{t^3}{3}+C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3}+C.$$

3. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x} = \begin{vmatrix} tg\frac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} =$$

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1} = arctg(t+1)+C = arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C.$$

4. $\int (3x+2)\sin 2xdx = \begin{vmatrix} u=3x+2 \quad \Rightarrow \quad du=(3x+2)'dx=3dx \\ dv=\sin 2xdx \quad \Rightarrow \quad v=\int dv=\int \sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$

$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 3dx = -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2xdx =$$
$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C$$

5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

Разложим знаменатель на множители $(x^2+2x-3)(x-4)=(x-1)(x+3)(x-4)$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$2x^2+41x-91 = A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)$;

$2x^2+41x-91 = A(x^2-x-12)+B(x^2-5x+4)+C(x^2+2x-3)$;

$2x^2+41x-91 = (A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x+(-12A+4B-3C)$.

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=2 \\ x & -A-5B+2C=41 \\ x^0 & -12A+4B-3C=-91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим $A=4,\quad B=-7,\quad C=5$.

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx=\int\frac{4}{x-1}dx-\int\frac{7}{x+3}dx+\int\frac{5}{x-4}dx=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$$

6. $$\int\frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^5}-\frac{x^5e^x}{x^5}-\frac{14}{x^5}\right)dx=\int\left(3x^{-3}-e^x-14x^{-5}\right)dx=$$

$$=3\int x^{-3}dx-\int e^xdx-14\int x^{-5}dx=3\frac{x^{-2}}{-2}-e^x-14\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{2x^2}-e^x+\frac{7}{2x^4}+C.$$

2 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1 по разделу «Определенные интегралы и их применения»
Вариант №1

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y=0$ ($y\geq 0$).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

4. Вычислить длину дуги линии $y^2=(x+1)^3$, $-1\leq x\leq 4$.

5.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0\leq t\leq\sqrt[4]{8}$.

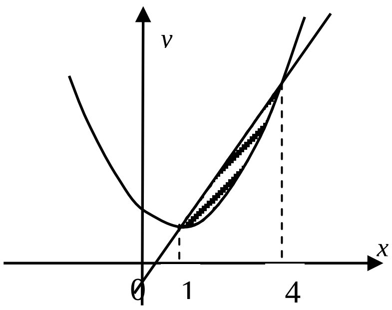
6.Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\leq\varphi\leq\pi$.

7.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

Сделаем чертеж. Уравнению $y = x^2 - 2x + 3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x = 1$, $y = 2$, т. к. $y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2$. Уравнению $y = 3x - 1$ соответствует прямая.



Найдем точки пересечения заданных линий $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ $x^2 - 2x + 3 = 3x - 1$, $x^2 - 5x + 4 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

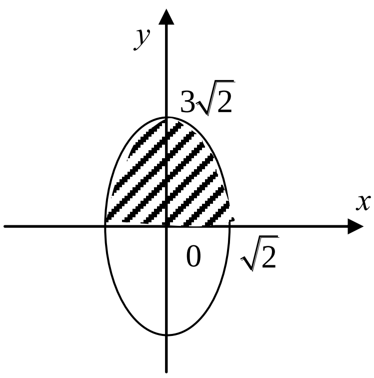
$$\int_1^4 (3x - 1 - (x^2 - 2x + 3))dx = \int_1^4 (3x - 1 - x^2 + 2x - 3)dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - 4 - x^2)dx = \left.\frac{5x^2}{2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 0$ ($y \geq 0$).

Решение:

Уравнениями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).



Уравнению $y = 0$ соответствует ось Ox. Сделаем чертеж. Получаем заштрихованную фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x) \big) dx .$$

Найдем половину искомой площади, параметр $t \in \left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$$\frac{1}{2}S = \int_{\pi/2}^{0} 3\sqrt{2}\sin t\left(-\sqrt{2}\right)\sin t dt = -6\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t dt = 6\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t dt = 6\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 3\int_{0}^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt =$$

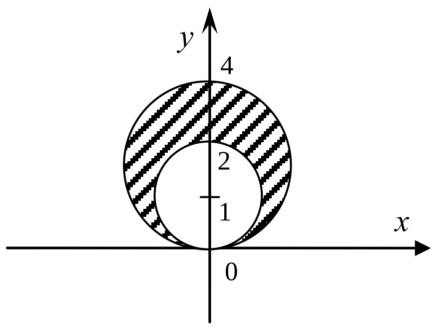
$$= 3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2},$$

Тогда искомая площадь будет равна $S = 2\cdot\frac{3\pi}{2} = 3\pi$ (кв. ед.).

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r = 2\sin\varphi$.



Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, а $r\sin\varphi = y$, и умножая обе части равенства $r = 2\sin\varphi$ на r, получим

$r^2 = 2r\sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2y$,

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$,

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – это окружность с центром в точке $(0;\ 1)$ и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r = 4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке $(0;\ 2)$ и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$.

Площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\left(4\sin\varphi\right)^2 - \left(2\sin\varphi\right)^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_0^{\pi}d\varphi - 3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = = 3(\pi - 0) - \frac{3}{2}\left(\sin 2\pi - \sin 0\right) = 3\pi$$

(кв. ед.).

Задание 4. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \le x \le 4$.

Решение:

Уравнению $y^2 = (x+1)^3$, или $y = \pm\sqrt{(x+1)^3} = \pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}dx$. Возьмем $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}\left(x+1\right)^{1/2}$.

Тогда

$$L=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx=\frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}(9x+13)^{\frac{1}{2}}d(9x+13)=\frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3}-\sqrt{4^3}\right)=\frac{1}{27}(343-8)=\frac{1}{27}\cdot 335=\frac{335}{27} \text{ (лин. ед.)}.$$

Задание 5.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt[4]{8}$.

Решение:

Длина дуги вычисляется по формуле $L=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt$.

