

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Межгосударственная образовательная организация высшего образования
Кыргызско-Российский Славянский университет имени первого Президента
Российской Федерации Б.Н. Ельцина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине (модулю)

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Уровень высшего образования:	БАКАЛАВРИАТ
Направление подготовки:	44.03.01 (РФ) / 550200 (КР) — Педагогическое образование
Профиль:	«Математика» (в билингвальной образовательной среде)
Квалификация:	Бакалавр
Форма обучения:	Очная
Кафедра:	Педагогического образования

Бишкек 2024 г.

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 / 550200 — Педагогическое образование (профиль «Математика» в билингвальной образовательной среде) по дисциплине «АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утверждён на заседании кафедры
Педагогического образования
протокол № 2 от «29» октября 2024 г.

Заведующий кафедрой Педагогического образования _____ Ахметова З.А.

Руководитель образовательной программы _____ Ахметова З.А.

Составитель:

кандидат физико-математических наук, доцент _____ Комарцова Е.А.

Рецензент:

кандидат педагогических наук, доцент _____ Назарматова Г.А.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Межгосударственная образовательная организация высшего образования
Кыргызско-Российский Славянский университет имени первого Президента
Российской Федерации Б.Н. Ельцина

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине (модулю)

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Уровень высшего образования:	БАКАЛАВРИАТ
Направление подготовки:	44.03.01 (РФ) / 550200 (КР) — Педагогическое образование
Профиль:	«Математика» (в билингвальной образовательной среде)
Квалификация:	Бакалавр
Форма обучения:	Очная
Кафедра:	Педагогического образования

Бишкек 2024 г.

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 / 550200 — Педагогическое образование (профиль «Математика» в билингвальной образовательной среде) по дисциплине «АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утверждён на заседании кафедры Педагогического образования
протокол № 2 от «29» октября 2024 г.

Заведующий кафедрой Педагогического образования _____ Ахметова З.А.

Руководитель образовательной программы _____ Ахметова З.А.

Составитель:

кандидат физико-математических наук, доцент _____ Комарцова Е.А.

Рецензент:

кандидат педагогических наук, доцент _____ Назарматова Г.А.

1. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ С УКАЗАНИЕМ ЭТАПОВ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» формирует следующие компетенции:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (этапы формирования компетенций)	Виды оценочных средств / шифр раздела
ОПК-8: Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ЗНАТЬ: – основные алгебраические структуры (группы, кольца, поля) и их свойства (ур. 1); – ключевые теоремы арифметики: основная теорема арифметики, свойства делимости, сравнения (ур. 2); – способы представления учебного материала по алгебре и теории чисел для школьников (ур. 3).	Блок А, D — задания репродуктивного уровня (тесты, устный опрос, коллоквиум, вопросы к экзамену)
	УМЕТЬ: – объяснять фундаментальные алгебраические понятия в доступной форме (ур. 1); – использовать методы доказательства (индукция, дедукция, конструктивные доказательства) в педагогической практике (ур. 2); – применять теоретические положения к созданию учебных задач и примеров (ур. 3).	Блок В, D — задания реконструктивного уровня (типовые задачи, практические работы, расчётные задания)
	ВЛАДЕТЬ: – методами структурирования учебного материала по алгебре и теории чисел (ур. 1); – приёмами визуализации абстрактных понятий (схемы, модели, аналогии) (ур. 2); – навыками педагогического сопровождения решения алгебраических задач (ур. 3).	Блок С, D — задания практико-ориентированного и/или исследовательского уровня (кейс-стади, индивидуальные задания, проблемные задачи)
ПК-1: Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ЗНАТЬ: – свойства алгебраических структур и методы их анализа (ур. 1); – основные алгоритмы теории чисел (НОД, разложение на простые, сравнения) (ур. 2); – методы решения профессиональных задач, требующих глубоких теоретических знаний (ур. 3).	Блок А, D — задания репродуктивного уровня (тесты, устный опрос, вопросы к экзамену)
	УМЕТЬ: – решать задачи по алгебре и теории чисел, применяя теоретические модели (ур. 1);	Блок В, D — задания реконструктивного уровня (практические задачи, контрольные работы, аналитические задания)

	– использовать математические методы для анализа профессиональных педагогических ситуаций (ур. 2); – обобщать и интерпретировать результаты решения задач (ур. 3).	
	ВЛАДЕТЬ: – навыками применения теоретического аппарата алгебры в профессиональной деятельности (ур. 1); – инструментами анализа и решения числовых и алгебраических задач (ур. 2); – методами разработки учебно-методических материалов по алгебре (ур. 3).	Блок С, D — задания практико-ориентированного и/или исследовательского уровня (разработка учебных задач, кейс-анализ, исследовательские задания)

2. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Технологическая карта дисциплины (ТКД) определяет порядок изучения дисциплины, совокупность видов учебной нагрузки обучающихся, график проведения контрольных точек, формы контроля знаний, диапазоны оценки по контрольным точкам.

