МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ,
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОУ ВПО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ

12 сентября 2023 г.

Математика

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшей математики**

Учебный план b23030330_23_1 этк.plx
Направление 23.03.03 - РФ, 670200 - КР Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов
Профиль "Автомобильный сервис"

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **6 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 216
в том числе:
аудиторные занятия 90
самостоятельная работа 89,8
экзамены 35,7

Виды контроля в семестрах:
экзамены 2
зачеты 1

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**1 (1.1)**		**2 (1.2)**		Итого	
Недель	18 4/6		18 2/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18	36	36
Практические	36	36	18	18	54	54
Контактная работа в период теоретического обучения	0,2	0,2			0,2	0,2
Контактная работа в период экзаменационной сессии			0,3	0,3	0,3	0,3
В том числе инт.	14	14	14	14	28	28
Итого ауд.	54	54	36	36	90	90
Контактная работа	54,2	54,2	36,3	36,3	90,5	90,5
Сам. работа	53,8	53,8	36	36	89,8	89,8
Часы на контроль			35,7	35,7	35,7	35,7
Итого	108	108	108	108	216	216

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., доцент, Карабакиров К.Р.;препод. _________________

Рецензент(ы):
д.ф.-м.н., профессор, Байзаков А.Б. _________________

Рабочая программа дисциплины

Математика

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (приказ Минобрнауки России от 07.08.2020 г. № 916)

составлена на основании учебного плана:

Направление 23.03.03 - РФ, 670200 - КР Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов
Профиль "Автомобильный сервис"

утвержденного учёным советом вуза от 27.06.2023 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Высшей математики

Протокол от 30.08.2023 г.№ 1
Срок действия программы: 2023-2027 уч.г.
Зав. кафедрой профессор Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
03.09 2024 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2024-2025учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 28.08 2024 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., проф. Лелевкина Л.Г.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
09.09 2025 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от 09.09 2025 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., Гончарова И.В.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
__________2026г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от __________2026 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., Гончарова И.В.

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель УМС
__________2027 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры
Высшей математики

Протокол от __________2027 г. № 1
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., Гончарова И.В.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	научить студентов пользоваться основными понятиями и результатами, которые рассматриваются в данном разделе курса;
1.2	привить им соответствующую математическую культуру;
1.3	дать необходимый математический аппарат для изучения других естественнонаучных дисциплин;
1.4	обеспечить базовую математическую подготовку, позволяющую успешно решать современные прикладные инженерные и научные задачи в области технологии транспортных процессов, эксплуатации транспортно-технологических машин и комплексов и сформировать навыки формулировки математических постановок этих задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Для освоения данной дисциплины необходимы знания по предметам «Алгебра и начала анализа», «Геометрия» в объеме средней школы.
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Физика
2.2.2	Теоретическая механика
2.2.3	Начертательная геометрия и инженерная графика
2.2.4	Общая электротехника и электроника
2.2.5	Основы трехмерного моделирования и прототипирования
2.2.6	Компьютерная графика
2.2.7	Сопротивление материалов
2.2.8	Вычислительная техника и сети в отрасли
2.2.9	
2.2.10	
2.2.11	
2.2.12	
2.2.13	
2.2.14	
2.2.15	
2.2.16	
2.2.17	

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	Основные понятия и методы линейной алгебры и аналитической геометрии:
3.1.2	матрицы, определители, обратные матрицы, ранг матрицы, однородной и неоднородной систем линейных уравнений, теоремы Кронекера-Капелли, вектора, длины вектора, коллинеарных векторов, компланарных векторов, ортогональных векторов, линейно-зависимых и линейно-независимых векторов, базиса векторного пространства, проекции вектора на ось; скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; различные уравнения прямой на плоскости и в пространстве, кривые второго порядка; плоскость и поверхности 2-го порядка; метод сечений.
3.1.3	А также определение функции, способы ее задания и ее предел; определение числовой последовательности, способы ее задания и ее предел; производные и дифференциал функций одного переменных; интегрирование (определенное и неопределенное) функций; основные формулы вычисления пределов, дифференцирования и интегрирования; формулы приложения определенного интеграла.
3.1.4	
3.2	**Уметь:**

3.2.1	Вычислять определители 2, 3-го и старших порядков; распознавать виды матриц; корректно выполнять действия с матрицами; проводить исследования на совместность и решать однородные и неоднородные системы линейных уравнений; численно решать системы линейных уравнений методами Гаусса и Крамера; использовать свойства: линейных операций над векторами, скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических и физических задач; производить исследование геометрических объектов методами векторной алгебры и аналитической геометрии; составлять уравнения прямых на плоскости и в пространстве; составлять уравнения плоскости, находить углы между прямыми и плоскостями; распознавать типы кривых второго порядка и выделять их основные характеристики; строить геометрический образ прямых и кривых второго порядка на плоскости, плоскостей и поверхностей второго порядка в пространстве, адекватный уравнениям их задающим.
3.2.2	А также применять полученные знания и навыки для их решения; проводить анализ и оптимизацию полученных решений; вычислять пределы последовательности и функции; исследовать, дифференцировать и интегрировать простейшие функции; строить графики функций.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	Навыками употребления математического языка и символики для выражения количественных и качественных отношений объектов, методами построения типовых математических моделей в профессиональной области, аналитическими и численными методами решения типовых задач и содержательной интерпретации полученных результатов.
3.3.2	А также вычислением пределов последовательности и функции; исследованием, дифференцированием и интегрированием простейших функций; применением полученных знаний и навыков для решения задач; применением математического анализа в будущей профессии