Найдем $x_t'=\left(\dfrac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y_t'=\left(2-\dfrac{t^4}{4}\right)'=-t^3$. Тогда

$$L=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}dt=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}dt=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_{0}^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_{0}^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(8+1)^3}-1\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3} \text{ (лин. ед.)}$$

Задание 6.Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L=\int_{0}^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi .$$

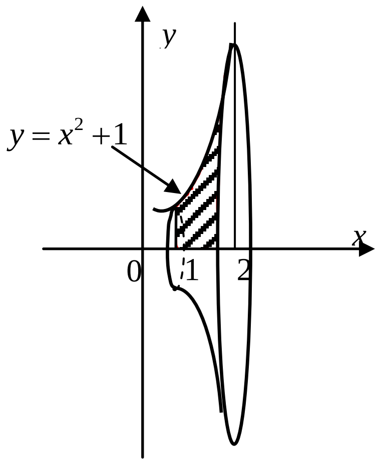
Найдем $r'=(2\sin\varphi)'=2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L=\int_{0}^{\pi}\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}d\varphi=\int_{0}^{\pi}\sqrt{4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}d\varphi=2\int_{0}^{\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_{0}^{\pi}=2(\pi-0)=2\pi \text{ (лин. ед.)}.$$

Задание 7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение:

Сделаем чертеж.



$$V_x = \pi\int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi\int_1^2 x^4dx + 2\pi\int_1^2 x^2dx + \pi\int_1^2 dx = \pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 + 2\pi\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 +$$

$$+\pi\left.x\right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(2^5-1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(2^3-1\right) + \pi(2-1) = \frac{178}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

Образец выполнения контрольной работы №2 по разделу "Кратные интегралы"
Вариант №1

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

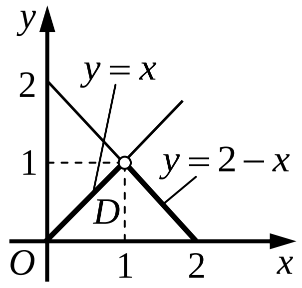
2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 2 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 2y$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Решение

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

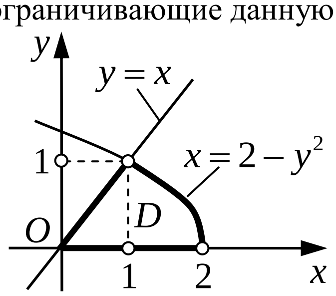
Решение. Построим область интегрирования.



$$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx = \begin{vmatrix} 0 \le y \le 1 & 0 \le x \le 2 \\ x = y & y = x \\ x = 2-y & y = 2-x \end{vmatrix} = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 2 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 2y$.

Решение. Построим кривые, ограничивающие данную пластину.



Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы $x = 2 - y^2$ и прямой $y = x$. Приравниваем:

$$y = 2 - y^2 \ \Rightarrow \ y^2 + y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ y_1 = 1,\ y_2 = -2(\notin D).$$

Определим статические моменты пластины относительно осей *Ox* и *Oy* и массу пластины.

$$S_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} y \cdot 2ydx = \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} 2y^2 dx = \int_0^1 dy \cdot 2y^2\, x\Big|_y^{2-y^2} =$$

$$= \int_0^1 dy \cdot 2y^2\left(2 - y^2 - y\right) = \int_0^1 \left(4y^2 - 2y^4 - 2y^3\right)dy = \left(4\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{40 - 12 - 15}{30} = \frac{13}{30}.$$

$$S_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} x\cdot 2y\,dx=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\left.\frac{x^2}{2}\right|_y^{2-y^2}=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\cdot y\left(\left(2-y^2\right)^2-y^2\right)=\int\limits_0^1 y\left(4-4y^2+y^4-y^2\right)dy=\int\limits_0^1\left(4y-5y^3+y^5\right)dy$$

$$=\left.\left(4\frac{y^2}{2}-5\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}\right)\right|_0^1=2-\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{24-15+2}{12}=\frac{11}{12}.$$

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} 2y\,dx=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\left.x\right|_y^{2-y^2}=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\left(2-y^2-y\right)=\int\limits_0^1\left(4y-2y^3-2y^2\right)dy=\left.\left(4\frac{y^2}{2}-2\frac{y^4}{4}-2\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^1=$$

$$=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{12-3-4}{6}=\frac{5}{6}.$$

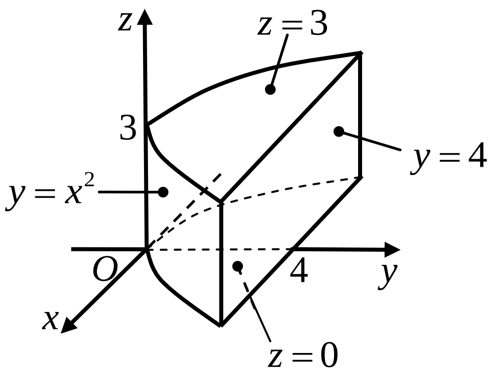
Тогда, координаты центра тяжести пластины x_c и y_c будут равны:

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{11\cdot 6}{12\cdot 5}=\frac{11}{10}=1{,}1$$

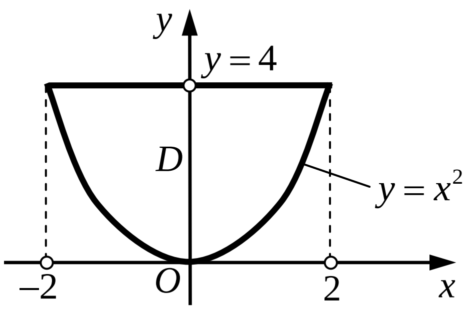
$$y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\frac{13}{30}}{\frac{5}{6}}=\frac{13\cdot 6}{30\cdot 5}=\frac{13}{25}=0{,}52.$$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=4$, $z=0$, $z=3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело.



Для определения пределов интегрирования, спроектируем его на координатную плоскость Oxy.



Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$:

$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \cdot z\Big|_0^3 = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \cdot (3-0) =$$

$$= 3\int\limits_{-2}^{2} dx \cdot y\Big|_{x^2}^{4} = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \cdot \left(4 - x^2\right) = 3\int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)dx = 3\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(12x - x^3\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= (24-8) - (-24+8) = 16 - (-16) = 32 \textit{ куб.ед.}$$

Образец выполнения контрольной работы №4 по разделу "Криволинейные интегралы"

Вариант №1

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x} dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ 2)$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2x - y)dx + \left(5y^2 - 4x\right)dy$, где L - парабола $y = x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy$ в положительном направлении, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$.

Решение

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x} dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ 2)$.