2.1. Семестр 3 (2 курс, 1 семестр)

Дисциплина: Предметный модуль «Алгебра и теория чисел»

Курс / семестр: 2/3 | Кредиты (ЗЕТ): 3 | Отчётность: зачёт с оценкой

Название модулей дисциплины	Вид контроля	Форма контроля	Зачётный минимум (баллов)	Зачётный максимум (баллов)	График контроля
Модуль 1. Логика. Множества. Алгебраические структуры (группы, кольца, поля)	Текущий контроль	Фронтальный опрос, проверочные работы по теории; активность на лекциях и практических занятиях (за каждое пропущенное и не отработанное занятие снимается 0,5 балла; за активность +0,5 балла)	10	15	6 неделя семестра
	Рубежный контроль	Тестирование по темам модуля 1	3	5	6 неделя семестра
Модуль 2. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений	Текущий контроль	Фронтальный опрос, практические задачи у доски, работа в малых группах; активность (учёт посещаемости: –0,5 / +0,5 балла)	10	15	12 неделя семестра
	Рубежный контроль	Аудиторная контрольная работа	3	5	12 неделя семестра
Модуль 3. Векторные пространства. Линейная зависимость. Базис	Текущий контроль	Фронтальный опрос, практические задачи, аналитическое задание; учёт посещаемости (–0,5 / +0,5 балла)	10	15	16–17 неделя семестра
	Рубежный контроль	Тестирование; защита аналитического задания (разбор задач повышенной трудности)	4	15	17 неделя семестра
ВСЕГО за семестр (ТК + РК)			40	70	
Промежуточный контроль (Зачёт с оценкой)		Устный опрос по теоретическим вопросам; решение	20	30	18–19 неделя

		практических задач (по одной задаче на УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ)			
Семестровый рейтинг			60	100	

2.2. Семестр 4 (2 курс, 2 семестр)

Дисциплина: Предметный модуль «Алгебра и теория чисел»

Курс / семестр: 2/4 | Кредиты (ЗЕТ): 6 | Отчётность: экзамен

Название модулей дисциплины	Вид контроля	Форма контроля	Зачётный минимум (баллов)	Зачётный максимум (баллов)	График контроля
Модуль 4. Линейные операторы. Собственные векторы и значения	Текущий контроль	Фронтальный опрос, практические задачи; учёт посещаемости (–0,5 / +0,5 балла)	5	10	5 неделя
	Рубежный контроль	Аудиторная контрольная работа по матрице линейного оператора и собственным значениям	3	5	6 неделя
Модуль 5. Евклидовы пространства. Многочлены	Текущий контроль	Практические задачи, мозговой штурм, письменные задания; учёт посещаемости (–0,5 / +0,5 балла)	5	10	11 неделя
	Рубежный контроль	Тестирование по темам модуля (НОД, НОК многочленов, корни многочленов)	3	5	12 неделя
Модуль 6. Теория чисел: делимость, простые числа, сравнения	Текущий контроль	Фронтальный опрос, практические задачи (сравнения, функция Эйлера, цепные дроби); активность; учёт посещаемости (–0,5 / +0,5 балла)	5	10	15 неделя
	Рубежный контроль	Коллоквиум: теоремы Эйлера и Ферма, цепные дроби, сравнения высших степеней	4	10	15 неделя
Квадратичные формы (Модуль 7, доп.)	Текущий контроль	Практические задания по приведению к каноническому виду, закону инерции; письменные работы	5	10	17 неделя

	Рубежный контроль	Контрольная работа по квадратичным формам	2	5	17 неделя
ВСЕГО за семестр (ТК + РК)			40	70	
Промежуточный контроль (Экзамен)		Устный ответ на 2 теоретических вопроса + решение 2 практических задач (УМЕТЬ + ВЛАДЕТЬ). На ответ отводится 30 мин.	20	30	18–21 неделя
Семестровый рейтинг			60	100	

Шкала семестрового рейтинга:

Баллы	Оценка
85–100	Отлично
70–84	Хорошо
60–69	Удовлетворительно
Менее 60	Неудовлетворительно

3. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА)

БЛОК А — Оценочные средства для диагностики уровня «ЗНАТЬ» (репродуктивный уровень)

А.0. Фонд тестовых заданий по дисциплине

Тест содержит 20 вопросов закрытого типа (один правильный ответ из четырёх предложенных). Каждый правильный ответ — 5 баллов. Максимум — 100 баллов. Время выполнения — 30 минут.