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Линейная алгебра							
1.1	Матрицы. Действия над ними.Определитель матрицы. Свойства. /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.2Л3.2 Э2			
1.2	Матрицы. Действия над ними.Определитель матрицы. Свойства. /Пр/	1	6		Л1.1 Л1.3Л2.5Л3.1 Э2			
1.3	Матричные уравнения.Обратная матрица. Свойства. /Ср/	1	8		Л1.1 Л1.3Л2.1Л3.1 Э2			
1.4	Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса.Исследование СЛАУ. /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.2Л3.2 Э2			
1.5	Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение системы с помощью обратной матрицы.Исследование СЛАУ. /Пр/	1	6		Л1.1 Л1.3Л2.5Л3.1 Э2	2		
1.6	Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод решения.Базисные решения. /Ср/	1	8		Л1.1 Л1.3Л2.1Л3.1 Э2			
	Раздел 2. Аналитическая геометрия							
2.1	Векторы. Действия над ними. /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.2Л3.2 Э3 Э4	1		

2.2	Векторы. Линейные операции над ними. Векторы. Скалярное произведение. Векторы. Векторное и смешанное произведения. /Пр/	1	6		Л1.1 Л1.3Л2.5Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	2		
2.3	Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы. /Ср/	1	6		Л1.1 Л1.3Л2.4Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
2.4	Прямые и плоскости в трехмерном пространстве. /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.2Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	1		
2.5	Плоскость в трехмерном пространстве. Прямая в трехмерном пространстве. /Пр/	1	5		Л1.1 Л1.3Л2.5Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	2		
2.6	Переход от общих уравнений прямой к каноническим. Нормальное уравнение плоскости. /Ср/	1	6		Л1.1 Л1.3Л2.3Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
2.7	Прямая на плоскости. /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.2Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
2.8	Прямая на плоскости. /Пр/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.5Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
2.9	Прямая на плоскости. /Ср/	1	6		Л1.1 Л1.3Л2.1Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
2.10	Кривые 2-го порядка на плоскости. /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.3Л2.2Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	1		
2.11	Кривые 2-го порядка на плоскости. Окружность, эллипс. Кривые 2-го порядка на плоскости. Гипербола, парабола. /Пр/	1	4		Л1.1 Л1.3Л2.5Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	2		
2.12	Кривые 2-го порядка на плоскости. Конические сечения. /Ср/	1	6		Л1.3Л2.1Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
2.13	Поверхности 2 порядка в пространстве. /Лек/	1	2		Л1.3Л2.2Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	1		
2.14	Поверхности 2 порядка в пространстве. Метод сечений. /Пр/	1	2		Л1.3Л2.5Л3.3 Л3.8 Э3 Э4	2		
2.15	Метод сечений. /Ср/	1	6		Л1.3Л2.3Л3.3 Л3.8 Э3 Э4			
	Раздел 3. Предел функции							
3.1	Функции и их графики. Предел последовательности /Лек/	1	2		Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.6 Э5			
3.2	Функции и их графики. /Пр/	1	1		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.6 Э5			

3.3	Множества. Операции над множествами. /Ср/	1	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.6 Э5			
3.4	Предел функции. Непрерывность функции /Лек/	1	2		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.6 Э5			
3.5	Предел последовательности. Предел функции. Замечательные пределы. Непрерывность функции. /Пр/	1	4		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.6 Э5			
3.6	Преобразование графиков функций. /Ср/	1	3,8		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.6 Э5			
3.7	/КрТО/	1	0,2					
	Раздел 4. Производная фунции и ее применение							
4.1	Производная функции /Лек/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.7 Э6			
4.2	Производная функции /Пр/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.7 Э6	2		
4.3	Вычисление производных по определению. Сравнение бесконечно малых величин. /Ср/	2	6		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.7 Э6			
4.4	Исследование функций и построение графиков /Лек/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.7 Э6	1		
4.5	Исследование функций и построение графиков /Пр/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.7 Э6	2		
4.6	Применение производных. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. /Ср/	2	6		Л1.3Л2.3Л3.7 Э6			
	Раздел 5. Неопределенные интегралы							
5.1	Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования /Лек/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.4 Л3.9 Э7			
5.2	Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. /Пр/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.4 Л3.9 Э7			
5.3	Интегрирование 4 простейшей рациональной дроби. /Ср/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.4 Л3.9 Э7			
5.4	Интегрирование различных классов функций /Лек/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.4 Л3.9 Э7			

5.5	Интегрирование различных классов функций /Пр/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.4 Л3.9 Э7			
5.6	Интегрирование различных классов функций. Интегрирование дифференциального бинома. /Ср/	2	8		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.4 Л3.9 Э7			
	Раздел 6. Определенные интегралы							
6.1	Определенный интеграл. /Лек/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.5 Э8	1		
6.2	Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. /Пр/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.5 Л3.9 Э8	2		
6.3	Приближенное вычисление интегралов. /Ср/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.5 Э8			
6.4	Несобственные интегралы. /Лек/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.5 Э8	1		
6.5	Несобственные интегралы. /Пр/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.5 Э8	2		
6.6	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. /Ср/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.5 Э8			
6.7	Приложения определенных интегралов. /Лек/	2	2		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.5 Э8	1		
6.8	Приложения определенных интегралов. /Пр/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.5Л3.5 Э8	2		
6.9	Механические приложения определенного интеграла. /Ср/	2	4		Л1.2 Л1.3Л2.3Л3.5 Э8			
6.10	Контроль /Экзамен/	2	35,7					
6.11	/КрЭк/	2	0,3					

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

1-СЕМЕСТР ЗАЧЕТ

1.Матрицы. Основные понятия. Типы матриц
2.Действия над матрицами и их свойства
3.Определители. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя
4.Определители высших порядков. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема аннулирования
5.Свойства определителей
6.Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы
7.Базисный минор матрицы. Ранг матрицы
8.Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса
9.Совместность системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
10.Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.