Решение. Т.к.кривая L задана в декартовой системе координат, то

$$dl=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx=\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\right]^2}dx=\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\cdot 2x\right]^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx.$$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{4y}{x}dl=\int\limits_1^2 \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_1^2 2x\sqrt{1+x^2}dx=\left|\begin{matrix}\textit{заносим } 2x \textit{ под знак}\\ \textit{дифференциала}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_1^2\sqrt{1+x^2}d\left(x^2\right)=\int\limits_1^2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=\left.\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{2}{3}\left((1+4)^{\frac{3}{2}}-(1+1)^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=5,57$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L(2x-y)dx+\left(5y^2-4x\right)dy$, где L - парабола $y=x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

Решение. Кривая L задана в декартовой системе координат, поэтому

$$dy=\left(x^2\right)'dx=2xdx.$$

Подставляя в заданный интеграл $y=x^2,\ dy=2xdx$, имеем

$$\int\limits_L(2x-y)dx+\left(5y^2-4x\right)dy=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left(5\left(x^2\right)^2-4x\right)2xdx=$$

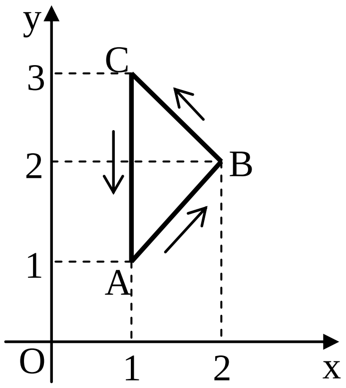
$$=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left(10x^5-8x^2\right)dx=\int\limits_0^2\left(2x-x^2+10x^5-8x^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(2x-9x^2+10x^5\right)dx=\left.\left(2\frac{x^2}{2}-9\frac{x^3}{3}+10\frac{x^6}{6}\right)\right|_0^2=4-3\cdot 8+\frac{10}{6}\cdot 64=4-24+\frac{320}{3}=$$

$$=\frac{320}{3}-20=\frac{320-60}{3}=\frac{260}{3}$$

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L\left(2x^2-y\right)dx+\left(3y+x^2\right)dy$ в положительном направлении, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$.

Решение. Контур L представляет замкнутый контур, состоящий из трех участков (сторон треугольника): AB, BC и CA. Рассмотрим искомый интеграл на каждом из этих участков, учитывая положительное направление обхода:



$$\oint\limits_{\Delta ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} .$$

Участок AB. Составим уравнение этого участка, используя уравнение прямой проходящей через две точки

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad y = x .$$

$$\int\limits_{AB} \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = \int\limits_1^2 \left[2x^2 - x + \left(3x + x^2\right)\cdot 1\right]dx = \int\limits_1^2 \left[3x^2 + 2x\right]dx =$$

$$= \left(x^3 + x^2\right)\Big|_1^2 = (8+4) - (1+1) = 10.$$

Участок BC. Уравнение этого участка имеет вид:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-2}{3-2} \quad \Rightarrow \quad y = 4 - x .$$

Тогда $y' = (4-x)' = -1$. Учитывая, что при движении из точки B в точку C x изменяется от 2 до 1, получаем

$$\int\limits_{BC} \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = \int\limits_2^1 \left[2x^2 - (4-x) + \left(3\cdot(4-x) + x^2\right)\cdot(-1)\right]dx =$$

$$\int\limits_2^1 \left[x^2 + 4x - 16\right]dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 16x\right)\Bigg|_2^1 = \left(\frac{1}{3} + 2 - 16\right) - \left(\frac{8}{3} + 8 - 32\right) = \frac{23}{3}.$$

Участок CA. Уравнение этого участка: $\dfrac{x-1}{1-1} = \dfrac{y-1}{3-1} \quad \Rightarrow \quad x = 1.$

Заменив в подынтегральной функции x на 1, x' на 0, и учитывая, что при перемещении из точки C в точку A y изменяется от 3 до 1, имеем

$$\int\limits_{CA} \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = \int\limits_3^1 \left[\left(2\cdot 1^2 - y\right)\cdot 0 + 3y + 1^2\right]dy = \int\limits_3^1 \left[3y + 1\right]dy =$$

$$= \left(3\frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_3^1 = \left(\frac{3}{2} + 1\right) - \left(\frac{27}{2} + 3\right) = -14.$$

Тогда искомый интеграл равен $\oint\limits_L \left(2x^2 - y\right)dx + \left(3y + x^2\right)dy = 10 + \dfrac{23}{3} - 14 = \dfrac{11}{3}.$

3 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1 по разделу "Ряды"
Вариант №1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.
5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}$.
6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.
7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.
8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$
$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x<0,\\ 2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$
9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам
$$f(x)=x-1,\quad x\in(0;1)$$

Решение

Задание 1. Так как в числителе и знаменателе стоят многочлены, то для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Выберем в качестве эталонного ряда ряд в виде отношения переменных в максимальной степени, стоящих в числителе и знаменателе, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который является расходящимся.

Тогда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0}{1+0}=1\quad(\ne 0\ne\infty).$$

Следовательно, ряды ведут себя одинаково и т.к. эталонный ряд расходится, то и исследуемый ряд тоже расходится.

Задание 2. Применим радикальный признак Коши. Находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^2=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\frac{2-0}{3+0}\right)^2=\frac{4}{9}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 3. Общий член ряда содержит показательную функцию, поэтому для исследования его на сходимость применим признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)\cdot 3^n}{n^2\cdot 3^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(1+0+0)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 4.Проверим выполнение необходимого условия сходимости

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}}=\frac{5-0+0}{2+0}=\frac{5}{2}\neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то необходимое условие сходимости не выполняется и исследуемый ряд расходится.

Задание 5. Данный ряд является знакочередующимся. Следовательно, применяем теорему Лейбница.

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{2}{1}>\frac{2}{2!}=1>\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}>\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}>\ldots>\frac{2}{n!}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n!}=\frac{2}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится. Выясним характер сходимости. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда, т.е. ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$, исследуем его на сходимость. Это знакоположительный ряд, общий член которого содержит факториал. Поэтому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)!}}{\frac{2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то ряд из модулей сходится, а следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задание 6. Данный ряд является полным степенным рядом, т.к. содержит все степени $x-3$, с коэффициентами $a_n = \frac{1}{n^2}$. Поэтому, для нахождения области сходимости можно воспользоваться радиусом сходимости в форме Даламбера

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

Тогда интервал сходимости определится неравенством: $-R < x-3 < R$, т.е. $-1 < x-3 < 1,\ \ 2 < x < 4$.Проверим граничные точки, для чего подставим $x = 2$ и $x = 4$ в исследуемый степенной ряд.

$x = 2$: $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ - это знакочередующийся ряд. По теореме Лейбница:

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} > \ldots > \frac{1}{n^2} > \ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь - убывает)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится (можно показать что абсолютно) и $x = 2$ является точкой сходимости.

