

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВОКРУГ НАПОРНОГО ТУННЕЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В ЗОНЕ МЕЖГОРНОЙ ВПАДИНЫ

MATHEMATICAL MODELLING OF THE INTENSE AND DEFORMED STATE AROUND THE PRESSURE HEAD TUNNEL, LOCATED IN THE ZONE OF THE INTERMOUNTAIN DEPRESSION



Баялиева Ж. А.,
Кыргызский Национальный
аграрный университет
им. К.И. Скрябина, г. Бишкек
ms.jamila62@mail.ru

Zh. Bayalieva,
Kyrgyz National Agrarian
University named after
K. I. Scryabin, Bishkek



Ботоканова Б. А.,
Кыргызский Национальный
аграрный университет
им. К.И. Скрябина, г. Бишкек,
b993344@mail.ru

B. Botokanova
Kyrgyz National Agrarian
University named after
K. I. Scryabin, Bishkek



Жумбаев Б.
Кыргызско-Российский
Славянский университет им.
Б. Н. Ельцина, г. Бишкек

B. Zhumabaev
Kyrgyz-Russian Slavic University
named after B. N. Yeltsin,
Bishkek

Методом Колосова-Мухелишвили с учетом разработанной методики с использованием программной среды *MATNCAD* установлены закономерности распределения напряжений и деформаций вокруг туннеля, когда ее форма поперечного сечения имеет трапецевидную форму с развитыми вертикальными стенками и расположена в зоне влияния межгорной впадины. Отмечено, что массивы межгорных впадин испытывают действие объёмных сил и тектоническое сжатие, а на контур туннеля действует гидростатический напор.

Для определения полей напряжений построена модель начального напряженного состояния массивов с горным рельефом. Модель представлена в виде суммы четырех полей. Первое поле напряжений является интегралами дифференциальных уравнений равновесия при совместном действии силы гравитации, квазистатической сейсмической силы и горизонтальных тектонических сил. Второе поле характеризует влияние двух близко расположенных гор с впадиной между ними. Третье поле характеризует возникновение туннеля в предварительно напряженном массиве от первых двух полей. Четвертое поле возникает от напора воды на контур туннеля. Приведены результаты расчета полей напряжений и деформаций с учетом и без учета наличия туннеля

Ключевые слова: горизонтальное тектоническое сжатие; гидростатический напор; деформация; конформное отображение; метод Мухелишвили; массивы речного каньона; напряжения; силы гравитации; упругость

The distribution of stresses and deformations around the tunnel, when its cross-sectional shape is trapezoidal with developed vertical walls, and is located in the zone of intermountain depression influence, are established by the method of Kolosov – Muskhelishvili, taking into account the developed methodology and using the *MATNCAD*

software environment. It is noted that the massifs of intermountain depressions experience the action of volumetric forces and tectonic compression, and the hydrostatic head acts on the contour of the tunnel.

To determine the stress fields, a model of the initial stressed state of arrays with a mountain relief is constructed. The model is represented as a sum of four fields. The first stress field is an integral of differential equilibrium equations under the joint action of gravity force, quasi-static seismic force and horizontal tectonic forces. The second field characterizes the influence of two closely located mountains with a depression between them. The third field characterizes the emergence of a tunnel in a prestressed array from the first two fields. The fourth field arises from the pressure of water on the tunnel contour. The results of calculation of tension and deformations fields, with and without taking into account the existence of the tunnel are given

Key words: horizontal tectonic compression; hydrostatic pressure; deformation; conformal display; Muskhelishvili method; river canyon massifs; tension; gravitation force; elasticity

Введение. Для оценки напорных туннелей в горной местности [9] необходимо, прежде всего, знать начальное напряженное состояние горного массива в центре воображаемого туннеля. Это начальное напряженное состояние может быть измерено методом «разгрузки» инструментально [2; 4; 13; 14; 16; 19; 20] при наличии условий для выполнения измерений. Альтернативный путь оценки начального напряженного состояния массива — математическое моделирование с учетом формы рельефа массива [4–6; 18] при действии сил гравитации, сеймики [3; 9] и тектонической активности [2; 6; 12; 16]. Когда известно начальное напряженное состояние массива в центре воображаемого туннеля, то необходимо установить влияние возникновения туннеля на распределение напряжений вокруг туннелей [1; 7–9] и влияние гидростатического напора на перераспределение напряжений вокруг туннеля, как в работе Б. Жумабаева [10], где смоделирован напорный туннель с эллиптическим (круглым) сечением.

Методология и методика исследования. В рамках метода Колосова — Мусхелишвили [15] и программного комплекса *Mathcad* [11] изучено напряженно-деформированное состояние массивов вокруг напорного туннеля с трапециевидным поперечным сечением и вертикальными стенками.

Модель напряженного состояния массивов пород вокруг туннеля создается в виде суммы полей напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x^0 &= \sigma_x^n + \sigma_x^p + \sigma_x^m + \sigma_x^u, \\ \sigma_y^0 &= \sigma_y^n + \sigma_y^p + \sigma_y^m + \sigma_y^u, \\ \tau_{xy}^0 &= \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^m + \tau_{xy}^u.\end{aligned}\quad (1)$$

Напряжения с верхним индексом « n » — поле напряжений для полуплоскости $y \leq 0$, которое возникает при совместном действии гравитационных сил γ и сейсмических сил $\gamma_c = k_c \gamma$. Сила гравитации γ направлена вертикально вниз, т. е. в глубь массива земной коры, сейсмическая сила — из глубины массива к поверхности земли и составляет острый угол (δ) с вертикальной осью. Эти поля напряжений являются интегралами неоднородных дифференциальных уравнений равновесия для полуплоскости $y \leq 0$:

$$\frac{\partial \sigma_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial y} + \rho_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^n}{\partial y} + \rho_y = 0, \quad (2)$$

где $\rho_x = \gamma k_c \sin \delta$ — горизонтальные и вертикальные $\rho_y = \gamma (1 - k_c \cos \delta)$ составляющие объемной силы;

g — гравитационное ускорение;

λ — коэффициент бокового распора;

k_c — коэффициент сейсмичности горного региона; тектоническая сила T_x направлена горизонтально.

Интегралы от (2) имеют вид

$$\sigma_x^n = A_1 * y + T_x; \quad \sigma_y^n = A_2 y; \quad \tau_{xy}^n = A_3 y, \quad (3)$$

где $A_1 = \lambda * \gamma * (1 - k_c * \cos \delta)$; $A_2 = \gamma * (1 - k_c * \cos \delta)$; $A_3 = k_c * \gamma * \sin \delta$.

Напряжения $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p$ — поля напряжений, которые характеризуют влияния рельефа межгорной впадины [9]. Для определения этого второго поля напряжений в (1) сначала построим модель начального напряженного состояния массивов с горным рельефом в виде

$$\sigma_x'' = \sigma_x^n + \sigma_x^p \quad \sigma_y'' = \sigma_y^n + \sigma_y^p \quad \tau_{xy}'' = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p. \quad (4)$$

Поле напряжений (4) на дневной поверхности массива межгорной впадины удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} (\sigma_x^p + \sigma_x^n + T_x) * (\cos n, x) + (\tau_{xy}^p + \tau_{xy}^n) \cos(n, y) &= 0; \\ (\tau_{xy}^p + \tau_{xy}^n) \cos(n, x) + (\sigma_y^p + \sigma_y^n) \cos(n, y) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где n — направление внешней нормали в какой-либо точке контура.