Примеры тестовых заданий:

1. Какое из следующих утверждений является определением группы?

- Множество с одной бинарной операцией, замкнутой на этом множестве
- Непустое множество G с бинарной операцией, для которой выполнены: ассоциативность, существование нейтрального элемента и обратного элемента для каждого
- Множество с коммутативной операцией сложения
- Множество целых чисел с умножением

Правильный ответ: б)

2. Функция Эйлера $\varphi(p)$ для простого числа p равна:

- p
- $p - 1$
- $p + 1$
- $p/2$

Правильный ответ: б)

3. Основная теорема арифметики утверждает, что:

- Каждое натуральное число больше 1 разложимо в произведение простых множителей, причём это разложение единственно с точностью до порядка
- Каждое чётное число является суммой двух простых
- Существует бесконечно много простых чисел-близнецов
- Между n и $2n$ всегда есть простое число

Правильный ответ: а)

4. Ранг матрицы A — это:

- Количество строк матрицы
- Максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы
- Значение определителя матрицы

- Число ненулевых элементов матрицы

Правильный ответ: б)

5. НОД(48, 18) по алгоритму Евклида равен:

- 2
- 6
- 3
- 9

Правильный ответ: б)

6. Число a сравнимо с числом b по модулю m ($a \equiv b \pmod{m}$), если:

- $a + b$ кратно m
- m делит разность $(a - b)$
- a и b имеют одинаковые остатки при делении на m и $a - b > 0$
- $a \cdot b$ кратно m

Правильный ответ: б)

7. Теорема Ферма утверждает, что для простого p и целого a , не кратного p :

- $a^p \equiv 1 \pmod{p}$
- $a^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$
- $a^{(p-1)} \equiv 0 \pmod{p}$
- $a^p \equiv a \pmod{p^2}$

Правильный ответ: б)

8. Квадратичная форма называется положительно определённой, если:

- Все её коэффициенты положительны
- Её значение больше нуля для любого ненулевого вектора
- Её дискриминант положителен
- Она приводится к диагональному виду

Правильный ответ: б)

А.1. Вопросы для устного опроса

Тема 1. Элементы математической логики и теории множеств

1. Дайте определение высказывания. Приведите примеры.
2. Перечислите основные логические операции и их свойства.
3. Что такое тавтология? Приведите пример.
4. Сформулируйте метод математической индукции.
5. Что такое декартово произведение множеств?

Тема 2. Алгебраические структуры

6. Дайте определение группы. Чем абелева группа отличается от неабелевой?
7. Что такое подгруппа? Сформулируйте критерий подгруппы.

8. Дайте определение кольца. Приведите примеры.
9. Что такое поле? Чем поле отличается от кольца?
10. Дайте определение векторного пространства над числовым полем.

Тема 3. Линейная алгебра

11. Что такое линейная зависимость системы векторов?
12. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли.
13. Что такое ранг матрицы? Как его найти?
14. Что такое обратная матрица? Когда она существует?
15. Сформулируйте свойства определителей.

Тема 4. Теория чисел

16. Сформулируйте основную теорему арифметики.
17. Что такое функция Эйлера? Чему равна $\varphi(p^k)$?
18. Сформулируйте теоремы Эйлера и Ферма.
19. Что такое цепная дробь? Как разложить рациональное число в цепную дробь?
20. Что такое первообразный корень по модулю p ?

А.2. Вопросы для рубежного контроля (коллоквиум)

Модуль 1 (Семестр 3):

21. Что такое равносильные формулы алгебры высказываний? Законы де Моргана.
22. Дайте определение бинарного отношения и его основных видов (эквивалентность, порядок, функция).
23. Перечислите аксиомы группы. Докажите единственность нейтрального элемента.
24. Что такое кольцо классов вычетов Z_n ? При каких n оно является полем?
25. Дайте определение поля комплексных чисел. Запишите формулу Муавра.