$x = 4$: $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд, который сходится, т.к. показатель степени знаменателя $p = 2 > 1$. Поэтому, $x = 4$ также является точкой сходимости исследуемого степенного ряда.

Таким образом, область сходимости – это отрезок $x \in [2,4]$.

Задание 7. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Воспользуемся стандартным разложением функции e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots , \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Заменим в нем x на $-6x^2$:

$$e^{-6x^2} = 1 + \frac{-6x^2}{1!} + \frac{(-6x^2)^2}{2!} + \frac{(-6x^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-6x^2)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{6x^2}{1!} + \frac{36x^4}{2!} - \frac{216x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Область сходимости этого ряда $x \in (-\infty, +\infty)$ содержит отрезок интегрирования $[0;0{,}1]$, поэтому применим свойство почленного интегрирования степенных рядов:

$$\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx = \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{6x^2}{1!} + \frac{36x^4}{2!} - \frac{216x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{6}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{36}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{216}{3!}\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right) \Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= 0{,}1 - \frac{6}{1!}\frac{0{,}1^3}{3} + \frac{36}{2!}\frac{0{,}1^5}{5} - \frac{216}{3!}\frac{0{,}1^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{0{,}1^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

$$= 0{,}1 - 0{,}002 + 0{,}000036 - \ldots =$$

$$= \left| \textit{с учетом точности } \varepsilon = 0{,}001 \right| \approx 0{,}1 - 0{,}002 = 0{,}098.$$

Задание 8. Данная функция является *нечетной* 2π -периодической функцией, следовательно коэффициенты $a_0 = 0$ и $a_n = 0$, а $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$. На интервале $(0,\pi)$ $f(x) = 2$, поэтому

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{4}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi n}(\cos\pi n - \cos 0) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi(2k-1)}, & \textit{если } n = 2k-1 \quad (\textit{т.е. } n - \textit{нечетное}) \\ 0, & \textit{если } n = 2k \quad (\textit{т.е. } n - \textit{четное}) \end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x$$

Задание 9. Т.к. требуется разложить функцию в ряд по косинусам, то интервал $(0,1)$ представляет собой половину периода, т.е. $T=2l=2$, $l=1$. На второй половине периода $(-1,0)$ продлеваем ее четным образом, т.е. полагаем $b_n=0$, а

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{1}\int_0^1(x-1)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-1,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx=\frac{2}{1}\int_0^1(x-1)\cos\left(\frac{\pi nx}{1}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} \textit{применим формулу интегрирования по частям} & \int_a^b UdV=UV\big|_a^b-\int_a^b VdU \\ U=x-1, & dU=(x-1)'dx=dx \\ dV=\cos(\pi nx)dx, & V=\int\cos(\pi nx)dx=\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) \end{array}\right|=$$

$$=2\left((x-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)dx\right)=$$

$$=2\left((1-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n)-(0-1)\frac{1}{\pi n}\sin(0)-\frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx)\right)\Bigg|_0^1\right)$$

$$=2\left(0-0+\frac{1}{\pi^2n^2}\big(\cos(\pi n)-\cos(0)\big)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, & \textit{при } n=2k \quad (\textit{т.е. } n-\textit{четное})\\ \dfrac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}, & \textit{при } n=2k-1 \quad (\textit{т.е. } n-\textit{нечетное})\end{cases}$$

Таким образом ряд Фурье имеет вид

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2\left(2k-1\right)^2}\cos\pi\left(2k-1\right)x$$

Образец выполнения контрольной работы №2 по разделу "Элементы теории поля"

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u=x^2+4x^3y+5xz-z^2$ ***в точке*** $M_0(1;2;-1)$ ***по направлению от точки*** M_0 ***к точке*** $M_1(2;2;1)$**.**

Решение.

Найдем вектор $\overline{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{M_0M_1}=\left(1;\,0;\,2\right);\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+0+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\beta=0;\ \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1+0+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Найдем частные производные функции и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+12x^2y+5z;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=4x^3;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=5x-2z;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=2\cdot1+12\cdot1^2\cdot2+5\cdot(-1)=21;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=4\cdot1^3=4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=5\cdot1-2\cdot(-1)=7.$$

Теперь найдем производную по направлениюпо формуле

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_{M_0}=21\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+4\cdot0+7\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{35}{\sqrt{5}}=7\sqrt{5}.$$

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial\lambda}>0$, то функция в данном направлении возрастает.

2. Найти градиент скалярного поля $u=2x^2+5z\cos y+6z$ ***в точке*** $M_0(-1;0;-2)$ ***и его модуль.***

Найдем частные производные функции и вычислим их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-5z\sin y;\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=5\cos y+6;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 4\cdot(-1) = -4; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -5\cdot(-2)\cdot\sin 0 = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 5\cdot\cos 0 + 6 = 11.$$

Теперь найдем градиентпо формуле $gradU = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$;

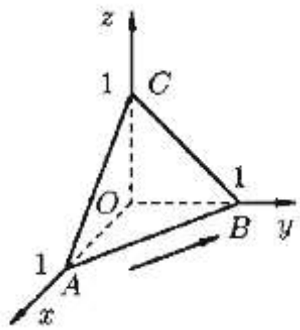
$$\left. grad\, u\right|_{M_0} = -4\vec{i} + 0\vec{j} + 11\vec{k} = -4\vec{i} + 11\vec{k},$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\left|\left. grad\, u\right|_{M_0}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 11^2} = \sqrt{16+121} = \sqrt{137}.$$

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\bar{a}(M) = x\bar{i} + (y-2z)\bar{j} + (2x-y+2z)\bar{k}$; **p:** $x+y+z=1$.



Решение.

Согласно определению

$$C = \oint_L xdx + (y-z)dy + (2x-y+2z)dz.$$

$$\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}.$$

На отрезке *AB*: $z=0$, $x+y=1$, $y=1-x$, $dy=-dx$, $dz=0$, следовательно

$$\int_{AB} = \int_0^1 xdx + (1-x-0)(-dx) = \int_0^1 (2x-1)dx = \left.(x^2-x)\right|_0^1 = 0.$$

На отрезке *BC*: $x=0$, $y+z=1$, $z=1-y$, $dz=-dy$, $dx=0$, следовательно

$$\int_{BC} = \int_1^0 (y-(1-y))dy + (0-y+2(1-y))(-dy) = \int_1^0 (5y-3)dy = \left.\left(\frac{5y^2}{2} - 3y\right)\right|_1^0 = \frac{1}{2}.$$

На отрезке *CA*: $y=0$, $x+z=1$, $z=1-x$, $dz=-dx$, $dy=0$, следовательно

$$\int_{CA} = \int_0^1 xdx + 0 + (2x-0+2(1-x))(-dx) = \int_0^1 (x-2)dy = \left.\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\right|_0^1 = -\frac{3}{2}.$$

$$C = 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$$

4. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a}(M) = (x^2 y - z)\bar{i} - xyz\,\bar{j} + (xy^3 + z^2)\bar{k}$ **.**

Решение.