Форма рельефа массива — криволинейная поверхность. По этой причине с помощью конформно отображающей функции [9] типа $z = \omega(\zeta)$; $z = x + i * y$; $i = \sqrt{-1}$; $\zeta = \xi + i * \eta$ вводим криволинейную декартову систему координат; ξ, η — переменные во вспомогательной полуплоскости $\eta \leq 0$. Переменная $-\infty \leq \xi \leq \infty$ ось для действительных чисел, а переменная η — для комплексных чисел. Для отображения полуплоскости с двумя выступами вид отображающей функции выбираем в виде [9]

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= a * \zeta + \omega_0(\zeta); \\ \omega_0(\zeta) &= a_1 / (\zeta - t) + b_1 / (\zeta + t_b - t). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь a, a_1, b_1, t_b — постоянные параметры отображающей функции в (6). Разделив при $\eta = 0$ в (6) действительной части $x(\xi)$ от мнимой $y(\xi)$, построим контурные линии полуплоскости с двумя выступами (рис. 1). Первый рельеф гор на рис. 1 получен при значении следующих параметров: $a = 55 \text{ м}$; $a_1 = 350 \text{ м}$; $b_1 = 575 \text{ м}$; $t_b = -22 \text{ м}$. Второй рельеф гор получен при значении параметров: $a = 55 \text{ м}$; $a_1 = 575 \text{ м}$; $b_1 = 350 \text{ м}$; $t_b = -22 \text{ м}$. Последний рельеф соответствует значениям параметров: $a = 60 \text{ м}$; $a_1 = 400 \text{ м}$; $b_1 = 400 \text{ м}$; $t_b = -14 \text{ м}$. Отношение производных отображающей функции в (6) определяет

$$\omega'(\zeta) / \overline{\omega'(\zeta)} = e^{2i\alpha}$$

$$\omega'(\zeta) / \omega'(\zeta) = e^{-2i\alpha}, \quad (7)$$

где α — угол, составляемый между осью (ξ) с осью ox . Компоненты напряжений $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p$ в криволинейных координатах обозначаются через $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$. Аргументами напряжений становятся переменные ξ, η . В контурных точках $\sigma_\eta = N$ и $\tau_{\xi\eta} = T$ действуют по нормали и по касательной.

Согласно представлению в (4), на контурных точках граничное условие (5) состояло из суммы фиктивных нагрузок N и T и нагрузок-усилий N^p, T^p . Первые возникают от второго поля напряжений, вторые — от найденного поля напряжений (3). Причем N и T равны по величине и противоположны с N^p, T^p . Следовательно, суммарное поле напряжений в (4) должно обеспечить выполнение граничных условий (5).

Переход от компонентов напряжений $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \tau_{xy}^p$ к компонентам напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ и наоборот реализуется с помощью формул (6) и (7) [15]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_\xi + \sigma_\eta \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= (\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta})e^{-2i\alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ выражаются функциями $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ с помощью соотношений [15]:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= 2(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}) \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= 2(\overline{\omega(\zeta)}\Phi(\zeta)' + \\ &+ \omega(\zeta)'\Psi(\zeta)) / \overline{\omega(\zeta)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ являются решением граничной задачи

$$\begin{aligned} \Phi(t)\omega(t)' + \overline{\Phi(t)}\omega(t)' + \omega(t)\Phi(t)' + \overline{\omega(t)}\Psi(t)' &= \\ = [N(t) - iT(t)]\omega(t)' \\ \Phi(t)\overline{\omega(t)}' + \overline{\Phi(t)}\omega(t)' + \overline{\omega(t)}\Phi(t)' + \omega(t)\Psi(t)' &= \\ = [N(t) + iT(t)]\omega(t)'. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегралы типа Коши от граничных условий (10) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) \cdot \omega'(\zeta) + G(\zeta) &= B(\zeta), \quad \Psi(\zeta) \cdot \omega'(\zeta) + \\ &+ \Phi(\zeta) \cdot \overline{\omega'(\zeta)} + \Phi'(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)} - \overline{G(\zeta)} = A(\zeta), \end{aligned}$$

$$G(\zeta) = -a_1 \overline{\Phi_1} / [\zeta - i]^2 - b_1 \overline{\Phi_2} / [\zeta + t_b - i]^2, \quad (11)$$

где обозначены интегралы для правой части уравнений через $A(\zeta), B(\zeta)$

$$A(\xi, \eta) = \omega_0(\xi, \eta) \left[T_5 + T_6 \omega_0'(\xi, \eta) \right] + T_3 C(\xi, \eta) + At(\xi, \eta) - T_6 S(\xi, \eta).$$

$$B(\xi, \eta) = T_3 \omega_0(\xi, \eta) \omega_0'(\xi, \eta) + T_2 \omega_0(\xi, \eta) + T_4 C(\xi, \eta) + Bt(\xi, \eta) - T_3 S(\xi, \eta). \quad (12)$$

В (12) приняты укороченные записи выражений:

$$At(\xi, \eta) = T_1 \omega_0'(\xi, \eta); \quad Bt(\xi, \eta) = -T_1 \omega_0'(\xi, \eta)$$

$$C(\xi, \eta) = C_1 / (\zeta - i) + C_2 / (\zeta + t_b - i)^2$$

$$S(\xi, \eta) = S_1 / (\zeta(\xi, \eta) - i) + S_2 / [\zeta(\xi, \eta) - i]^2 +$$

$$+ S_3 / (\zeta(\xi, \eta) + t_b - i) + S_4 / [\zeta(\xi, \eta) + t_b - i]^2;$$

$$T_1 = T_x / 2; T_2 = a(A_3 + iA_2) / 2; T_3 = i(A_1 + A_2) / 4;$$

$$T_4 = -i(A_1 - A_2 + 2iA_3) / 4;$$

$$T_5 = a(-A_3 + iA_2) / 2; T_6 = -i(A_1 - A_2 - 2iA_3) / 4;$$

$$\Omega_0 = \omega_0(-i); \Omega_1 = \omega_0'(-i); \Omega_{tb} = \omega_0(-t_b - i);$$

$$\Omega_{ptb} = \omega_0'(-t_b - i); \quad C_1 = a_1 \overline{\Omega_1}; C_2 = b_1 \overline{\Omega_{ptb}};$$

$$S_1 = -a_1 \overline{\Omega_1}; S_2 = -a_1 \overline{\Omega_0}; S_3 = -b_1 \overline{\Omega_{ptb}}; S_4 = -b_1 \overline{\Omega_{tb}}.$$

В первом уравнении (11) $G(\zeta)$ является полюсом функции $\hat{O}(\zeta)$ и содержат Φ_1 и Φ_2 и им сопряженные ещё две постоянные. Они определяются из системы четырех линейных уравнений, если последовательно предположим в (11) $\zeta_1 = -i, \zeta_2 = -t_b - i$. Правые части этой системы обозначены

$$M0_0 = B(0, -1); M0_1 = B(-t_b, -1);$$

$$M0_2 = \overline{B(0, -1)}; M0_3 = \overline{B(-t_b, -1)}.$$

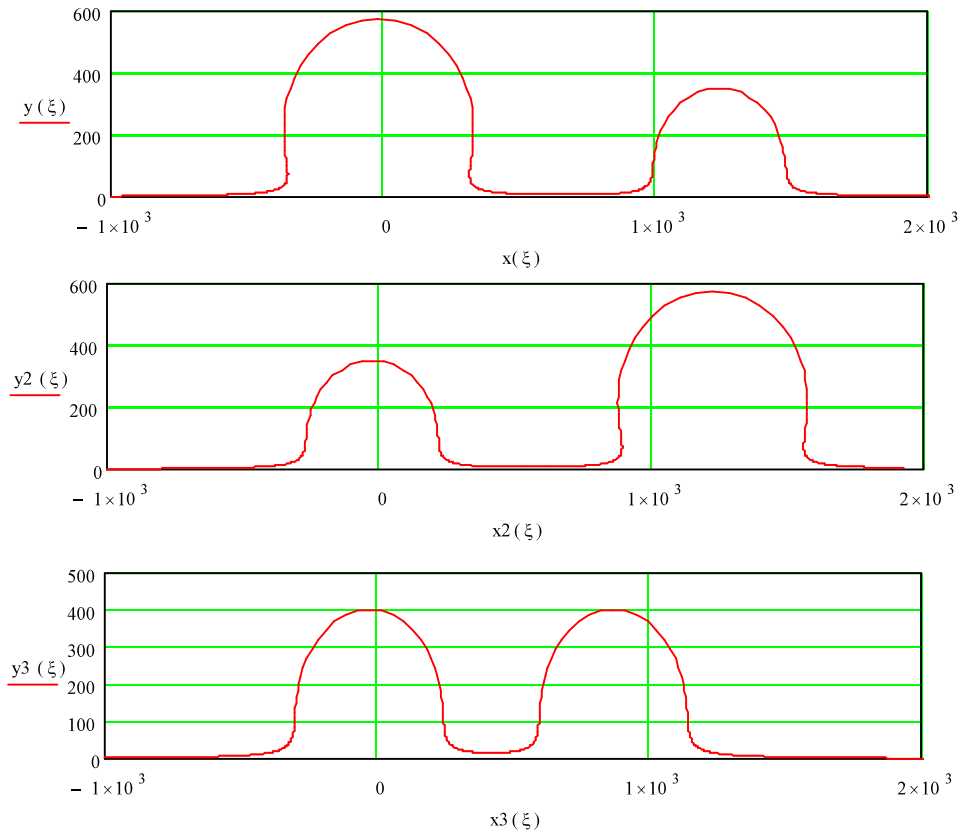


Рис. 1. Контуры впадин между гор с различными высотами /
Fig. 1. Contours of the valleys between the mountains with different heights