11.Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
12.Матричный метод решения линейных алгебраических уравнений.
13.Системы однородных линейных уравнений.
14.Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами
15.Проекция вектора на ось. Свойства проекций векторов
16.Скалярное произведение векторов и его свойства
17.Прямоугольная система координат в пространстве. Разложение вектора по ортам координатных осей
18.Длина вектора. Угол между двумя векторами. Условия коллинеарности и ортогональности двух векторов. Направляющие косинусы вектора
19.Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов
20.Условие линейной независимости трех векторов, заданных своими координатами. Понятие базиса
21.Правоориентированные и левоориентированные тройки векторов. Векторное произведение векторов и его свойства. Приложения
22.Смешанное произведение векторов, его свойства. Приложения.
23.Система координат на плоскости. Деление отрезка в заданном отношении
24.Общее уравнение прямой линии на плоскости. Частные случаи. Уравнение прямой с угловым коэффициентом
25.Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых
26.Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой
27.Пучок прямых. Взаимное расположение прямых на плоскости. Пересечение прямых
28.Кривые второго порядка на плоскости, важнейшие частные случаи
29.Окружность. Эллипс. Их параметры и свойства
30.Гипербола. Ее параметры и основные свойства
31.Парабола. Параметр параболы, основные свойства параболы
32.Поворот и параллельный перенос координатных осей. Упрощение кривых второго порядка и их классификация
33.Уравнения поверхности и линии в пространстве
34.Общее уравнение плоскости. Частные случаи
35.Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки
36.Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей
37.Каноническое и параметрические уравнения прямой в пространстве
38.Прямая в пространстве как пересечение двух плоскостей
39.Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности
40.Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
41.Цилиндрические поверхности
42.Поверхности вращения. Конические поверхности
43.Эллипсоид. Однополостный и двуполостный гиперболоиды
44.Параболический и гиперболический параболоиды
45.Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

II-СЕМЕСТР - ЭКЗАМЕН

1.Функция и ее график. Полярные и параметрические способы задания функции.
2.Числовая последовательность. Основные виды последовательности.
3.Предел последовательности. Виды неопределенности.
4.Пределы функций. Свойства пределов.
5.Замечательные пределы.
6.Непрерывность функции. Основные свойства непрерывных функций.
7.Классификация точек разрывов.
8.Производные функций. Методы дифференцирования сложных функций.
9.Дифференциал функции. Основные свойства.
10.Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.
11.Производные и дифференциалы высших порядков.
12.Исследование функции на асимптоты.
13.Исследование функции на экстремумы.
14.Исследование функции на точки перегиба.
15.Схема исследования функции и построение ее графика.
16.Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
17.Различные методы вычисления неопределенного интеграла. Интегрирование методом замены переменной. Интегрирование по частям
18.Интегрирование дробно-рациональных функций.
19.Интегрирование иррациональных функций.
20.Интегрирование тригонометрических функций.
21.Определенный интеграл. Задачи, приводящие к определенному интегралу.
22.Методы вычисления определенного интеграла.
23.Замена переменой в определенном интеграле.
24.Несобственные интегралы I рода. Основные свойства.

25.Несобственные интегралы II рода. Основные свойства.
26.Приложения определенного интеграла. Вычисление площади криволинейной трапеции.
27.Вычисление длины дуги плоской линии. Вычисление объема тела вращения.

Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ в приложениях 1 и 2.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовые работы учебным планом не предусмотрены

5.3. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств (ФОС) для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Математика» представляет собой комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для контроля и оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, определения соответствия или несоответствия уровня достижений обучающегося планируемым результатам.

В 1 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3 в количестве 10 вариантов, на усмотрение преподавателя контрольные работы № 1, 2, 3 (10 вариантов) или компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования (КОПТ) № 1, 2, 3 по разделам "Линейная алгебра", «Векторная адгебра», «Аналитическая геометрия».

Во 2 семестре: Типовые расчеты №1, №2, №3 в количестве 10 вариантов, на усмотрение преподавателя контрольные работы № 1, 2, 3 (10 вариантов) или компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования (КОПТ) № 1, 2, 3 по разделам "Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента", «Дифференцирование функций одной переменной», «Неопределенный и определенный интегралы».

Варианты типовых расчетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3,
контрольных работ – ПРИЛОЖЕНИЕ № 4,
компьютерных контрольно-обучающих программ тестирования (КОПТов) - ПРИЛОЖЕНИЕ № 5

Билеты для проведения итогового контроля в 1 семестре (зачет), во 2 семестре (экзамен) составляются из базы вопросов для оценки знаний, умений (приложение 1) и навыков (приложение 2), характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Образцы билетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6

5.4. Перечень видов оценочных средств

1. Типовые расчеты;
2. Контрольные работы;
3. Контрольно обучающая программа тестирования (КОПТ);

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н., Кремер Н.Ш.	Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум	М.: Юрайт 2010
Л1.2	Баврин И.И.	Для студентов естественно-научных специальностей педагогических вузов: Высшая математика	Издательский центр «Академия» 2010
Л1.3	Гусак А.А.	Высшая математика. Т. 1, 2.	Минск: Тетра Системс 2012

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Л.А. Кузнецов	Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие	Москва .: Высшая школа 1983
Л2.2	Под ред. В.И. Ермакова	Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник	Москва .: ИНФРА-М 2005
Л2.3	Колесников А.Н.	Краткий курс математики для экономистов: учебное пособие	М.: ИНФРА-М 1997
Л2.4	Красс М.С., Чупрынов Б.П.	Математика для экономистов: учебное пособие	СПб.: Питер 2004,
Л2.5	Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.	Сборник задач по высшей ма-тематике : Учебное пособие	М.: Айрис-пресс 2008

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Е.С. Федорова, Т.А. Шемякина	Линейная алгебра: Учебное пособие	Бишкек.: Изд-во КРСУ 2002
Л3.2	Лелевкина Л.Г.	Основы линейной и векторной алгебры: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2001
Л3.3	Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К.	Векторная алгебра: Учебно-методическое пособие для компьютерного тестирования	КРСУ 2010
Л3.4	Лелевкина Л.Г.	Методическое пособие по методам интегрирования неопределенных интегралов: методическое пособие	КР-СУ 2005
Л3.5	Давидюк Т.А., Гончарова И.В.	Определенный интеграл и его приложения: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2010
Л3.6	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.	Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2009
Л3.7	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.	Дифференцирование функций одной переменной: Контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования	КР-СУ 2009
Л3.8	Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б.	Аналитическая геометрия: Учебно-методическое пособие	КР-СУ 2010
Л3.9	Лелевкина Л.Г., Карабакиров К.Р.	Методы интегрирования неопределенных интегралов: Учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 2017