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

По условию $P = x^2 y - z$, $Q = -xyz$, $R = xy^3 + z^2$.

Найдем частные производные $\frac{\partial R}{\partial y} = 3xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -xy$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -1$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^3$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -yz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$.

$$rot\vec{a}(M) = \left(3xy^2 + xy\right)\vec{i} + \left(-1 - y^3\right)\vec{j} + \left(-yz - x^2\right)\vec{k}$$

5. Проверить является ли векторное поле $\bar{a}(M) = (2x - 4yz)\bar{i} + (2y - 4xz)\bar{j} + (2z - 4xy)\bar{k}$ ***потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля*** $\vec{a}(M)$ ***найти его потенциал.***

Решение.

Вычислим дивергенцию поля по формуле $div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

По условию $P = 2x - 4yz$, $Q = 2y - 4xz$, $R = 2z - 4xy$.

$div\vec{a}(M) = 2 + 2 + 2 = 6 \neq 0$, следовательно поле не соленоиальное.

Вычислим ротор поля, для этого найдем частные производные

$\frac{\partial R}{\partial y} = -4x$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -4x$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -4y$, $\frac{\partial R}{\partial x} = -4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4z$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -4z$.

$rot\vec{a}(M) = \left(-4x + 4x\right)\vec{i} + \left(-4y + 4y\right)\vec{j} + \left(-4z + 4z\right)\vec{k} = 0$, следовательно поле потенциальное. Найдем потенциал поля, используя формулу

$$U(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi, y_0, z_0)d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\xi,z_0)d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\zeta + C$$

В качестве фиксированной точки выберем начало коориनат $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$P(\chi, y_0, z_0) = 2\chi$, $\quad Q(x, \xi, z_0) = 2\xi$, $\quad R(x, y, \zeta) = 2\zeta - 4xy$.

$$U(x,y,z) = \int_0^x 2\chi d\chi + \int_0^y 2\xi d\xi + \int_0^z (2\zeta - 4xy)d\zeta + C = \left.\frac{2\chi^2}{2}\right|_0^x + \left.\frac{2\xi^2}{2}\right|_0^y + \left.\left(\frac{\zeta^2}{2} - 4xy\zeta\right)\right|_0^z +$$

$$+C = x^2 + y^2 + z^2 - 4xyz + C$$

Образец решения контрольной работы №3 по разделу «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Задание 1. Решить уравнение $yy' = \dfrac{1-2x}{y}.$

Решение. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и запишем уравнение в виде

$y^2 dy = (1-2x)dx.$

Интегрируя, получим общее решение уравнения

$\int y^2 dy = \int (1-2x)dx$ или $\dfrac{y^3}{3} = x - x^2 + C,$

$y = \left(-3x^2 + 3x + C\right)^{1/3}$.

Задание 2. Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение. Это однородное дифференциальное уравнение, т.к. правая часть его является однородной функцией нулевой степени относительно *x* и *y*.

Действительно,

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{tx - ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = t^0 f(x, y).$$

Преобразуем правую часть уравнения, разделив числитель и знаменатель дроби на *x*. Тогда

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Сделаем замену $\dfrac{y}{x} = t$ или $y = xt.$ Тогда $\dfrac{dy}{dx} = t + x \cdot \dfrac{dt}{dx}$ и уравнение запишется в виде

$$t + x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Разделяем в нем переменные:

$$x\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1+t}{1-t}-t\Rightarrow x\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1+t-t+t^2}{1-t}$$

или

$$x\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1+t^2}{1-t}\Rightarrow\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения. Получаем:

$$\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\int\frac{dx}{x},$$

откуда следует $arctgt=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\ln C|x|$, где постоянную C берем в виде $\ln C$, чтобы упростить вид общего решения.

Возвращаясь к старым переменным, находим общее решение

$$arctg\,\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2},\ C>0.$$

Задание 3. Проинтегрировать уравнение

$$y'+2xy=2xe^{-x^2}. \qquad (1)$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$y'+2xy=0$ или $\frac{dy}{dx}=-2xy$.

Разделяя переменные, имеем $\frac{dy}{y}=-2xdx.$ Интегрируя это уравнение, получим его общее решение $\ln|y|=-x^2+\ln C\Rightarrow y=Ce^{-x^2}$.

Общее решение исходного уравнения ищем в виде

$$y=C(x)e^{-x^2}, \qquad (2)$$

где $C(x)$ - неизвестная функция. Найдем производную y':

$$y'=C'(x)e^{-x^2}+C(x)e^{-x2}\cdot(-2x).$$

Подставим y и y' в (1):

$$C'(x)e^{-x^2}-2xC(x)e^{-x^2}+2xC(x)e^{-x^2}=2xe^{-x^2},$$

которое после преобразований имеет вид:

$C'(x)=2x$, откуда $C(x)=x^2+C$.

В итоге, общее решение неоднородного уравнения (1) будет

$$y=\left(x^2+C\right)e^{-x^2}.$$

Задание 4. Решить уравнение $y'+xy=x^3y^3$.

Решение.Разделим обе части уравненияна $y^3\neq 0.$ Получим

$$y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3.$$

Сделаем замену переменных $z=y^{-2}$, заметив, что $z'=-2y^{-3}y'$.

В результате исходное уравнение будет преобразовано к виду

$$z' - 2xz = -2x^3. \qquad (1)$$

Полученное линейное относительно *z*уравнение решим методом Бернулли. Введем замену *z=uv*. Тогда

$$z' = \frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

Подставляя в *z*и *z'*в уравнение (1), получим:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - 2\tilde{o}uv = -2x^3.$$

Группируем второй и третий члены и выносим v за скобки:

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - 2xu\right) = -2x^3$$

Для определения u и vполучаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - 2xu = 0, \\ u\dfrac{dv}{dx} = -2x^3. \end{cases} \qquad (2)$$

Первое уравнение системы является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем одно из его решений:

$$\frac{du}{dx} - 2xu = 0, \text{ т.е. } \frac{du}{u} = 2xdx.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$\ln|u| = x^2$ и, окончательно, получим $u = e^{x^2}$.