Введем в (11) следующие обозначения:
 $n_1(\zeta) = -a_1 / (\zeta - i)^2$; $n_2(\zeta) = -b_1 / (\zeta + t_b - i)^2$.

Тогда коэффициенты в левой части системы определяются в виде

$$M_{0,0} = \omega'(-i); M_{0,1} = 0; M_{0,2} = n_1(-i); M_{0,3} = n_2(-i);$$

$$M_{1,0} = 0; M_{1,1} = \omega'(-t_b - i); M_{1,2} = n_1(-t_b - i);$$

$$M_{1,3} = n_2(-t_b - i);$$

$$M_{2,0} = \overline{M_{0,2}}; M_{2,1} = \overline{M_{0,3}}; M_{2,2} = \overline{M_{0,0}}; M_{2,3} = 0;$$

$$M_{3,0} = \overline{M_{1,2}}; M_{3,1} = \overline{M_{1,3}}; M_{3,2} = 0; M_{3,3} = \overline{M_{1,1}}.$$

Решение системы в нотациях MATHCAD размещено в элементах вектора столбца Λ

$$\Lambda = M^{-1} \cdot M_0 = \begin{pmatrix} -1.7 - 0.5i \\ -1.7 + 0.5i \\ -1.7 + 0.5i \\ -1.7 - 0.5i \end{pmatrix}.$$

При вычислении $\Psi(\zeta)$ в окрестности точек $\zeta_1 = -i, \zeta_2 = -t_b - i$ предусмотрены альтернативные соотношения, чем в (11), при котором явно раскрыто отсутствие кажущегося наличия полюса $\overline{G(\zeta)}$ функции

$\Psi(\zeta)$. Процедура расчета полей напряжений реализована путем записи всех соотношений в нотациях MATHCAD.

Для контурных точек переменная $\eta = 0, \zeta = t$. Для 20 точек вычисленные значения компонентов напряжений приведены в табл. 1. На рис. 2 представлены изолинии компонентов напряжений для массивов впадины между гор, изображенной на рис. 1 с контурной линией x^3 и y^3 .

Рассмотрено действие силы гравитации и тектоническое сжатие $T_x = 15$ Мпа. Векторы трёхмерных поверхностей компонентов напряжений обозначены

$$F_x(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \sigma_x(\xi, \eta) \end{pmatrix}, F_y(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \end{pmatrix},$$

$$F_{\tau xy}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}(\xi, \eta) \end{pmatrix},$$

$$F_{\tau max}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \tau_{max}(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

Таблица 1 / Table 1

Вычисленные значения компонентов напряжений для двадцати точек /
 Calculated values of stress components for twenty points

0	«t»	«x»	«y»	«σ1»	«σ2»	«N»	«T»	«Tmax»
1	-5	-397,9	16,5	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-26,1	$2,9 \cdot 10^{-15}$	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-24,3
2	-4	-356,3	24,8	$1,1 \cdot 10^{-14}$	-33,4	$9,8 \cdot 10^{-15}$	$-5,3 \cdot 10^{-15}$	-23,6
3	-3	-323,4	41,4	$7,1 \cdot 10^{-15}$	-39,5	$7,1 \cdot 10^{-15}$	$8,2 \cdot 10^{-15}$	-0,4
4	-2	-304,9	81,6	$9,8 \cdot 10^{-15}$	-11,2	$-1 \cdot 10^{-14}$	$2,9 \cdot 10^{-15}$	-10,1
5	-1	-286,5	201,8	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-0,8	$3,6 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-15}$	-0,6
6	0	-28,4	402	0	-0,1	0	0	-0,1
7	1	229,4	202,4	$-2,1 \cdot 10^{-15}$	-0,7	$-2 \cdot 10^{-15}$	$-1,8 \cdot 10^{-15}$	0,5
8	2	246,9	82,8	$-2,7 \cdot 10^{-15}$	-10,4	$-1,7 \cdot 10^{-15}$	0	-9,6
9	3	263,9	43,3	0	-40,9	$3,6 \cdot 10^{-15}$	$-1,9 \cdot 10^{-15}$	-0,1
10	4	294,5	27,5	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-36,4	$4,4 \cdot 10^{-15}$	$-1,8 \cdot 10^{-15}$	-25,9
11	5	333	20,3	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-29,4	$4 \cdot 10^{-15}$	0	-27,8
12	6	375,6	17	0	-26,4	0	0	-26,2
13	7	420	16	0	-25,5	0	0	-25,5-
14	8	464,4	17	0	-26,4	0	0	26,2
15	9	507	20,3	$-3,6 \cdot 10^{-15}$	-29,4	$-3,2 \cdot 10^{-15}$	0	-27,8

Окончание табл. 1

16	10	545,5	27,5,	$-3,6 \cdot 10^{-15}$	-36,4	$-2,7 \cdot 10^{-15}$	$-1,4 \cdot 10^{-14}$	-25,9
17	11	576,1	43,3	$-3,6 \cdot 10^{-15}$	-40,9	$-3,6 \cdot 10^{-15}$	$4,9 \cdot 10^{-15}$	-0,1
18	12	593,1	82,8	$-1,2 \cdot 10^{-14}$	-10,4	$-1,2 \cdot 10^{-14}$	$3,6 \cdot 10^{-15}$	-9,6
19	13	610,6	202,4	$-2,7 \cdot 10^{-15}$	-0,7	$-2,7 \cdot 10^{-15}$	0	-0,5
20	14	868,4	402	$1,8 \cdot 10^{-15}$	-0,1	$1,8 \cdot 10^{-15}$	0	-0,1