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	http://math.krsu.edu.kg	
Э2	http://math.krsu.edu.kg/metodich/linalg.pdf	
Э3	http://math.krsu.edu.kg/metodich/vectalg.pdf	
Э4	http://math.krsu.edu.kg/metodich/analgeomjan.pdf	
Э5	http://math.krsu.edu.kg/metodich/limits.pdf	
Э6	http://math.krsu.edu.kg/metodich/diffunc.pdf	
Э7	http://math.krsu.edu.kg/metodich/undefint.pdf	
Э8	http://math.krsu.edu.kg/metodich/oprint.pdf	

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	Традиционные образовательные технологии – лекции, практические занятия, ориентированные прежде всего на сообщение знаний и способов действий, передаваемых студентам в готовом виде и предназначенных для воспроизводящего усвоения и разбора конкретных задач.
6.3.1.2	Инновационные образовательные технологии – занятия в интерактивной форме, которые формируют системное мышления и способность генерировать идеи при решении различных творческих задач. К ним относятся: проблемная лекция; лекция с визуализацией; лекция-диалог; диалоговая форма обучения (предполагает разработку целенаправленной системы вопросов, поиск ответов на которые служит основой для включения студентов в дискуссию, в самостоятельный поиск необходимой информации); групповая форма работы (парами, фронтальная, групповая, индивидуальная, микрогруппы); метод «мозгового штурма» (участники обсуждения высказывают большое количество вариантов решения той или иной задачи).
6.3.1.3	Информационные образовательные технологии: электронные тексты лекций с презентациями; компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования, разработанные кафедрой; самостоятельное использование студентом компьютерной техники и интернет-ресурсов для выполнения домашних заданий, типовых расчетов и самостоятельной работы по различным разделам математического анализа.

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Кафедра «Высшая математика» имеет постоянно действующий сайт, на котором содержится весь необходимый теоретический и практический материал для студентов, учебно-методические пособия (ЭУМП), электронный учебный курс (ЭУК) и электронная библиотека. Данные материалы размещены на сайте кафедры www.matem.krsu.edu.kg. Электронные учебно-методические пособия (ЭУМП):Курманбаева А.К., Комарцова Е.А. "Линейная алгебра". http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/linalg2015.pdf
6.3.2.2	Лелевкина Л.Г., Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б. "Аналитическая геометрия" http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/2012.pdf
6.3.2.3	Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К. "Векторная алгебра" http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/9vectalg.pdf

6.3.2.4	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. "Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента" http://math.krsu.edu.kg/metodich/limits.pdf
6.3.2.5	Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. "Дифференцирование функций одной переменной" http://math.krsu.edu.kg/metodich/diffunc.pdf
6.3.2.6	Лелевкина Л.Г. "Методические указания по методам интегрирования неопределенных интегралов" http://math.krsu.edu.kg/metodich/undefint.pdf
6.3.2.7	Гончарова И.В., Давидюк Т.А. "Определенный интеграл и его приложения" http://math.krsu.edu.kg/metodich/oprint.pdf

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
7.1	Лекционная аудитория на 50 посадочных мест;
7.2	Аудитория для проведения практических занятий на 25 посадочных мест;
7.3	Компьютерный класс для выполнения самостоятельной работы и просмотра фото-, аудио-, мультимедия, видео-материалов;
7.4	Интерактивная доска;
7.5	Проектор;
7.6	Презентации лекций по основным темам;
7.7	Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования по различным разделам математического анализа.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Система балльной аттестации при изучении курса «Математика» осуществляется по накопительной системе баллов и предполагает текущий, рубежный и промежуточный контроль. Все виды учебной деятельности оцениваются в баллах. Для контроля и ритмичности работы студентов в течение семестра вводятся аттестационные недели в соответствии с технологической картой дисциплины, с указанием минимальной и максимальной сумм баллов.

Технологические карты дисциплины представлены в ПРИЛОЖЕНИИ 8.

МОДУЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ВКЛЮЧАЕТ:

1. Текущий контроль: усвоение учебного материала на аудиторных занятиях (лекциях, практических, в том числе учитывается посещение и активность) и выполнение обязательных заданий для самостоятельной работы (домашних заданий, типовых расчетов).
2. Рубежный контроль: проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом. Выполнение модульных контрольных заданий проводится в письменном виде или с помощью компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования и является обязательной компонентой модульного контроля.
3. Промежуточный контроль - завершенная задокументированная часть учебной дисциплины – совокупность тесно связанных между собой зачетных модулей.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ТЕКУЩЕМУ КОНТРОЛЮ

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.
Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнение всех учебных заданий преподавателя, ознакомление с основной и дополнительной литературой.
Запись лекции - одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения и выводы, обобщения, формулировки. Культура записи лекции - один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5-10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.
Лекции в основном нацелены на освещение фундаментальных и широко используемых понятий и определений, теорем и их доказательств, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой.
Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемой программой.
При подготовке к занятиям обучающийся должен просмотреть конспекты лекций, практических занятий, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы, решить задания домашней работы.
Рекомендуется регулярно отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.
Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта лекций в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Следует найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, нужно сформулировать вопросы, обратиться за помощью к преподавателю на еженедельных консультациях.

За посещение лекционных и практических занятий, а также за активную работу на них, студент получает поощрительные баллы, указанные в технологической карте.
Для закрепления пройденного материала и формирования навыков решения задач на каждом практическом занятия студент получает домашнее задание - 5-10 примеров, в зависимости от сложности, по пройденным темам. Для выполнения домашних заданий студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях. Выполнение домашних заданий поощряется баллами, указанными в технологической карте.