Подставляем найденную функцию u во второе уравнение системы (2): $e^{x^2}\dfrac{dv}{dx} = -2x^3$. Отсюда $dv = -2x^3 e^{-x^2}$ и

$$v = -2\int x^3 e^{-x^2}dx = \int x^2 e^{-x^2}(-2x)dx = \int x^2 e^{-x^2}d(-x^2) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2; & du = 2xdx \\ dv = e^{-x2}d(-x^2); & v = e^{-x2} \end{vmatrix} = x^2 e^{-x^2} - 2\int e^{-x^2}xdx =$$

$$= x^2 e^{-x^2} + \int e^{-x^2}d(-x^2) = (x^2+1)\cdot e^{-x^2} + C.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) $z = uv$ имеет вид:

$$z = e^{x^2}\left((x^2+1)\cdot e^{-x^2} + C\right) = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

Учитывая, что $z = y^{-2}$, находим общее решение исходного уравнения:

$$\frac{1}{y^2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1.$$

Задание 5. Решить уравнение $(2y-3)dx + (2x+3y^2)dy = 0.$

Решение. Условие $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ является необходимым и достаточным условием, чтобы левая часть уравнения была полным дифференциалом $dU(x,y) = 0,$ откуда $U(x,y) = C -$ общий интеграл.

Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$M(x,y) = 2y - 3, \quad N(x,y) = 2x + 3y^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y-3) = 2; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3y^2) = 2;$$

так что $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, т.е. это условие выполнено. Таким образом, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Поэтому:

1) **из условия** $\dfrac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$ находим

$$U(x,y) = \int (2y-3)dx = 2xy - 3x + \varphi(y), \tag{7}$$

где $\varphi(y)$ **берем вместо постоянной *C*;**

2) дифференцируем найденное $U(x,y)$ по переменной *y*:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3x + \varphi(y)) = 2x + \varphi'(y);$$

3) приравняем найденную производную к функции $N(x,y)$, так как она является производной искомой функции $U(x,y)$ по переменной *y*:

$$2x + \varphi'(y) = 2x + 3y^2,$$

откуда $\varphi'(y) = 3y^2$. Интегрируя последнее равенство, находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C_1;$$

4) подставляя найденное значение $\varphi(y)$ в (7), получим искомую функцию

$$U(x,y) = 2xy - 3x + y^3 + C;$$

5) Приравняем $U(x,y) = C.$ Тогда получим общий интеграл:

$$U(x,y) = 2xy - 3x + y^3 = C.$$

Образец выполнения контрольной работы №4 по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений»

Задание 1. Решить уравнение $(1+x^2)y''-2xy'=0$

Решение. Уравнение не содержит искомую функцию y. Сделаем замену переменной $y'=p(x)$. Тогда $y''=p'(x)$ и уравнение запишется в виде:

$(1+x^2)p'-2xp=0.$

Это уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$\left(1+x^2\right)\frac{dp}{dx}=2xp \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{1+x^2},$$

отсюда

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{2xdx}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln C_1$ или $p=C_1(1+x^2).$

Используя замену $y'=p(x)$, возвращаемся к старой переменной y. Тогда

$\frac{dy}{dx}=C_1(x^2+1)$ и $dy=C_1(x^2+1)dx$,

проинтегрировав это уравнение, окончательно получим:

$$y=C_1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+C_2$$

- общее решение.

Задание 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+2yy'=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-1$.

Решение. Сделаем замену $y'=p(y)$. Тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$. Подставляя y' и y'' в уравнение, получим уравнение первого порядка:

$p\frac{dp}{dy}+2yp=0$ или $p\left(\frac{dp}{dy}+2y\right)=0$.

При $p\neq 0$ получаем $\frac{dp}{dy}+2y=0$ и тогда

$dp=-2ydy$.

Отсюда

$\int dp=-2\int ydy$ и $p=-y^2+C_1$.

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-y^2+C_1.$$

Используя начальные условия $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-1$, найдем постоянную C_1. Имеем $-1=-1+C_1\Rightarrow C_1=0$. Тогда

$y' = -y^2$

или

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x - C_2 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{x + C_2}.$$

Используя начальное условие $y\big|_{x=0} = 1$, находим C_2:

$$1 = \frac{1}{0 + C_2} \Rightarrow C_2 = 1.$$

Итак, $y = \dfrac{1}{x+1}$ -частное решение.

Задание 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^{2x}. \qquad (24)$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения $\boldsymbol{y''} + 4\boldsymbol{y} = 0$ найдем легко:

$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i$ -корни характеристического уравнения и $y_{00} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Правая часть заданного уравнения имеет вид $P_2(x)e^{2x}$. Так как $\alpha = 2$ ***не совпадает с корнем характеристического уравнения***, то частное решение $y_{чн}(x)$ будем искать в виде:

$$y_{чн} = Q_2(x) \cdot e^{2x} \text{ или } y_{чн}(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot e^{2x}.$$

Находим производные:

$$y'_{чн}(x) = (2Ax + B) \cdot e^{2x} + (Ax^2 + Bx + C) \cdot 2e^{2x} = \left(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B + 2C\right)e^{2x},$$

$$y''_{чн}(x) = (4Ax + 2A + 2B) \cdot e^{2x} + (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B + 2C) \cdot 2e^{2x} =$$

$$= \left(4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B + 4C\right)e^{2x}.$$

Подставляя $y_{чн}$ и $y''_{чн}$ в дифференциальное уравнение, и сокращая на e^{2x}, так как $e^{2x} \neq 0$, имеем:

$$4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B + 4C + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$$

или

$$8Ax^2 + 8Ax + 8Bx + 2A + 4B + 8C = x^2 + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{array}{c|l} x^2: & \\ x: & \\ x^0: & \end{array}\left\{\begin{array}{c} 8A = 1, \\ 8A + 8B = 0, \\ 2A + 4B + 8C = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{8}, \\ B = -\dfrac{1}{8}, \\ C = \dfrac{5}{32}. \end{array}\right.$$

Следовательно, частное решение есть

$$y_{чн}(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{5}{32}\right)e^{2x}$$

и общее решение имеет вид:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{5}{32}\right)e^{2x}.$$

Задание 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}. \qquad (49)$$

Решение. Соответствующее линейное однородное уравнение - $y'' + 4y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{00} = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x.$$