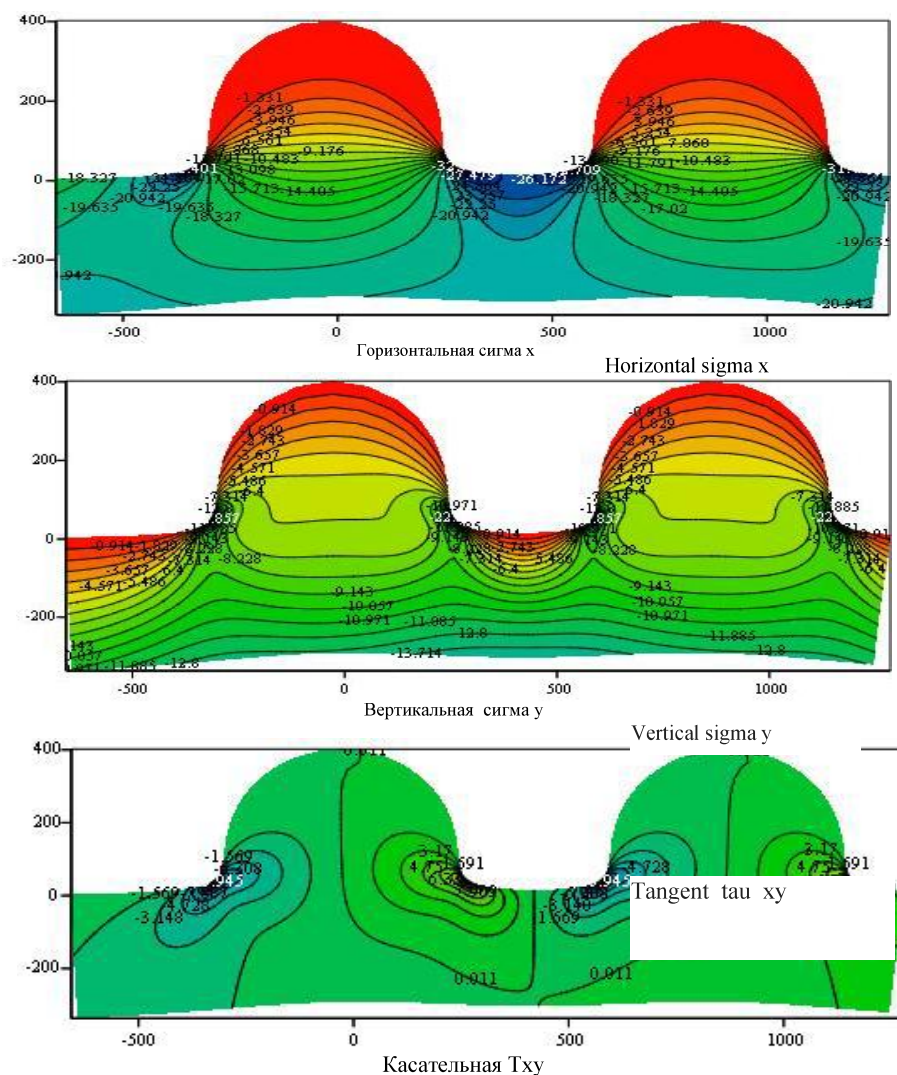


Рис. 2. Распределение напряжений в массивах межгорной впадины /
Fig. 2. Stresses distribution in intermountain depression

Из табл. 1 видно, что в контурных точках впадины между гор условие (5) при $N = T = 0$ выполняется с высокой точностью, где величина погрешности не более 10^{-15} ; высота гор 402 м; наибольшее значение главной нормальной компоненты напряжений $\sigma_2 = -40,9$ МПа.

Для локальной зоны основания впадины между гор на рис. 3. представлены изолинии распределения компонентов напряжений. Как видно из рис. 3, изолинии напряжений в зоне основания, где горизонтальная компонента на глубине до 300 м растет незначительно ($-21,5...-25,7$ МПа),

а вертикальная компонента увеличивается (0...-12 МПа) почти линейно; касательная компонента на оси симметрии гор равна

нулю и имеет максимальное значение 18 МПа в зоне сопряжения борта склона горы с его основанием.

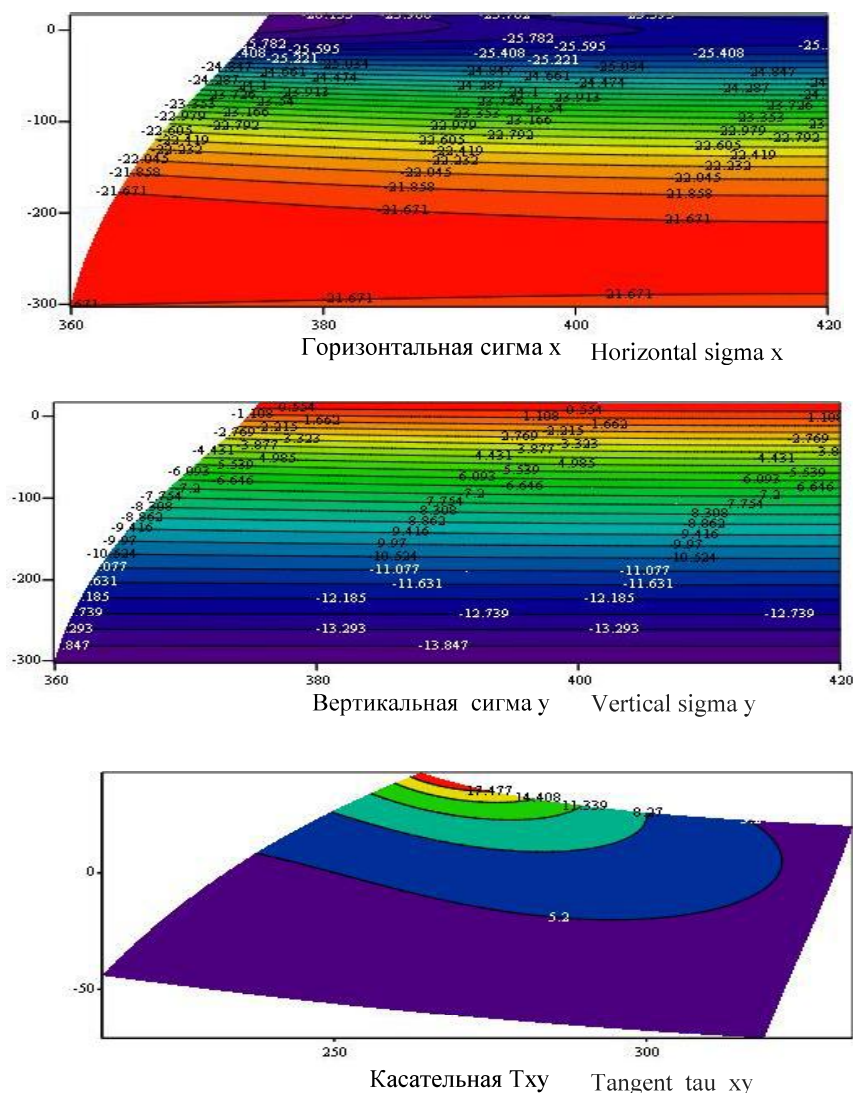


Рис. 3. Распределение напряжений в массивах в основании впадины /
Fig. 3. Distribution of stresses in massifs at the base of depression

Туннель расположен в зоне основания на глубине 200 м от поверхности впадины, испытывает начальное напряженное состояние, $S_x = -21,7$; $S_y = -11$; $S_{xy} = 17$ МПа. Это состояние используем для определения третьего поля напряжений в (1) (влияние туннеля).

Влияние туннеля $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \tau_{xy}^m$ устанавливается путем решения граничной задачи для плоскости xoy с отверстием, форма которой моделируется с помощью отображающей функции

$$z = \omega(\zeta); \quad z = x + i^* y; \quad i = \sqrt{-1}; \quad \zeta = \rho e^{i\theta}.$$

$$\omega(\zeta) = e^{i\delta} R[\zeta + \omega_0(\zeta)]; \quad \omega_0(\zeta) = \sum_k d_k / \zeta^k. \quad (13)$$

Здесь $0 \leq \rho \leq \infty$ ось положительных чисел; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ – в радианах. R – коэффициент для изменения размеров отверстия; δ – параметр (в радианах) для установления ориентации оси симметрии отверстия относительно горизонтальной оси. С помощью параметров отображающей

функции d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 путем вариации их значений можно моделировать разнообразные формы сечений туннелей. В частности, при $d_1=0,1416$; $d_2=0,0651$; $d_3=-0,097$; $d_4=0,0371$; $d_5=0,0019$; $R=1$; $\delta=\pi/2$ моделируем туннель с трапецевидным сечением с развитыми вертикальными стенками (рис. 4).