Модуль 3 (Теория чисел, Семестр 4):

26. Сформулируйте теорему о делении с остатком. Докажите алгоритм Евклида.
27. Что такое взаимно простые числа? Сформулируйте лемму Безу.
28. Как найти $\varphi(n)$ для произвольного n ? Приведите вычисление для $n = 36$.
29. Как решить линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$?
30. Как представить рациональное число в виде цепной дроби? Что такое подходящие дроби?

БЛОК В — Оценочные средства для диагностики уровня «УМЕТЬ» (реконструктивный уровень)

В.1. Типовые задачи

Тема 1. Логика и множества

31. Докажите методом математической индукции, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
32. Покажите, что формула $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ является тавтологией.
33. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Тема 2. Матрицы и системы линейных уравнений

34. Вычислите определитель матрицы 3×3 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Объясните результат.
35. Найдите обратную матрицу A^{-1} для $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.
36. Решите систему методом Гаусса: $2x + y - z = 3$; $x - y + 2z = 1$; $3x + 2y + z = 7$.
37. Найдите общее решение однородной системы $Ax = 0$, где ранг $A = 2$, число неизвестных = 4. Укажите фундаментальную систему решений.

Тема 3. Векторные пространства

38. Проверьте линейную зависимость/независимость векторов: $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,4,6)$, $v_3=(1,0,1)$.
39. Найдите координаты вектора $x=(3,1,2)$ в базисе $e_1=(1,1,0)$, $e_2=(0,1,1)$, $e_3=(1,0,1)$.
40. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Тема 4. Многочлены

41. Разделите многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$ на $g(x) = x - 1$ по схеме Горнера.
42. Найдите НОД многочленов $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ и $g(x) = x^2 - 1$ с помощью алгоритма Евклида.
43. Разложите на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители: $p(x) = x^4 - 1$.

Тема 5. Теория чисел

44. Найдите НОД(756, 120) алгоритмом Евклида и выразите его в виде $756s + 120t$.
45. Разложите 360 на простые множители. Найдите $\varphi(360)$, $\sigma(360)$.
46. Решите линейное сравнение: $7x \equiv 3 \pmod{11}$.
47. Вычислите $3^{100} \pmod{7}$, используя теорему Ферма.
48. Представьте $355/113$ в виде цепной дроби. Найдите первые три подходящие дроби.

В.2. Задания для аудиторных контрольных работ

Контрольная работа №1 (Семестр 3, Модуль 2). Матрицы и определители. Время: 45 мин.

Вариант 1:

49. Вычислите определитель матрицы 3×3 : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
50. Найдите обратную матрицу: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
51. Решите систему $Ax = b$ методом Крамера, где $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $b = (5, 8)^T$.

Контрольная работа №2 (Семестр 4, Модуль 4). Линейные операторы. Время: 45 мин.

Вариант 1:

52. Найдите матрицу линейного оператора f , действующего по правилу $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$ в стандартном базисе.
53. Найдите собственные значения и векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
54. Приведите матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ к жордановой нормальной форме.

БЛОК С — Оценочные средства для диагностики уровня «ВЛАДЕТЬ» (практико-ориентированный и исследовательский уровень)

С.1. Перечень дискуссионных тем для проведения круглого стола (мозгового штурма)

- 55. «Алгебра и теория чисел в криптографии: как RSA-шифрование использует теорему Эйлера?»
- 56. «Простые числа: нерешённые проблемы математики (гипотеза Гольдбаха, гипотеза о простых-близнецах)».
- 57. «Как доказывать теоремы школьникам: от дедукции к конструктивным доказательствам».
- 58. «Группы симметрий в природе и искусстве: педагогический потенциал».
- 59. «Цепные дроби и наилучшие рациональные приближения: практические приложения».

С.2. Индивидуальные творческие задания

Задание 1 (практико-ориентированное). Разработайте серию из 5 задач по теории делимости для учеников 7–8 класса с решениями и методическими пояснениями. Каждая задача должна быть на разном уровне сложности (от репродуктивного до исследовательского). Объём: 4–6 страниц.

Задание 2 (исследовательское). Исследуйте связь теоремы Ферма с тестами простоты чисел (тест Миллера–Рабина). Опишите алгоритм, приведите примеры вычислений для нескольких чисел. Укажите ограничения. Объём: 3–5 страниц + вычислительная часть.

Задание 3 (педагогическое). Составьте технологическую карту одного урока по теме «Делимость натуральных чисел» для 6 класса, используя интерактивные методы (мозговой штурм, кейс-стади). Цели урока должны быть сформулированы в терминах компетенций. Объём: 2–3 страницы.