Общее решение данного этого неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_{он} = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x,$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ - неизвестные функции от *x*. Для их нахождения составляем систему вида $\begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x)\cdot y'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x).} \end{cases}$, которая в этом конкретном случае имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin 2x + C_2'(x)\cos 2x = 0 \\ 2C_1'(x)\cos 2x - 2C_2'(x)\sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}.$$

Решаем эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ методом Крамера. Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = -2 \neq 0.$$

Так определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение.
Находим частные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = tg2x.$$

Тогда по формулам Крамера имеем

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/2, \;\; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -tg2x/2.$$

Откуда интегрированием, получаем $C_1(x) = -x/2 + \overline{C}_1$, $C_2(x) = \ln|\cos 2x|/4 + \overline{C}_2$. Следовательно, решение неоднородного уравнения окончательно имеет вид

$$y_{он} = (\overline{C}_1 - \frac{x}{2})\sin 2x + (\ln|\cos 2x|/4 + \overline{C}_2)\cos 2x.$$

Задание 5. Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} dx/dt = -7x + y \\ dy/dt = -2x - 5y \end{cases}$

Решение. Одно из уравнений системы (например, первое уравнение, в этом случае стремятся получить дифференциальное уравнение относительно *x*) продифференцируем почленно по t и получим уравнение второго порядка.

$$x'' = -7x' + y'$$

Выразим из первоначальной системы уравнений y, y' через x, x' т.е.

$y = x' + 7x, \qquad y' = -2x - 5y = -2x - 5(x' + 7x) = -5x' - 37x$

И подставим в уравнение второго порядка относительно x

$$x'' = -7x' + y' = -12x' - 37x$$

Мы получили уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения будет:

$$x = c_1 e^{-6t} \cos t + c_2 e^{-6t} \sin t$$

Находим производную и, подставляя x, x' в значение для y получим:

$$y = c_1 e^{-6t} (\cos t - \sin t) + c_2 e^{-6t} (\sin t + \cos t)$$

4 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1

Задача 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X + 2Y$, ***если известны*** $M(X) = 5,\ M(Y) = 3,\ D(X) = 2,\ D(Y) = 4$.

Решение.

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11,$$

$$D(Z) = D(X + 2Y) = D(X) + D(2Y) = D(X) + 4D(Y) = 2 + 4 \cdot 4 = 18.$$

Задача 2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(4;10)$

Решение. Если случайная величина распределена по равномерному закону, то

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

По условию задачи $a = 4$, $b = 10$, тогда

$$M(X) = \frac{4+10}{2} = 7, \quad D(X) = \frac{(10-4)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3, \quad \sigma(X) = \sqrt{3}.$$

Задача 3. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составить закон распределения случайной величины X - числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

Решение.

Пусть X – дискретная случайная величина, равная числу банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4.

ДСВ X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 4$, $p = 0,2$, $q = 0,8$, поэтому найдем соответствующие вероятности по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Получаем:

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 0,4096;$$

$$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^3 = 0,4096;$$

$$P(X=2)=P_4(2)=C_4^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^2=0,1536;$$

$$P(X=3)=P_4(3)=C_4^3\cdot 0,2^3\cdot 0,8^1=0,0256;$$

$$P(X=4)=P_4(4)=C_4^4\cdot 0,2^4\cdot 0,8^0=0,0016$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид:

	x_i 0	1	2	3	4
	p_i 0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Расчеты произведены правильно, так как сумма $\sum p_i=1$.

Задача 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	**-1**	**2**	**3**	**4**
p_i	**0,4**	p_2	**0,1**	**0,2**

Найти p_2, $M(X)$, $D(X)$.

Решение.

Сначала найдем p_2 из условия $\sum p_i=1$.

$$0,4+p_2+0,1+0,2=1;\quad p_2=0,3.$$

Математическое ожидание вычислим по формуле $M(X)=\sum x_i p_i$:

$$M(X)=-1\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=1,3.$$

Дисперсию можно вычислить исходя из ее определения, но удобнее воспользоваться формулой $D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$.

Запишем закон распределения X^2:

x_i^2	-1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=1\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,1+16\cdot 0,2=5,7.$$

Найдем искомую дисперсию

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=5,7-1,3^2=4,01.$$

Задача 5. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ a(x-1), & 1\le x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент a; б) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) вычислить вероятность $P(0<X<3)$.

Решение.

а) Найдем параметр a из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$.

Получаем:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 a(x-1)dx = a\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^3 = a\left(\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1\right) = 2a;$$

$2a=1$; откуда $a=\frac{1}{2}$.

Тогда: $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ \frac{x-1}{2}, & 1\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$

б) Найдем математическое ожидание и дисперсию.

$$M(X)=\int_1^3 f(x)\cdot xdx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\cdot xdx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2-x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{3}.$$

$$D(X)=\int_1^3 f(x)\cdot x^2dx - M^2(X) = \frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\cdot x^2dx - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^3-x^2)dx - \left(\frac{7}{3}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 - \frac{49}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{4}-\frac{3^3}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{49}{9}=\frac{2}{9}.$$

в) Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал:

$$P(0<X<3)=\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 0dx + \int_1^3 \frac{x-1}{2}dx = 0+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

Образец решения контрольной работы №2

Задание 1. Обследование некоторой физической величины дало следующие результаты:

x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
n_i	7	25	28	30	8	2

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.

Решение. Составим вспомогательную расчетную таблицу. В качестве конкретных значений берем середины интервалов. Значения вариант достаточно большие, поэтому переходим к условным вариантам по формуле $u_i=\frac{x_i-c}{h}=\frac{x_i-190}{20}$.

x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	Итого:
x_i^*	130	150	170	190	210	230	

u_i	-3	-2	-1	0	1	2	
n_i	7	25	28	30	8	2	100
$u_i n_i$	-21	-50	-28	0	8	4	-87
$u_i^2 n_i$	63	100	28	0	8	8	207
$n_x.$	7	32	60	90	98	100	

Используя данные, приведенные в последнем столбце, имеем:

$$\bar{u} = \frac{-87}{100} = -0,87, \quad \overline{u^2} = \frac{207}{100} = 2,07, \quad D_u = \overline{u^2} - \bar{u}^2 = 2,07 - (-0,87)^2 = 1,3131.$$

Переходя к истинным вариантам, получим:

Выборочная средняя – $\bar{x}_в = \bar{u}h + C = -0,87 \cdot 20 + 190 = 172,6$;

Выборочная дисперсия – $D_x = h^2 D_u = 20^2 \cdot 1,3131 = 525,24$;

$\sigma = \sqrt{D_x} = \sqrt{525,24} \approx 22,92$;

Коэффициент вариации – $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}_в} \cdot 100\% \approx 13,28\%$.