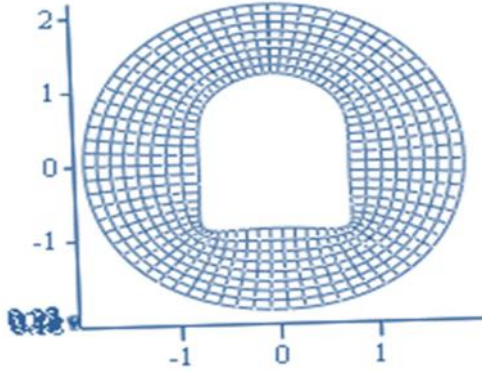


Рис. 4. Вид сечения туннеля и сетка разбиения области / Fig. 4. Type of tunnel section and grid partitioning area

Сумма первых трех полей напряжений в контурных точках туннеля удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} &(\sigma_x^n + \sigma_x^p + T_x + \sigma_x^m) * (\cos n, x) + \\ &+ (\tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^m) \cos(n, y) = 0; \\ &(\tau_{xy}^n + \tau_{xy}^p + \tau_{xy}^m) \cos(n, x) + \\ &+ (\sigma_y^n + \sigma_y^p + \sigma_y^m) \cos(n, y) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При отображении типа (13) угол α между направлениями осей ox и касательной кривой ρ определяется формулой

$$\begin{aligned} e^{2i\alpha} &= \zeta^2 \omega'(\zeta) / (\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}) \\ e^{-2i\alpha} &= \overline{\zeta^2 \omega'(\zeta)} / (\rho^2 \omega'(\zeta)). \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразованные с помощью (13) и (15) в криволинейной системе координат компоненты напряжений принято обозначать $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, из которых $\sigma_\rho(\rho, \theta)$ действует по направлению нормали криволинейной дуги, а компонента $\tau_{\rho\theta}(\rho, \theta)$ — по направлению касательной. В частности, на контурных точках туннеля имеет место

$$N = \sigma_\rho(1, \theta); \quad T = \tau_{\rho\theta}(1, \theta). \quad (16)$$

Граничные условия в (14) содержат две составляющие усилий (N, T) и (N^u, T^u). Составляющие (N, T) возникают от третьего поля напряжений в (1), а составляющие (N^u, T^u) — от начального поля напряжений S_x, S_y, S_{xy} . Поэтому N и T принимаются равными по величине и противоположными с (N^u, T^u). Следовательно, сумма первых трех полей напряжений в (1) должна обеспечивать выполнение граничных условий (14).

Таким образом, поле напряжений от влияния возникновения туннеля напряжений в массиве межгорной впадины $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$, где начальное напряженное состояние в точке возникновения туннеля характеризуется компонентами S_x, S_y, S_{xy} , будет определено из граничных условий (14). Условие (14) в преобразованной плоскости (рис. 4) новых переменных (13) (15) принимает вид [2]

$$\begin{aligned} &[R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)] + [R\overline{\Gamma} + \overline{\varphi'(\sigma)}] * [\omega(\sigma) / \overline{\omega'(\sigma)}] + \\ &+ [R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)] = 0; \\ &[\overline{R\Gamma\sigma + \varphi(\sigma)}] + [R\Gamma + \varphi'(\sigma)] * [\overline{\omega(\sigma)} / \omega'(\sigma)] + \\ &+ [R\Gamma'\sigma + \psi(\sigma)] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь обозначено так же, как в работе И. Т. Айтматова [2]

$$\begin{aligned} \Gamma &= (S_x + S_y) / 4; \quad \Gamma' = (S_y - S_x + 2iS_{xy}) / 2; \\ \overline{\Gamma} &= (S_y - S_x - 2iS_{xy}) / 2. \end{aligned}$$

В работе Б. Жумабаева [9] эти постоянные введены для обозначения однородного начального напряженного состояния S_x, S_y, S_{xy} в центре отверстия, где размещено начало оси координат нового вспомогательного переменного $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Функции $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ определены для внешности единичной окружности, где $\rho = 1$, контурные точки этой окружности обозначены $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ и $\overline{\zeta} = \overline{\sigma} = e^{-i\theta}$. Вдали от контурных точек $\zeta \rightarrow \infty$ эти функции стремятся к нулю. Причем, как показывает практика расчетов в подобных ситуациях, при удалении от контура туннеля более чем на 10 R

влияние отверстия не более 1 % на начальное напряженное состояние массива межгорной впадины.

Интегралы типа Коши от заданных граничных условий (17) определяют искомыми функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$. Когда на контур туннеля действует гидростатический напор $(-P_0)$, необходимо решать граничную задачу по определению функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ из условий:

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) + \overline{\varphi'(\sigma)} * \left[\overline{\omega(\sigma)} / \overline{\omega'(\sigma)} \right] + \overline{\psi(\sigma)} &= -P_0 R \omega(\sigma) \\ \overline{\varphi(\sigma)} + \varphi'(\sigma) * \left[\overline{\omega(\sigma)} / \overline{\omega'(\sigma)} \right] + \psi(\sigma) &= -P_0 R \overline{\omega(\sigma)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношения для определения функций $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ из граничных условий (17) и (18) идентичны, и поэтому рационально объединение в виде суммы для постоянных коэффициентов (17) и (18)

$$\begin{aligned} N_1 &= Re^{i\delta} (S_x + S_y) / 4; \quad N_2 = Re^{-i\delta} (S_y - S_x + 2iS_{xy}) / 2; \\ N_3 &= \overline{N_1}; \quad N_4 = \overline{N_2}; \\ a_{01} &= -N_1 d_1 - N_3; \quad a_{02} = -N_1 d_2; \quad a_{03} = -N_1 d_3; \\ a_{04} &= -N_1 d_4; \quad a_{05} = -N_1 d_5; \\ b_{01} &= -N_4 d_1 - N_2; \quad b_{02} = -N_4 d_2; \quad b_{03} = -N_4 d_3; \\ b_{04} &= -N_4 d_4; \quad b_{05} = -N_4 d_5; \\ a_{11} &= e^{i\delta} P_0 R d_1; \quad a_{12} = e^{i\delta} P_0 R d_2; \quad a_{13} = e^{i\delta} P_0 R d_3; \\ a_{14} &= e^{i\delta} P_0 R d_4; \quad a_{15} = e^{i\delta} P_0 R d_5; \\ b_{11} &= P_0 R e^{-i\delta}; \quad sb_1 = b_{01} + b_{11}; \quad sb_2 = b_{02}; \\ sb_3 &= b_{03}; \quad sb_4 = b_{04}; \quad sb_5 = b_{05}; \\ ca_1 &= a_{01} + a_{11}; \quad ca_2 = a_{02} + a_{12}; \quad ca_3 = a_{03} + a_{13}; \\ ca_4 &= a_{04} + a_{14}; \quad ca_5 = a_{05} + a_{15}. \end{aligned}$$

Интегралы типа Коши от граничных условий в (17) и (18) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) + G(\zeta) &= A_0(\zeta); \\ \varphi'(\zeta) * \left[\overline{\omega(\zeta)} / \overline{\omega'(\zeta)} \right] + \psi(\zeta) - \overline{G(\zeta)} &= B_0(\zeta); \quad (19) \\ G(\zeta) &= \left[b_3 \overline{R_1} + 2b_4 \overline{R_2} + 3b_5 \overline{R_3} \right] e^{2i\delta} \zeta^{-1} + \\ &+ \left[b_4 \overline{R_1} + 2b_5 \overline{R_2} \right] e^{2i\delta} \zeta^{-2} + \left[b_5 \overline{R_1} \right] e^{2i\delta} \zeta^{-3} \\ A_0(\zeta) &= \sum_{k=1}^5 ca_k \zeta^{-k}; \quad B_0(\zeta) = \sum_{k=1}^5 sb_k \zeta^{-k}. \end{aligned}$$

Для разложений в отношениях $\overline{\omega(\sigma)} / \overline{\omega'(\sigma)}$ и $\overline{\omega(\sigma)} / \overline{\omega'(\sigma)}$ вводим новые обозначения:

$$\begin{aligned} bp_0 &= b_0 e^{2i\delta}; \quad bp_1 = b_1 e^{2i\delta}; \quad bp_2 = b_2 e^{2i\delta}; \\ bp_3 &= b_3 e^{2i\delta}; \quad bp_4 = b_4 e^{2i\delta}; \quad bp_5 = b_5 e^{2i\delta}; \\ qp_0 &= q_0 e^{-2i\delta}; \quad qp_1 = q_1 e^{-2i\delta}; \quad qp_2 = q_2 e^{-2i\delta}; \\ qp_3 &= q_3 e^{-2i\delta}; \quad qp_4 = q_4 e^{-2i\delta}; \quad qp_5 = q_5 e^{-2i\delta}. \end{aligned}$$