Задание 4 (аналитическое). Проведите анализ типичных ошибок школьников при решении задач на нахождение НОД и НОК. Предложите систему коррекционных упражнений. Объём: 3–4 страницы.

С.3. Кейс-задания

Кейс №1: «Шифрование сообщения»

Ситуация: Необходимо зашифровать сообщение $M = 7$ с помощью алгоритма RSA, используя простые числа $p = 11$ и $q = 13$.

Задания:

- 60. Вычислите $n = p \cdot q$ и $\varphi(n)$.

61. Выберите ключ шифрования e (взаимно простой с $\varphi(n)$, $1 < e < \varphi(n)$). Обоснуйте выбор.
62. Найдите ключ расшифровки d , используя расширенный алгоритм Евклида ($ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$).
63. Зашифруйте M : $C = M^e \pmod{n}$. Расшифруйте: $M = C^d \pmod{n}$. Проверьте результат.
64. Объясните, как этот алгоритм связан с теоремой Эйлера.

Кейс №2: «Педагогическое проектирование»

Ситуация: Вам поручено разработать тест для входного контроля знаний студентов 1 курса по теме «Алгебраические структуры». Среди студентов есть те, кто знаком с материалом, и те, кто видит его впервые.

Задания:

65. Составьте 10 тестовых вопросов: 4 репродуктивных (знать), 4 реконструктивных (уметь), 2 практико-ориентированных (владеть).
66. Для каждого вопроса укажите, какую компетенцию он проверяет (ОПК-8 или ПК-1).
67. Разработайте шкалу оценивания теста в процентах.
68. Опишите, как вы будете интерпретировать результаты для корректировки учебного плана.

БЛОК D — Оценочные средства промежуточной аттестации

D.1. Вопросы к зачёту с оценкой (Семестр 3)

Вопросы для проверки уровня «ЗНАТЬ»:

69. Дайте определение высказывания. Перечислите основные логические операции.
70. Что такое тавтология? Равносильные формулы алгебры высказываний.
71. Метод математической индукции: формулировка и схема применения.
72. Множество: способы задания, операции над множествами. Диаграммы Эйлера–Венна.
73. Бинарные отношения: определение, основные свойства. Отношения эквивалентности и порядка.
74. Алгебраическая операция. Определение группы. Примеры.
75. Кольцо: определение, простейшие свойства. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$.
76. Поле: определение, примеры. Поле рациональных и действительных чисел.
77. Поле комплексных чисел. Тригонометрическая форма. Формула Муавра.
78. Матрица: виды матриц, действия с матрицами.
79. Определитель матрицы: определение, свойства, методы вычисления.
80. Обратная матрица: существование и метод нахождения.
81. Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.
82. Системы линейных уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод.
83. Векторное пространство: определение, примеры. Подпространства, линейная оболочка.
84. Линейная зависимость и независимость системы векторов.
85. Базис и размерность векторного пространства.

Задачи для проверки уровня «УМЕТЬ»:

86. Доказать заданное тождество методом математической индукции.
87. Вычислить определитель матрицы 3×3 разложением по строке/столбцу.
88. Найти обратную матрицу. Решить систему матричным методом.
89. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.
90. Проверить линейную зависимость векторов. Найти базис линейной оболочки.

Задачи для проверки уровня «ВЛАДЕТЬ»:

91. Определить, является ли заданное множество с операцией группой. Обосновать.
92. Найти координаты вектора в заданном базисе, использовать теорему о размерности суммы подпространств.

D.2. Вопросы к экзамену (Семестр 4)

Вопросы для проверки уровня «ЗНАТЬ»:

93. Линейный оператор: определение, матрица линейного оператора. Связь матриц в разных базисах.
94. Дефект и ранг линейного оператора.

- 95. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен.
- 96. Жорданова нормальная форма матрицы.
- 97. Евклидово пространство. Скалярное произведение. Норма вектора.
- 98. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
- 99. Квадратичная форма: определение, приведение к каноническому виду.
- 100. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра.
- 101. Делимость многочленов. Деление с остатком. Теорема Безу.
- 102. НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида для многочленов.
- 103. Неприводимые многочлены. Основная теорема алгебры.
- 104. Критерий неприводимости Эйзенштейна.
- 105. Делимость натуральных чисел. Теорема о делении с остатком. НОД, НОК.
- 106. Основная теорема арифметики. Решето Эратосфена.
- 107. Функция Эйлера. Мультипликативные арифметические функции.
- 108. Цепные дроби. Подходящие дроби и их свойства.
- 109. Сравнения и их свойства. Полная и приведённая системы вычетов.
- 110. Теоремы Эйлера и Ферма. Доказательство и применения.
- 111. Линейные сравнения с одним неизвестным. Китайская теорема об остатках.
- 112. Первообразные корни. Индексы. Сравнения высших степеней.