ВЫПОЛНЕНИЕ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Для формирования навыков и умений, предусмотренных компетенциями, а также для активизации самостоятельной работы студентам нужно выполнить типовые расчеты (в первом и втором семестрах – по три типовых расчета, в третьем семестре – два типовых расчета). Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3. Номер варианта типового расчета выбирается согласно номера студента в списке группового журнала. Типовые расчеты выполняются в отдельной тетради с последующей обязательной защитой. Если студент за типовой расчет набирает баллы ниже минимального, установленного в технологической карте, то преподаватель возвращает типовой расчет на доработку. После доработки студент может получить только минимально возможное количество баллов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Перед выполнением типового расчета студентам нужно внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия; проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях, приведенные в рабочей программе образцы выполнения типовых расчетов (ПРИЛОЖЕНИЕ № 9). В случае затруднения выполнения заданий типового расчета следует обратиться с вопросами к преподавателю на еженедельных консультациях.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ

Рубежный контроль по дисциплине «Математика» проводится в виде контрольной работы или с применением компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования (КОПТ). Образцы контрольных работ и КОПТ приведены в ПРИЛОЖЕНИЯХ № 4, 5 соответственно.
До рубежного контроля студенты должны пройти текущий контроль: выполнить домашние задания, защитить типовой расчет.
Контрольные работы и компьютерное тестирование проводятся в отведенное преподавателем время согласно технологической карте.
В случае, если студент отсутствовал на рубежном контроле по уважительной причине, то он должен согласовать с преподавателем время, когда он сможет пройти его, но обязательно до промежуточной аттестации.
Если студент за рубежный контроль набирает менее минимального количества баллов, указанных в технологической карте, то он имеет не более двух возможностей пройти его повторно. При этом он может получить не более 75% от максимально возможных баллов, указанных в технологической карте.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо повторить пройденный теоретический материал по данному разделу, выписать и выучить используемые в данном разделе формулы, проработать задания из домашней работы и типового расчета.
Образцы выполнения контрольных работ приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 10.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОПТ

Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования включают в себя задания с четырьмя вариантами ответов. В каждом задании можно обратиться к кратким методическим указаниям, разъясняющим каким методом, на основе использования какой формулы решается данное задание. После окончания тестирования, компьютер выдает каждому студенту, количество верно решенных заданий.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРОМЕЖУТОЧНОМУ КОНТРОЛЮ

При явке на промежуточную аттестацию (экзамен, зачет, диф.зачет) студенты обязаны иметь при себе зачётные книжки, которые они предъявляют экзаменатору в начале аттестации.
На промежуточном контроле студент должен верно ответить на теоретические вопросы билета и решить практические задания.
Оценка промежуточного контроля:
- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ
- 20 баллов - Вопросы для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Образцы билетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ в ПРИЛОЖЕНИИ № 11.

Итоговая оценка выставляется суммированием баллов текущего и итогового контролей следующим образом:

Оценка по 100-бальной шкале	Оценка по традиционной системе
85 – 100	Зачтено (отлично)
70 – 84	Зачтено (хорошо)
60 – 69	Зачтено (удовлетворительно)
0 – 59	Незачтено (неудовлетворительно)

ПРИЛОЖЕНИЕ №1.

Задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&5&3\\1&-4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&5&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&6\\-2&5\\3&0\end{pmatrix}$. Найти $P=(2A-3B)C$.

2. Выполнить действия: $2\cdot\begin{pmatrix}2&2&-3\\4&0&7\\-6&3&1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1&-3\\5&6&-7\\-2&-3&0\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $C=A^T-3B$, если $A=\begin{pmatrix}-2&4&0\\1&-2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4\\-3&5\\0&1\end{pmatrix}$.

4. Найти произведение матриц : $\begin{pmatrix}-1&2\\2&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-4\\5&-6\end{pmatrix}$.

5. Найти произведение матрицы $A(4\quad 7\quad -2)$ на матрицу $B=\begin{pmatrix}4&-1&3\\3&5&0\\-9&2&1\end{pmatrix}$.

6. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&2&7\\1&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&5&-3\\-6&0&5\\2&4&7\end{pmatrix}$.

7. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$ на матрицу $B=\begin{pmatrix}4&-1\\3&5\end{pmatrix}$.

8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&-2\\3&7\end{vmatrix}$.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&-2&6\\7&3&2\\0&-1&4\end{vmatrix}$.

10. Вычислить определитель третьего порядка разложением по третей строке

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

11. Вычислить определитель третьего порядка разложением по второму столбцу :

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 8$

13. Вычислить алгебраическое дополнение A_{12}определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Вычислить алгебраическое дополнение A_{24}определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решить системы уравнений методом Крамера, Гаусса или матричным способом

15. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y + z + 7 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y + z - 7 = 0, \\ x + 2y + z - 8 = 0, \\ x + y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 8 = 0, \\ 3x + y + z - 6 = 0, \\ 2x + y + 2z - 6 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -2x + y + 6 = 0, \\ x - 2y - z - 5 = 0, \\ 3x + 4y - 2z - 13 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + 4y + 6 = 0, \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ x-y+2z+7=0, \\ 2x+3y-z-1=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x-y+z=3, \\ x+3y-2z=1, \\ y+2z=8. \end{cases}$

25. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x-3y+4z=0, \\ 3x+2y-z=0, \\ 8x-y+3z=0. \end{cases}$$

26. Даны координаты точек $A(1;\ 3;\ 5)$ и $B(2;\ 5;\ 6)$. Найти координаты вектора AB; длину вектора.

27. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{c}=\bar{a}-\frac{1}{5}\bar{b}$, *если* $\bar{a}\ \{1;2;1\}$

28. Найти угол между векторами $\bar{a}=\{1;\ 2;-2\}$ и $\bar{b}=\{-2;6;3\}$.

29. Даны векторы $\bar{a}=0{,}5\bar{i}-3\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$. Найти скалярное произведение векторов.

30. Даны точки $A(3;-4;-2)$, $B(2;5;-2)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы $\alpha=60°$, $\beta=120°$ соответственно, а с осью Oz - тупой угол γ.

31. Вычислить угол, образованный векторами $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}+6\bar{k}$.

32. Вычислить $np_{\bar{a}}\bar{b}$, если $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}+6\bar{k}$.

33. Даны векторы $\bar{a}=0{,}5\bar{i}-3\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{c}=4\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$. Найти проекцию вектора $\bar{a}$ на ось вектора $2\bar{b}-\bar{c}$.