Первое уравнение (19) содержит полюсы третьего порядка от интеграла второго слагаемого граничного условия в (17). Пока обозначим их через $R_1, R_2, R_3, \overline{R_1}, \overline{R_2}, \overline{R_3}$. Для определения их значений приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменного ζ^{-k} ($k=1, 2, 3$) правых и левых частей первого уравнения, будем иметь систему трех уравнений. Добавим им сопряженные уравнения и приведем систему из шести уравнений. Коэффициенты системы имеют вид

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= 1; \quad M_{0,1} = 0; \quad M_{0,2} = 0; \quad M_{0,3} = -bp_3; \\ M_{0,4} &= -2bp_4; \quad M_{0,5} = -3bp_5; \\ M_{1,0} &= 0; \quad M_{1,1} = 1; \quad M_{1,2} = 0; \quad M_{1,3} = -bp_4; \\ M_{1,4} &= -2bp_5; \quad M_{1,5} = 0; \\ M_{2,0} &= 0; \quad M_{2,1} = 0; \quad M_{2,2} = 1; \quad M_{2,3} = -bp_5; \\ M_{2,4} &= 0; \quad M_{2,5} = 0; \\ M_{2,0} &= 0; \quad M_{2,1} = 0; \quad M_{2,2} = 1; \quad M_{2,3} = -bp_5; \\ M_{2,4} &= 0; \quad M_{2,5} = 0; \\ M_{3,0} &= \overline{M_{0,3}}; \quad M_{3,1} = \overline{M_{0,4}}; \quad M_{3,2} = \overline{M_{0,5}}; \\ M_{3,3} &= \overline{M_{0,0}}; \quad M_{3,4} = \overline{M_{0,1}}; \quad M_{3,5} = \overline{M_{0,2}}; \\ M_{4,0} &= \overline{M_{1,3}}; \quad M_{4,1} = \overline{M_{1,4}}; \quad M_{4,2} = \overline{M_{1,5}}; \\ M_{4,3} &= \overline{M_{1,0}}; \quad M_{4,4} = \overline{M_{1,1}}; \quad M_{4,5} = \overline{M_{1,2}}; \\ M_{5,0} &= \overline{M_{2,3}}; \quad M_{5,1} = \overline{M_{2,4}}; \quad M_{5,2} = \overline{M_{2,5}}; \\ M_{5,3} &= \overline{M_{2,0}}; \quad M_{5,4} = \overline{M_{2,1}}; \quad M_{5,5} = \overline{M_{2,2}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты в правой части системы уравнений равны

$$\begin{aligned} M0_0 &= ca_1; \quad M0_1 = ca_2; \quad M0_2 = ca_3; \\ M0_3 &= \overline{ca_1}; \quad M0_4 = \overline{ca_2}; \quad M0_5 = \overline{ca_3}. \end{aligned}$$

Методом векторной алгебры ответ решения системы приведен в элементах

массива-столбца MR , где $MR = M^{-1} * M0$. Соотношение для функции $\varphi(\zeta)$ после объединения коэффициентов при ζ^{-k} ($k=1,2,3$) первого уравнения в (19) будет иметь вид

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^5 C_k \zeta^{-k}.$$

Здесь принято

$$C_1 = ca_1 + \gamma_1; C_2 = ca_2 + \gamma_2; C_3 = ca_3 + \gamma_3;$$

$$C_4 = ca_4; C_5 = ca_5;$$

$$\gamma_1 = (b_3 MR_3 + 2b_4 MR_4 + 3b_5 MR_5) e^{2i\delta};$$

$$\gamma_2 = (b_4 MR_3 + 2b_5 MR_4) e^{2i\delta}; \gamma_3 = b_5 MR_3 e^{2i\delta};$$

$$MR = \begin{pmatrix} 18.878 + 7.071i \\ -0.698 + 1.332i \\ -0.036 - 1.573i \\ 18.878 - 7.071i \\ -0.698 - 1.332i \\ -0.036 + 1.573i \end{pmatrix}.$$

Соотношения для функций

$$R_0(\zeta) = (\sum_k r_k \zeta^{-k}) e^{-2i\delta}; Q(\zeta) = (\sum_k q_k \zeta^k);$$

$$f(\zeta) = (b_1 \zeta + b_0 + Q(\zeta) / \omega d(\zeta)) e^{-2i\delta};$$

$$\psi(\zeta) = B_0(\zeta) + R_0(\zeta) - f(\zeta) \varphi'(\zeta)$$

$$\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta); \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta) / \omega'(\zeta);$$

$$\Phi'(\zeta) = (\varphi''(\zeta) \omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta) \omega''(\zeta)) / \omega'(\zeta)^2$$

$$r_1 = \sum_{k=2}^5 k C_k b_k; r_2 = 5 C_5 b_4 + 4 C_4 b_3 + 3 C_3 b_2;$$

$$r_3 = 5 C_5 b_3 + 4 C_4 b_2; r_4 = 5 C_5 b_2;$$

Сумма первых трех полей напряжений в системе криволинейных координат, где для контурных точек туннеля $\rho=1$, для каждого компонента напряжений представлена в виде табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Компоненты напряжений / Stress components

$\sigma_\rho(l, \theta)$	$\tau_{\rho\theta}(l, \theta)$	$\sigma_\theta(l, \theta)$
-2,487·10-14	-8,171·10-14	-67,989
5,151·10-14	-1,424·10-14	-51,145
-3,553·10-14	-2,487·10-14	-33,736
-1,066·10-14	1,421·10-14	-17,319
-2,842·10-14	1,776·10-14	-2,707
7,105·10-14	-3,908·10-14	10,007
-2,842·10-14	-7,105·10-15	21,088
4,974·10-14	-6,217·10-14	30,765
-1,421·10-14	-2,487·10-14	38,89
0	-7,994·10-14	44,762
6,395·10-14	-3,197·10-14	47,292
5,684·10-14	7,105·10-15	45,745
2,132·10-14	-7,105·10-15	40,574
-1,066·10-14	2,487·10-14	33,345
-4,974·10-14	1,776·10-14	25,754

Из трёх компонентов лишь одна — окружная компонента — отлично от нуля, а другие (нормальная и касательная ком-

поненты) во всех точках близки к нулю. Погрешность граничного условия в (17) не более 10...14-й степени.