Задачи для проверки уровня «УМЕТЬ»:

- 113. Найти матрицу линейного оператора в заданном базисе.
- 114. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.
- 115. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
- 116. Найти НОД двух многочленов; разложить многочлен на неприводимые множители.
- 117. Решить сравнение. Применить теорему Эйлера/Ферма для вычислений.
- 118. Разложить число в цепную дробь; найти подходящие дроби.

Задачи для проверки уровня «ВЛАДЕТЬ»:

- 119. Определить тип квадратичной формы (положительно определённая, знакопостоянная и т.д.). Обосновать через критерий Сильвестра.
- 120. Разработать и решить учебную задачу на применение теоремы Эйлера (например, задачу по RSA-криптографии на упрощённом примере).

D.3. Экзаменационные билеты (образцы)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

Вопрос 1 (ЗНАТЬ):

Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Каков алгоритм нахождения приводящей замены?

Вопрос 2 (ЗНАТЬ):

Теоремы Эйлера и Ферма: формулировки, доказательства, примеры применения.

Задача (УМЕТЬ):

Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Будет ли A диагонализуема? Если да, найдите диагонализующую матрицу.

Задача (ВЛАДЕТЬ):

Решите систему сравнений по китайской теореме об остатках: $x \equiv 2 \pmod{3}$; $x \equiv 3 \pmod{5}$; $x \equiv 2 \pmod{7}$. Укажите наименьшее положительное решение.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2

Вопрос 1 (ЗНАТЬ):

Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

Вопрос 2 (ЗНАТЬ):

Первообразные корни и индексы. Сравнения высших степеней.

Задача (УМЕТЬ):

Разложите $p(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$ в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов. Найдите все корни.

Задача (ВЛАДЕТЬ):

Дан линейный оператор $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x+y, y+z, x+2z)$. Найдите его матрицу. Определите ранг и дефект. Являются ли векторы $e_1=(1,0,0)$ и $(1,1,1)$ собственными?

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ

4.1. Описание показателей и критериев оценивания компетенций

Оценка / Баллы	Критерии оценивания компетенций ОПК-8 и ПК-1	Уровень
Отлично 85–100 баллов	Обучающийся демонстрирует глубокое, прочное усвоение программного материала; исчерпывающе, последовательно и логически стройно излагает ответ; правильно и уверенно применяет теоретические положения при решении задач; демонстрирует знакомство с монографической и дополнительной литературой; способен объяснять материал в педагогическом контексте; не допускает ошибок.	Высокий
Хорошо 70–84 балла	Обучающийся твёрдо знает программный материал, грамотно и по существу его излагает; не допускает существенных неточностей; правильно применяет теоретические положения при решении практических задач; допускает незначительные ошибки, уверенно исправляемые после наводящих вопросов.	Достаточный
Удовлетворительно 60–69 баллов	Обучающийся знает основной программный материал, но не усвоил деталей; допускает неточности в ответах; не всегда правильно формулирует основные законы и теоремы; затрудняется при решении практических задач повышенной сложности.	Минимальный
Неудовлетворительно менее 60 баллов	Обучающийся не знает значительной части программного материала; допускает существенные ошибки; не может самостоятельно решить практические задачи; не демонстрирует навыков, необходимых для профессиональной деятельности.	Недостаточный

4.2. Описание шкал оценивания отдельных видов оценочных средств

4.2.1. Шкала оценивания тестовых заданий

Тест: 20 вопросов закрытого типа. Каждый правильный ответ — 5 баллов. Максимум — 100 баллов.