34. При каких значениях α и β векторы $\bar{a}=\alpha\bar{i}+7\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\beta\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны?

35. Найти координаты вектора $\bar{a}\times(2\bar{a}+\bar{b})$, если $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$.

36. Найти значение α, при котором векторы $\bar{a}=\{\alpha+1;3-2\alpha;\alpha-1\}$ и $\bar{b}=\{1;4;4\}$ перпендикулярны.

37. Найти абсциссу вектора $\bar{a}$, если известно, что векторы $\bar{a}=(x;3;-1)$, $\bar{b}=(1;-1;3)$, $\bar{c}=(1;9;-11)$ компланарны.

38. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}+6\bar{k}$.

39. Линейный оператор $\tilde{A}$ В базисе $\bar{i}, \bar{j}$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти образ $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$, где вектор $\bar{x} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

40. Составить общее уравнение прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ и указать координаты нормального вектора.

41.Даны вершины треугольника: $A(4,6)$, $B(-4,0)$, $C(-1,-4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершиныA на сторону BC.

42. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси координат, зная, что прямая проходит через точки $P(2,-8)$, $Q(-1,7)$.

43. Даны вершины треугольника: *A(1, 2); B(3, 7); C(5, -13)*. Вычислить длину высоты, опущенной из вершиныC на сторону AB.

44. Две стороны квадрата лежат на прямых $2x + 3y + 11 = 0$, $2x + 3y - 13 = 0$. Вычислить его площадь.

45. Найти точку рыночного равновесия для следующих функций спроса и предложения: p=-2x/3+6, p=2x/3+2.

46. Установить, какая линия определяется уравнением $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

47. Определить, при каких значениях m и n прямая $(m + 2n - 7)x + (2m - n + 4)y + 2m - 1 = 0$ параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный 5 (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

48. Составить уравнение окружности с центром в точке $M(2;2)$, касающейся прямой $3x + y - 18 = 0$.

49. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$.

50. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, \quad x + 4y + 13z - 23 = 0.$$

51. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

52. Составить уравнение плоскости проходящей через ось Oz и точку A(2; -3; 4).

53. Найти расстояние от точки $M_0(1,-6,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$.

54. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = t + 2; \\ z = 1 - t. \end{cases}$ с плоскостью 3x-2y+z=0.

55. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

56. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

57. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

58. При каких значениях A и B плоскости $2x+Ay+3z-5=0$ и $Bx-6y-6z+2=0$ параллельны.

59. При каком значении α и β уравнения $2x+\alpha y+3z-8=0$ и $\beta x-6y-6z+4=0$ будут определять параллельные плоскости.

60. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x+3y-5z-15=0$ и координатными плоскостями.

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+x+11}{2x^4+5x^2+1}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{4x^2+5x+1}$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$,

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$,

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+4x^2+1}{x^3+5x^2+10}$,

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+4x+1}{5x^2-10x+6}$,

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$

12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)}{x^2-5x+6}$

13) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{2+3x+x^2}$

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-4x+3}$

15) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$

16) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{9-x^2}{x^2+x-6}$

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-1)^2}$

18) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-16}$

19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-3x+2}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{6-3x}$

21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{4x-12}$

22) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$

23) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

II семстр

Найти производные функций

1) $y=\left(e^x-\sqrt[3]{x}\right)\left(arctgx-2\log_3 x\right)+\sqrt{2}$

2) $y=\dfrac{e^x-2}{\arcsin x+2\ln x}+\sin 1$

3) $y=\dfrac{\log_2 x+tg2}{\arccos x-2x^2}-\ln 10$

4) $y=\left(2\cos x-\dfrac{3}{x}\right)\left(arcctgx+4^x\right)$

5) $y=\left(2ctgx-\dfrac{5}{x^3}\right)\left(\cos x-\ln x\right)$

6) $y=\dfrac{2^x-x^2+e^2}{2\log_2 x-3}$

7) $y=\dfrac{5e^x+3x^2}{2\arcsin x+4\sin x}+tg5$

8) $y=\left(\cos x-4\ln x\right)\left(\dfrac{2}{x^2}+e^x\right)$

9) $y=\left(5ctgx+7^x\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+3\sin x\right)$

10) $y=\left(5\arcsin x+2^x\right)\left(\sqrt[5]{x^3}-3tgx\right)$

11) $y=\dfrac{3\ln x+5\sqrt[3]{x^7}}{2arctgx+4}+\ln 7$

12) $y=\dfrac{3e^x+5}{2tgx+4\sqrt[3]{x^4}}$

13) $y=\left(e^x-4\cos x\right)\left(\log_3 x+5tgx\right)+\sqrt{7}$

14) $y=\left(3tgx+5\sqrt[3]{x^2}\right)\left(arcctgx-4^x\right)$

15) $y=\left(arctgx+4^x\right)\left(\ln x-x^3+1\right)$

16) $y=\left(2ctgx+3\ln x\right)\left(4\arcsin x-\sqrt[4]{x^3}\right)$

17) $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$

Найти производные сложных функций

1. $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$
2. $y=\left(x+4\sin x\right)^3$
3. $y=arctg\left(\sin 3x+4\right)$
4. $y=\ln\left(3x^2+2tgx\right)+1$
5. $y=5^{\arcsin x-3\sqrt{x}}+2$
6. $y=\arccos\left(5x^2+5\right)$
7. $y=\sin\left(\sqrt[3]{x}+4x\right)-3$
8. $y=\log_5\left(\sin 2x+4\right)+\sqrt{3}$
9. $y=tg\left(\log_2 x+3\right)$
10. $y=3^{\sqrt[4]{x}+2x}$
11. $y=\cos\left(3x-\dfrac{5}{x^2}\right)$
12. $y=\log_3\left(3x-\cos x\right)$
13. $y=\arcsin\left(2x^3+\cos x\right)$
14. $y=ctg\left(\dfrac{6}{x^3}+\ln x\right)$
15. $y=\left(\dfrac{3}{x^3}+4x\right)^3$
16. $y=\arccos\left(\ln x+4tgx\right)$
17. $y=\arccos\left(\cos 2x-\ln x\right)$
18. $y=arctg\left(4e^x-5\right)$

Вычислить неопределенные интегралы

1) $\int\frac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx$.

2) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$.

3) $\int\frac{(6x-3)^2}{x}dx$.

4) $\int\frac{x^2 2^x+x-\sqrt[5]{x^3}}{x^2}dx$.

5) $\int\frac{(2x-3)^2}{x^3}dx$.

6) $\int\frac{x^4-5x^2e^x+9x}{x^2}dx$.

7) $\int\frac{3xe^x-x\sin x+5x}{x}dx$.

8) $\int\frac{(2x+3)^2}{x^5}dx$.

9) $\int\frac{2x+1}{x-1}dx$.

10) $\int\frac{x^2e^x-2e^x\sin x}{e^x}dx$.

11) $\int\frac{2x-3x^2e^x+\sqrt[4]{x^3}+3x^2}{x^2}dx$.

12) $\int\frac{3x+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$.

13) $\int\frac{xe^x-4\sqrt[3]{x}+3x-2}{x}dx$.

14) $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$.

15) $\int\frac{x^2\cos x+3x^2-5x}{x^2}dx$.

16) $\int\frac{e^x x^6+4x^6\sin x+9x^4}{x^6}dx$.

17) $\int\frac{(x+2)^2}{x^2}dx$.

18) $\int\frac{(x+1)^2}{x^5}dx$.

19) $\int\frac{x^2-6}{x-5}dx$.

20) $\int\frac{4x^5+15x^2e^x+14x^4}{x^2}dx$.

21) $\int\frac{x^2+3}{x^2+1}dx$.

22) $\int 3x-2\ \cos 2x\,dx$.

23) $\int (3x-2)e^{2x}dx$.

24) $\int 3+9x\ \cos 8x\,dx$.

25) $\int (x^2-3x)\ln x dx$.

26) $\int 5x+23\ \cos 8x\,dx$.

27) $\int (0x-4)\sin 5x\,dx$.

28) $\int (x^2-16x^4-2)\ln x\,dx$.

29) $\int x^4 \ln x dx$.

30) $\int (2x+1)e^x dx$.

31) $\int (x+2)\sin 6x\,dx$.

32) $\int 3\cos x+5\ \sin x dx$.

33) $\int (x-1)\sin 3x dx$.

34) $\int (x+5)3^x dx$.

35) $\int (\,^2+2x)\ln x dx$.

Вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin^6 x dx$.
2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.
3. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
4. $\int\limits_{0}^{1} 6(\,^2+x^3e^{x^4})dx$.
5. $\int\limits_{\pi^2/19}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.
6. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^6+1} dx$.
7. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin \ln x}{x} dx$.
8. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$.
9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1} dz$.
10. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$.
11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx$.
12. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.
13. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.
14. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x}{\cos^2(\,^2)} dx$.

15. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\,dx$

16. $\int\limits_0^{1/2} arcctg\,2x\,dx$.

17. $\int\limits_0^{\pi/2} (+3)\sin x\,dx$.

18. $\int\limits_1^e x^3 \ln x\,dx$.

19. $\int\limits_{-3}^0 (-2)e^{-x/3}\,dx$.

20. $\int\limits_{-1}^0 x\ln(-x)\,dx$.

21. $\int\limits_1^2 \ln(x+2)\,dx$.

22. $\int\limits_{-1}^0 (+1)e^{-2x}\,dx$.

23. $\int\limits_0^1 2x\,arctgx\,dx$.

24.

25. $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx.$

26. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\,dx.$

27. $\int\limits_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

28. $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx.$

29. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

30. $\int\limits_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\,dx.$

31. $\int\limits_0^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}\,dx.$

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УРОВНЯ ОБУЧЕННОСТИ ***ВЛАДЕТЬ***

I СЕМЕСТР

Установить совместность и найти общее решение систем линейных уравнений

1. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

11. Найти длину вектора $\bar{a} = 2\bar{x} - 3\bar{y}$, если $|\bar{x}| = 2$ $|\bar{y}| = 1$ $\angle(\bar{x}, \bar{y}) = 60°$.

12. Найти вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\bar{a} * \bar{b} = 3$.

13. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ и $\bar{b} = 5\bar{j} - 7\bar{k}$.

14. Даны вершины треугольника $A(2;0)$, $B(-4;3)$, $C(1;5)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A.

15. Даны векторы $\bar{x} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{y} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{z} = \bar{j} + 5\bar{k}$. Найти координаты вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ в базисе $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

16. В базисе $\bar{i}, \bar{j}$ линейный оператор $\tilde{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе $\bar{x} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{y} = -\bar{i} - 2\bar{j}$.

17. Определить, являются векторы $\bar{a} = (2;1;0)$, $\bar{b} = (3;1;-1)$, $\bar{c} = (1;0;1)$ линейно зависимыми.

18. В базисе $\bar{i}, \bar{j}$ линейный оператор $\tilde{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в новом базисе $\bar{x} = 2\bar{i} + \bar{j}$ $\bar{y} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.

19. В базисе $\bar{i}, \bar{j}$ линейный оператор $\tilde{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в новом базисе $\bar{x} = \bar{i} - 2\bar{j}$ $\bar{y} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

20. В базисе $\bar{i}, \bar{j}$ линейный оператор $\tilde{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в новом базисе $\bar{x} = -2\bar{i} + \bar{j}$ $\bar{y} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$.
21. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$ заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
22. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
23. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$ заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
24. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(3;0;-1)$, $B(1;2;-4)$ и $C(0;7;-2)$. Найти уравнения линий AD и CD

25. Зная, что изменение объема производства у с изменением производительности труда *x* происходит по прямой линии, составить ее уравнение, если при *x=3 y=185*, а при *x=5 y=305*. Определить объем производства при *x=20*.