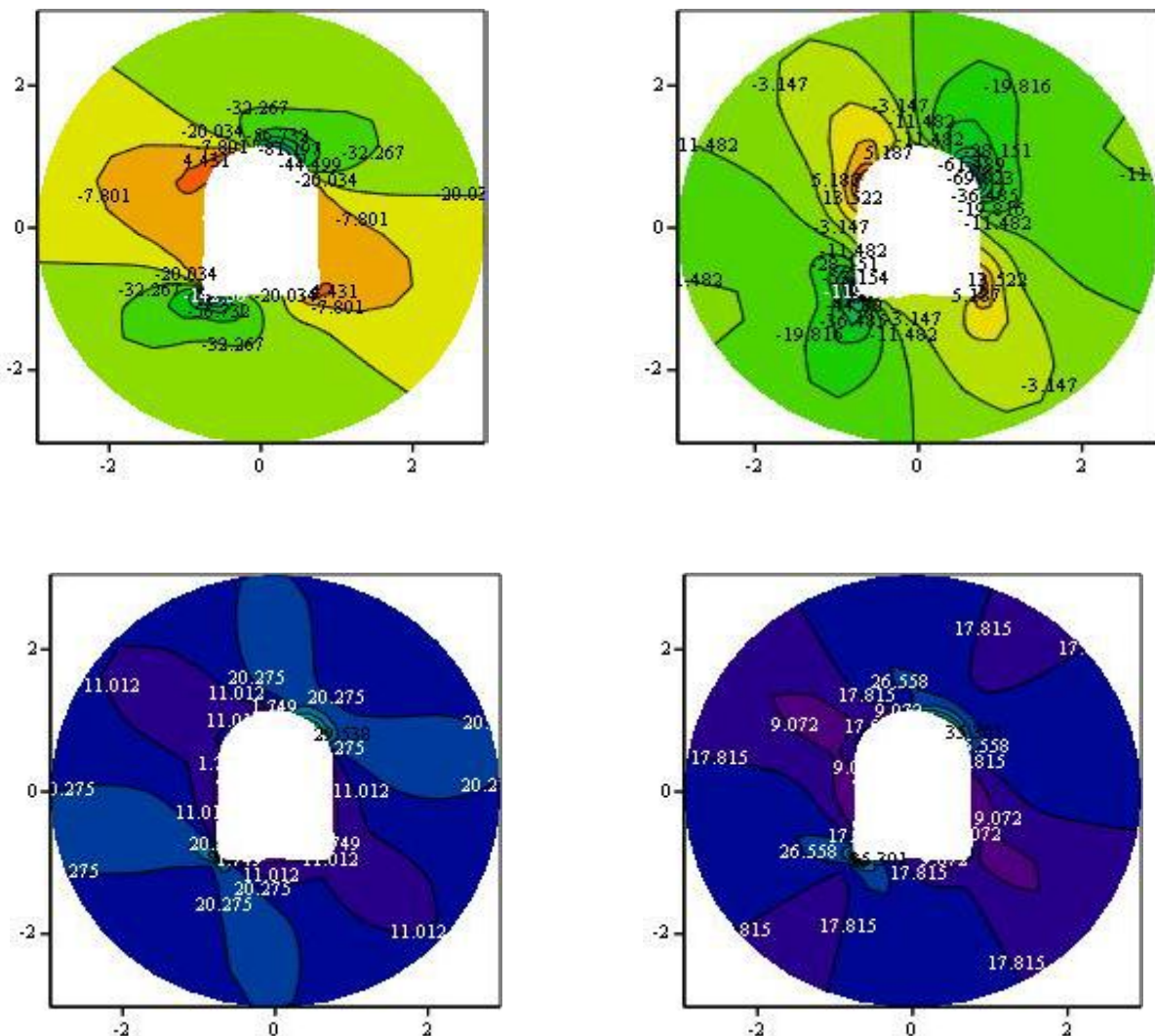


Рис. 5. Распределение напряжений вокруг туннеля /
Fig. 5. Stress distribution around the tunnel

Найденные компоненты напряжений позволили с помощью Закона Гука [2] вычислить компоненты относительных деформаций. Значение модуля Юнга

$E = 1,71 \cdot 10^4$ МПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$. Результаты расчета представлены на рис. 6 в виде изолиний компонентов относительных деформаций.

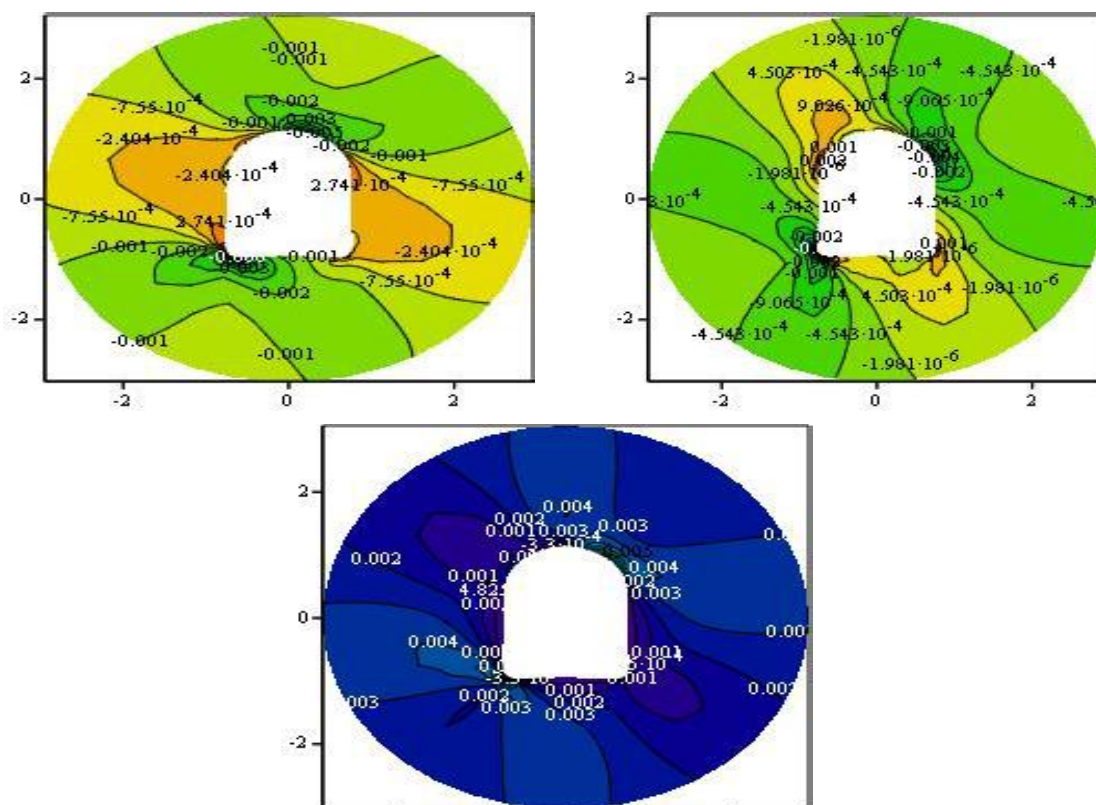


Рис. 6. Изолинии горизонтальных, вертикальных и угловых относительных деформаций /
Fig. 6. Isolines of horizontal, vertical and angular deformations

Заключение. В результате исследования создана математическая модель напряженного и деформированного состояния вокруг напорного туннеля сводчатым поперечным сечением с развитыми вертикальными стенками, расположенного в зоне основания впадины между двух гор. Модель построена в виде суммы четырех полей. Первое поле напряжений – интегралы дифференциальных уравнений равновесия при совместном действии силы гравитации, квазистатической сейсмической силы и горизонтальных тектонических сил. Второе характеризует влияние двух близко рас-

положенных гор с впадиной между ними. Третье поле характеризует возникновение туннеля в предварительно напряженном массиве от первых двух полей. Четвертое возникает от напора воды на контур туннеля. Использован аппарат конформного отображения полуплоскости с двумя выступами на вспомогательную полуплоскость и отображение внешности отверстия на внешность единичного круга во вспомогательной плоскости. Приведены результаты расчета полей напряжений и деформаций с учетом и без учета наличия туннеля.

Список литературы

1. Авершин С. Г., Балалаева С. А., Груздев В. Н. Распределение напряжений вокруг горных выработок. Фрунзе: Илим, 1971. 130 с.
2. Айтматов И. Т. Геомеханика рудных месторождений Средней Азии. Фрунзе: Илим, 1987. 246 с.
3. Айтматов И. Т. О естественных полях остаточных напряжений в породах магматического и метаморфического происхождения // Современные проблемы механики сплошной среды. Вып. 13. Геомеханика горного массива. Бишкек, 2011. С. 28–55.