% правильных ответов	Баллы	Оценка
85–100 %	85–100	Отлично
70–84 %	70–84	Хорошо
60–69 %	60–69	Удовлетворительно
Менее 60 %	0–59	Неудовлетворительно

4.2.2. Шкала оценивания устного ответа (коллоквиум / зачёт / экзамен)

Баллы	Критерии оценки устного ответа
16–20 (зачёт) / 24–30 (экзамен)	Демонстрирует полное, глубокое понимание материала; профессионально излагает ключевые понятия, теоремы, доказательства; без ошибок решает задачи; демонстрирует способность объяснять материал в педагогическом контексте.
11–15 (зачёт) / 16–23 (экзамен)	Демонстрирует хорошее понимание; незначительные неточности, исправляемые после наводящих вопросов; решает большинство практических задач.
6–10 (зачёт) / 10–15 (экзамен)	Демонстрирует частичное понимание; допускает ошибки в формулировках; затрудняется с доказательствами и сложными задачами.
0–5 (зачёт) / 0–9 (экзамен)	Не знает значительной части материала; существенные ошибки; не справляется с практическими задачами.

4.2.3. Шкала оценивания практических (контрольных) работ

% выполнения	Критерии
85–100 %	Все задачи решены верно, ход решения полностью обоснован, правильно применены теоремы и алгоритмы.
70–84 %	Большинство задач решены верно; незначительные вычислительные ошибки, не влияющие на логику.
60–69 %	Часть задач решена верно; допущены ошибки в применении алгоритмов, но общий подход верный.
Менее 60 %	Большинство задач не решены или решены принципиально неверно.

4.2.4. Шкала оценивания индивидуального творческого задания / кейса

№	Наименование показателя	Максимальный балл (%)
1	Понимание проблематики и адекватность трактовки	0–20
2	Оригинальность подхода и обоснованность выводов	0–25
3	Привлечение математического аппарата (корректность, уместность)	0–25
4	Педагогическая ценность (для заданий педагогической направленности)	0–20
5	Логичность изложения и культура речи / оформления	0–10
	Итого	0–100

4.3. Процедура проведения промежуточной аттестации

Зачёт с оценкой (Семестр 3)

Зачёт с оценкой проводится в устной форме. Билет включает:

- 2 теоретических вопроса (1 — на уровень ЗНАТЬ, 1 — на уровень ЗНАТЬ / УМЕТЬ);
- 1 практическую задачу (уровень УМЕТЬ или ВЛАДЕТЬ).

На подготовку ответа отводится 20 минут, на ответ — 15 минут.

За теоретические вопросы студент может получить максимально 20 баллов, за задачу — 10 баллов (итого из 30 баллов промежуточного контроля).

Преподаватель вправе освободить от практической задачи студентов, набравших 65 и более баллов за ТК и РК. Итоговая оценка рассчитывается как сумма баллов ТК + РК + ПК.

Экзамен (Семестр 4)

Экзамен проводится в устной форме. Билет включает:

- 2 теоретических вопроса (оба — уровень ЗНАТЬ); за каждый — до 10 баллов;
- 1 задачу уровня УМЕТЬ — до 5 баллов;
- 1 задачу уровня ВЛАДЕТЬ — до 5 баллов.

Итого на экзамене: максимум 30 баллов.

На подготовку отводится 30 минут. Разрешено использовать справочные формулы (листы с формулами, составленные преподавателем). Электронные устройства не разрешены.

Студенты, набравшие 70 и более баллов за ТК и РК, могут получить оценку на экзамене без ответа на практическую задачу (ВЛАДЕТЬ) при условии полного и верного ответа на теоретические вопросы.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

5.1. Общие рекомендации по работе на лекциях и практических занятиях

Осваивая курс «Алгебра и теория чисел», студенту необходимо научиться работать на лекциях, практических занятиях и организовывать самостоятельную внеаудиторную деятельность.

На лекции:

- В начале лекции уясните цель, которую преподаватель ставит перед аудиторией.
- Внимательно слушайте, отмечайте наиболее существенную информацию, кратко фиксируйте в тетради определения, теоремы, формулы.
- Сравнивайте услышанное с ранее усвоенным; встраивайте новое в систему знаний.
- Тщательно воспроизводите все чертежи, схемы, формулы, следуя за преподавателем.
- Если после лекции остались вопросы — задайте их в конце занятия или на консультации.

На практических занятиях:

- Готовьтесь заблаговременно: изучите лекционный материал по теме, проработайте рекомендованные разделы учебников.
- Выполните все задачи, выданные для самостоятельного решения на предыдущем занятии.
- Будьте готовы объяснить ход решения у доски, участвовать в обсуждении.
- Обращайте особое внимание на обоснование каждого шага решения.

5.2. Организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа студентов организуется следующим образом:

121. На каждом занятии выдаётся домашнее задание из методических пособий (части 1–4) или индивидуальные карточки.
122. Часть тем выносятся на самостоятельное изучение: доказательства отдельных теорем, свойств, специальные случаи алгоритмов.
123. Для внеаудиторной работы выдаются индивидуальные задания уровней В и С.
124. Для подготовки к коллоквиуму/рубежному контролю выдаются перечни вопросов заранее.