Находим моду и медиану. Распределение задано интервальным рядом. Наибольшая частота $n_4 = 30$ отвечает интервалу 180-200, то этот интервал является модальным. Поэтому $x_{Mo} = 180$ – начало модального интервала; $n_{Mo} = 30$ – частота модального интервала; $n_{Mo-1} = 28$ – частота интервала, стоящего перед модальным; $n_{Mo+1} = 8$ – частота интервала, стоящего после модального, получим

$$Mo \approx 180 + 20\frac{30-28}{(30-28)+(30-8)} \approx 181,67.$$

Для нахождения медианы нужно определить медианный интервал, для этого найдем накопленные частоты n_x. Объем ряда $n = \sum n_i = 7 + 25 + 28 + 30 + 8 + 2 = 100$, тогда $n/2 = 50$.

Среди накопленных частот находим число 50. Такого числа нет, поэтому берем первое, большее 50 значение. Это будет 60. Интервал 160-180, ему соответствующий, и будет медианным. Следовательно, $x_{Me} = 160$ – начало медианного интервала; $n_{Me} = 28$ – частота медианного интервала; $(n_x)_{Me-1} = 32$ – накопленная частота интервала, стоящего перед медианным.

Подставим найденные значения в формулу, получим

$$Me \approx 160 + 20\frac{100/2-32}{28} \approx 172,86.$$

Задание 2. В результате 5 измерений некоторой физической величины получены данные: 2, 4, 7, 4, 5. Найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии. Вычислить моду и медиану.

Решение. Доказывается, что несмещенной точечной оценкой генеральной средней является выборочная средняя, а генеральной дисперсии – исправленная выборочная дисперсия.

Находим выборочную среднюю: $\overline{x}_в = \dfrac{2+4+7+4+5}{5} = \dfrac{22}{5} = 4,4$.

Находим выборочную дисперсию

$$D_в = \frac{2^2+4^2+7^2+4^2+5^2}{5} - (4,4)^2 = 2,64$$

Находим исправленную выборочную дисперсию

$$S_в^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{5}{4} \cdot 2,64 = 3,3.$$

Так как мода – наиболее часто встречающиеся значение, то $M_o = 4$.

Медиана – варианта, делящая вариационный ряд на равные по объему части. Для нахождения медиана первоначально ранжируем ряд наблюдений, получим 2, 4, 4, 5, 7. В центре ранжированного ряда находится значение 4, следовательно $M_e = 4$.

Задание 3. По данным 12 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\overline{x}_в = 16,8$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 1,5$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию, поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

покрывающего *a* с надежностью $\gamma = 0,95$.

По таблице по $\gamma = 0,95$ и $n = 12$ находим $t_\gamma = 2,20$.

Подставляя значения в формулу, получим доверительный интервал:

$$16,8 - 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} < a < 16,8 + 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}}$$

или

$$15,85 < a < 17,75.$$

Задание 4. Используя критерий χ^2 на уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки:

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

Решение. Для ответа на поставленный вопрос вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для удобства составим таблицу:

№	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	14	10	4	16	1,6
2	18	24	- 6	36	1,5

3	32	34	- 2	4	0,1176
4	70	80	- 10	100	1,25
5	20	18	2	4	0,222
6	36	22	14	196	8,909
7	10	12	- 2	4	0,333
					$\chi^2_{набл} \approx 13{,}93$

По таблице критических точек распределения хи-квадрат по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 7 - 3 = 4$ находим $\chi^2_{крит}(\alpha, k) = \chi^2_{крит}(0{,}05;4) = 9{,}5$. Итак, $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, следовательно, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности отвергается.

Задание 5. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и выборочный коэффициент корреляции. Сделать вывод о силе связи.

X	6	2	15	9	12	5	8
Y	82	86	43	74	58	90	78

Решение. Составим расчетную таблицу

№	x	y	xy	x^2	y^2
1	6	82	492	36	6724
2	2	86	172	4	7396
3	15	43	645	225	1849
4	9	74	666	81	5476
5	12	58	696	144	3364
6	5	90	450	25	8100
7	8	78	624	64	6084
Итого:	***57***	***511***	***3745***	***579***	***38993***

Подставим соответствующие суммы в формулы

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

(или в систему нормальных уравнений) получим:

$$k = \frac{7 \cdot 3745 - 57 \cdot 511}{7 \cdot 579 - (57)^2} = -\frac{2912}{804} \approx -3,62,$$

$$b = \frac{579 \cdot 511 - 3745 \cdot 57}{7 \cdot 579 - (57)^2} = \frac{82404}{804} \approx 102,49.$$

Следовательно, уравнение регрессии будет иметь вид

$$y = -3,62x + 102,49.$$

Коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{7 \cdot 3745 - 57 \cdot 511}{\sqrt{7 \cdot 579 - 57^2}\sqrt{7 \cdot 38993 - 511^2}} = \frac{-2912}{\sqrt{804}\sqrt{11830}} = -0,944.$$

Так как $r_в < 0,$ то связь между успеваемостью и количеством пропущенных пар обратная, т. е. с увеличением числа пропущенных пар успеваемость студентов снижается.
Используя шкалу Чеддока, сделаем вывод, что эта связь весьма высокая.

ПРИЛОЖЕНИЕ № 11

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Оценка промежуточной аттестации:

- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

- 20 баллов - Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Критерии оценивания вопросов для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

баллы	Критерии
8-10	глубоко и прочно усвоил теоретический материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, усвоил методы математического анализа проведения исследований и анализа их результатов
5-7	понимает содержание основных методов математического анализа, грамотно излагает их суть, допуская незначительные неточности в формулировках определений и теорем
1-3	допускает неточности в формулировках определений, теорем; недостаточно владеет теоретическим материалом
0	не знает основных понятий и методов математического анализа

Критерии оценивания заданий для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

баллы	Критерии
20-16	владеет математическими методами, разносторонними навыками и приемами решения практических задач, уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 85-100 % практических заданий)
15-11	умеет применять математические методы, но допускает недочеты и ошибки при решении практических задач, недостаточно уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 50-85 % практических заданий)
10-6	испытывает затруднения при решении практических заданий (в билете решено 30-50 % практических заданий)
5-0	не владеет математическим инструментарием, допускает грубые ошибки при решении практических задач (в билете решено менее 30 % практических заданий)