4. Ахпателов Д. М. Исследование напряженного состояния массивов горных пород в поле гравитации: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1972. 23 с.
5. Гольдин А. Л. Напряженно-деформированное состояние упругих полуплоскостей с вырезом под действием гидростатической нагрузки // Изв. ВНИИГ, 1969. Т. 91. С. 239–301.
6. Гольдштейн Р. В., Калинин Э. В. Опыт применения аналитического метода для оценки напряженного состояния массива горных пород в бортах и основании глубоких речных долин // Вестник МГУ. Сер. Геология. 1969. № 5. С. 54–65.
7. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. А. Распределение напряжений вокруг подземных выработок // Труды совещания по управлению горным давлением. М.: Изд-во АН СССР, 1938. С. 7–55.
8. Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Масанов Ж. К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 212 с.
9. Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
10. Жумабаев Б., Аманалиев А. А., Ботоканова Б. А. Распределение напряжений вокруг напорного туннеля с эллиптическим (круглым) поперечным сечением // Современные проблемы механики сплошных сред. 2011. Вып. 13. С. 330–338.
11. Кирьянов Д. В. Mathcad 14. Спб.: БВХ-Петербург, 2007. 685 с.
12. Кожогулов К. Ч., Усенов К. Ж. Напряженно-деформированное состояние подрабатываемых бортов и днищ карьеров. Жалал-Абад, 2002.
13. Крупенников Г. А., Филатов Н. А., Амусин Б. З., Барковский В. М. Распределение напряжений в породных массивах. М.: Недра, 1972. 144 с.
14. Кутепов В. М. Результаты изучения естественных напряжений в массивах трещиноватых пород горных склонов // Вестник МГУ. Сер. Геология. 1966. № 6. С. 71–76.
15. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Напряженное состояние земной коры / под ред. П. Н. Кропоткина. М.: Наука, 1973. 186 с.
17. Оловянный А. Г. Механика горных пород. Моделирование разрушений. СПб.: КОСТ, 2012. 280 с.
18. Тер-Мартirosян З. Г., Ахпателов Д. М. Напряженное состояние горных массивов в поле гравитации // ДАН СССР, 1976. Т. 220, № 2. С. 311–314.
19. Hast N. Stress fields fracture system and the mechanism for movements in the Gneiss-Granite Area of the Mont Blanc massif // Roch Mechanica Supplementum. 1980. No 9. P. 3–10.
20. Hoek E., Bray J. W. Rock slope engineering. London: Institution of Mining and Metallurgy, 1981. 358 p.

References

1. Avershin S. G., Balalaeva S. A., Gruzdev V. N. *Raspredelenie napryazheniy vokrug gornyyh vyrabotok* (Distribution of stresses around mine workings). Frunze: Ilim, 1971. 130 p.
2. Aitmatov I. T. *Geomekhanika rudnykh mestorozhdeniy Sredney Azii* (Geomechanics of ore deposits in Central Asia). Frunze: Ilim, 1987. 246 p.
3. Aitmatov I. T. *Sovremennye problemy mehaniki sploshnoy sredy*. Vyp. 13. Geomekhanika gornogo massiva (Modern problems of continuum mechanics. Issue. 13. Geomechanics of the mountain massif). Bishkek, 2011. pp. 28–55.
4. Akhpatelov D. M. *Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya massivov gornyyh porod v pole gravitatsii: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk.* (Investigation of the stress state of rock massifs in the field of gravitation: abstract of dis. ... cand. tech. sciences). Moscow, 1972. 23 p.
5. Goldin A. L. *Izvestiya VNIIG* (Proceedings of VNIIG), 1969, vol. 91, pp. 239–301.
6. Goldstein R. V., Kalinin E. V. *Vestnik MGU. Ser. Geologiya* (Bulletin of the Moscow State University. Ser. Geology), 1969, no. 5. pp. 54–65.
7. Dinnik A. N., Morgaevsky A. B., Savin G. A. *Trudy soveshchaniya po upravleniyu gornym davleniyam* (Proceedings of the meeting on the management of rock pressure). Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1938. pp. 7–55.
8. Yerzhanov Zh. S., Aitaliev Sh. M., Masanov Zh. K. *Seysmonapryazhennoe sostoyanie podzemnykh sooruzheniy v anizotropnom sloistom massive* (Seismic stress of underground structures in an anisotropic layered massif). Alma-Ata: Science, 1980. 212 p.
9. Zhumabaev B. *Raspredelenie napryazheniy v massivah porod s goristym relefom* (Stress distribution in rock massifs with mountainous terrain). Frunze: Ilim, 1988. 190 p.
10. Zhumabayev B., Amanaliyev A. A., Botokanova B. A. *Sovremennye problemy mehaniki sploshnykh sred* (Modern problems of continuum mechanics), 2011, issue 13, pp. 330–338.

11. Kiryanov D. V. *Mathcad 14* (Mathcad 14). St. Petersburg: BVH-Petersburg, 2007. 685 p.
12. Kozhogulov K. Ch., Usenov K. Zh. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie podrabatyvaemykh bortov i dnishch karierov* (Stress-strain state of undermined ore bands and bottoms of quarries). Zhalal-Abad, 2002.
13. Krupennikov G. A., Filatov N. A., Amusin B. Z., Barkovsky V. M. *Raspredelenie napryazheniy v porodnykh massivakh* (Stress distribution in rock massifs). Moscow: Nedra, 1972. 144 p.
14. Kutevov V. M. *Vestnik MGU. Ser. Geologiya* (Bulletin of the Moscow State University. Ser. Geology), 1966, no. 6, pp. 71–76.
15. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* (Some basic problems of the mathematical theory of elasticity). Moscow: Nauka, 1966. 707 p.
16. *Napryazhennoe sostoyanie zemnoy kory* (Stress state of the earth's crust); Ed. P. N. Kropotkin. Moscow: Nauka, 1973. 186 p.
17. Olovyanin A. G. *Mekhanika gornyykh porod. Modelirovaniye razrusheniya* (Mechanics of rocks. Modeling of destruction). SPb.: KOST, 2012. 280 p.
18. Ter-Martirosyan Z. G., Akhpatelov D. M. *DAN SSSR* (DAN USSR), 1976, vol. 220, no. 2, pp. 311–314.
19. Hast N. *Roch Mechanics Supplementum* (Roch Mechanics Supplementum), 1980, no. 9, pp. 3–10.
20. Hoek E., Bray J. W. *Rock slope engineering* (Rock slope engineering). London: Institution of Mining and Metallurgy, 1981. 358 p.

Коротко об авторах

Баялиева Жамиля Аскарровна, канд. техн. наук, ст. преподаватель кафедры горного гидротехнического строительства Кыргызского национального аграрного университета им. К. И. Скрябина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле
ms.jamila62@mail.ru

Ботоканова Бактыгул Асанкожоевна, ст. преподаватель кафедры горного гидротехнического строительства Кыргызского Национального аграрного университета им. К. И. Скрябина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле

Жумабаев Бейшенбек, д-р техн. наук, профессор кафедры механики Кыргызско-Российского Славянского университета им. Б. Ельцина, г. Бишкек, Кыргызстан. Область научных интересов: науки о Земле, горные науки

Briefly about the authors

Zhamila Bayalieva, candidate of technical sciences, senior lecturer, Mining Hydraulic Engineering department, Kyrgyz National Agrarian University named after K. I. Skryabin, Bishkek, Kyrgyzstan. Sphere of scientific interests: Earth sciences

Baktigul Botokanova, senior lecturer Mining Hydraulic Engineering department, Kyrgyz National Agrarian University named after K. I. Skryabin, Bishkek, Kyrgyzstan. Sphere of scientific interests: Earth sciences

Beyshebek Zhumabaev, doctor of technical sciences, professor, Mechanics department, Kyrgyz-Russian Slavic University named after Boris Yeltsin, Bishkek, Kyrgyzstan. Sphere of scientific interests: Earth sciences, mining sciences

Образец цитирования

Баялиева Ж. А., Ботоканова Б. А., Жумабаев Б. Математическое моделирование напряженного и деформированного состояния вокруг напорного туннеля, расположенного в зоне межгорной впадины // Вестн. Забайкал. гос. ун-та. 2018. Т. 24. № 7. С. 4–17. DOI: 10.21209/2227-9245-2018-24-7-4-17.

Bayalieva Z., Botokanova B., Zhumabaev B. Mathematical modelling of the intense and deformed state around the pressure head tunnel, located in the zone of the intermountain depression // Transbaikalian State University Journal, 2018, vol. 24, no. 7, pp. 4–17. DOI: 10.21209/2227-9245-2018-24-7-4-17.

Статья поступила в редакцию: 16.03.2018 г.
Статья принята к публикации: 14.09.2018 г.