При подготовке к промежуточному контролю рекомендуется:

125. Повторить теоретические вопросы: определения, формулировки теорем, основные доказательства.

126. Самостоятельно решить несколько типовых задач из блоков А–В без обращения к решениям.
127. Разобрать решения типовых задач из методических пособий [3, 4, 7] (см. список литературы в РПД).
128. Составить собственную шпаргалку формул (для лучшего запоминания; на экзамене будет разрешён лист с формулами преподавателя).

5.3. Рекомендации по подготовке к тестированию

Тестирование проводится с использованием письменных бланков или системы автоматизированного тестирования (по усмотрению преподавателя). На тестирование отводится 30 минут. Каждый вариант содержит 20 вопросов. За каждый правильный ответ — 5 баллов. При подготовке:

- Повторите определения и ключевые теоремы по всем темам модуля.
- Прорешайте задачи на вычисление определителей, ранга матрицы, НОД, $\varphi(n)$.
- Разберите примеры тестовых заданий из блока А.0 настоящего ФОС.

5.4. Рекомендации по отработке пропущенных занятий

- Каждое пропущенное без уважительной причины занятие отрабатывается в обязательном порядке в период дежурства преподавателя (по расписанию кафедры).
- Пропущенные занятия должны быть отработаны не позднее чем через 10 дней после пропуска.
- Лекционный материал отрабатывается методом устного опроса или подготовкой реферата по пропущенной теме (по согласованию с преподавателем).
- Студенты, пропустившие занятия по болезни, предоставляют справку и работают по индивидуальному графику, согласованному с кафедрой.

5.5. Эталонный вариант решения типовой задачи

Задача: Найдите НОД(252, 105) и выразите его в виде линейной комбинации $252s + 105t$.

Решение:

Применяем алгоритм Евклида:

$$252 = 2 \cdot 105 + 42$$

$$105 = 2 \cdot 42 + 21$$

$$42 = 2 \cdot 21 + 0$$

Следовательно, НОД(252, 105) = 21.

Обратный ход:

$$\begin{aligned}
 21 &= 105 - 2 \cdot 42 \\
 &= 105 - 2 \cdot (252 - 2 \cdot 105) = 105 - 2 \cdot 252 + 4 \cdot 105 = 5 \cdot 105 - 2 \cdot 252
 \end{aligned}$$

Ответ: НОД = 21 = $(-2) \cdot 252 + 5 \cdot 105$, то есть $s = -2$, $t = 5$.

Проверка: $(-2) \cdot 252 + 5 \cdot 105 = -504 + 525 = 21$. ✓

Задача: Решите сравнение $7x \equiv 3 \pmod{11}$.

Решение:

Найдём $7^{-1} \pmod{11}$. Поскольку 11 — простое, $7^{-1} \equiv 7^{(11-2)} \equiv 7^9 \pmod{11}$.

$7^2 = 49 \equiv 5 \pmod{11}$; $7^4 \equiv 5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$; $7^8 \equiv 3^2 = 9 \pmod{11}$.

$7^9 = 7^8 \cdot 7 \equiv 9 \cdot 7 = 63 \equiv 8 \pmod{11}$.

Проверка: $7 \cdot 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$. ✓ Следовательно, $7^{-1} \equiv 8 \pmod{11}$.

$x \equiv 8 \cdot 3 = 24 \equiv 2 \pmod{11}$.

Ответ: $x \equiv 2 \pmod{11}$.

Проверка: $7 \cdot 2 = 14 \equiv 3 \pmod{11}$. ✓

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

№ п/п	Документ (дата изменения, страница, краткое описание)	Основание для изменений	ФИО, должность, подпись
1			
2			
3			
4			
5			

Документ разработан в соответствии с Положением об оценочных и методических материалах (о фонде оценочных средств) по образовательным программам высшего образования МОО ВО КРСУ (утверждено приказом и.о. ректора С.Ю. Волкова, протокол Учёного совета КРСУ от 19 декабря 2024 г.).

Рабочая программа дисциплины: «Предметный модуль. Алгебра и теория чисел» (РПД b440301_24_2_rpd_matematika_pm_algebra_i_teorija_chisel), одобрена на заседании кафедры Педагогического образования 18.09.2025, протокол № 2. Срок действия 2025–2029 уч.г.