26. Прибыль от продажи некоторого товара в двух магазинах выражается функциями y=-2+3x и y=-3+16x/5, где *x*-количество товара в сотнях штук, а *y*-прибыль в тысячах рублей. Определить, начиная с какого количества товара более выгодной становится продажа во втором магазине.

27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-1, 4) параллельно прямой $2x + 3y - 7 = 0$.

28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + 2y + 4 = 0$ и $3x - y - 9 = 0$ перпендикулярно прямой $x + y - 7 = 0$.

29. Какую линию определяет уравнение $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ и построить данную кривую.

31. Какую линию определяет уравнение $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ и построить данную кривую.

32. Какую линию определяет уравнение $x = -\sqrt{y^2 - 4y}$ и построить данную кривую.

33. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$

34. Установить, какая линия определяется уравнением

$4x^2 - 3y^2 - 24x + 6y - 3 = 0$ и построить ее.

35. Определить тип кривой $5x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 44 = 0$ и построить ее.

36. Определить тип кривой $5x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 44 = 0$ и построить ее.

37. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 1 - \sqrt{4x+8}$.

38. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

39. Установить, какая линия определяется уравнением $9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$.

40. Установить, какая линия определяется уравнением $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 9 = 0$.

41. Установить, какая линия определяется уравнением $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$

42. Установить, какая линия определяется уравнением

$x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{tg^3 x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(6x^2)}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg12x}{\ln(1+6x)}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(2x)}{e^{10x}-1}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(10x)}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\ )}{\arcsin(6x)}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{arctg^2(5x)}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{e^{2x^2}-1}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+14x)}{\arcsin 7x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\sin(4x^2)}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 5x}{e^{3x^2}-1}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2(3x)}{e^{6x^2}-1}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^3)}{arctg^3 x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(4x)}{\ln(1+3x)}$

Найти производные степенно-показательных функций

1)	$y=(\cos x)^{5e^x}$	2)	$y=(x^3+4)^{tgx}$
3)	$y=(tgx)^{4x}$	4)	$y=x^{arctgx}$
5)	$y=(\sin x)^{3x}$	6)	$y=x^{\arcsin x}$
7)	$y=(\sin x)^{x+1}$	8)	$y=(x^3-1)^x$
9)	$y=x^{\arcsin x}$	10)	$y=(\sin x)^x$

Найти производные y' от неявной функций

1)	$e^x+e^y-2^{xy}-1=0$	2)	$x^3+\ln y-x^2e^y=0$
3)	$x^2+yx+e^y=0$	4)	$x^3y+x^2y^2+xy^3=0$
5)	$2x^2+y^2-4x+10y+5=0$	6)	$e^x-e^y=y-x$
7)	$5x^2+3xy-2y^2+3=0$	8)	$2x^2+3^y+x\ln y=0$
9)	$x^2y^3+x-\sin y=0$	10)	$3y^2+\sin y-x2^y=0$

Найти производные y'_x функций

1)	$\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t-1 \end{cases}$
3)	$\begin{cases} x=4t^2+5 \\ y=3t^4+11 \end{cases}$	4)	$\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$
5)	$\begin{cases} x=\ln(5+t) \\ y=arctgt \end{cases}$	6)	$\begin{cases} x=e^t \\ y=(t^2-t)\cdot e^t \end{cases}$
7)	$\begin{cases} x=\ln(t+1) \\ y=t^2 \end{cases}$	8)	$\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=3t^2-5t \end{cases}$
9)	$\begin{cases} x=t^2+3t \\ y=t^3-27t \end{cases}$	10)	$\begin{cases} x=\ln(t^2+1) \\ y=t^3+1 \end{cases}$

Найти неопределенный интеграл

1)	$\int x^2\cdot\sqrt[3]{2+3x^3}\,dx$	2)	$\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$
3)	$\int\frac{x}{\cos^2 x^2}dx$	4)	$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5)	$\int\frac{e^x}{e^x-3}dx$	6)	$\int e^x\sqrt{e^x+3}\,dx$
7)	$\int(\sin x+5)^2\cos x\,dx$	8)	$\int\sqrt[4]{x^4-11}\cdot x^3dx$
9)	$\int e^{x^4}\cdot x^3dx$	10)	$\int\frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}dx$

11) $\int \left(e^x+5\right)^4 e^x dx$

12) $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{2+3x^5}\, dx$

13) $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2} dx$

14) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

15) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6} dx$

16) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+4}}$

18) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-1}}$

19) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-4}}$

20) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

21) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{4x+5}}$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{3x}+1} dx$

Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

1) $y=x^3-9x^2+15x-3$
2) $y=2x^2-8x+2$
3) $y=4x^3+4x^2+x-16$
4) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$
5) $y=3x-x^3$
6) $y=2x^3-12x^2+18x$
7) $y=x^3-5x^2+3x-5$
8) $y=x^4-2x^2-5$
9) $y=2x^3+3x^2-12x+1$
10) $y=x^3-3x^2-9x+7$
11) $y=x^3-3x^2$
12) $y=x^4-2x^2+5$
13) $y=2x^3-3x^2$
14) $y=2x^3+3x^2-1$
15) $y=2x^3-6x^2-18x+7.$
16) $y=3x^4-6x^2+5$

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=3x$, $x^2=3y$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=x+8$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$, $x+2y-5=0$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=\pm 2$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4-x^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x=(t-\sin t) \\ y=(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=7\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r^2=4\cos 2\phi, r=\sqrt{2}\left(r\geq\sqrt{2}\right)$
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\cos\phi, r=3\cos\phi$.
10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=3\sin\phi, r=5\sin\phi$.
11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=3(1+\cos\phi), r=3{,}5(r\geq 3{,}5)$.

12. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^2, y=2$. Ось вращения Oy.
13. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^3, y=x$. Ось вращения Ox.
14. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^3, y=x^2$.. В вариантах 1-13 ось вращения Ox, в вариантах 14-25 ось вращения Oy.
15. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y=x^2, y=x$. Ось вращения Oy.
16. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y=\ln\cos x+2, 0\leq x\leq\pi/6$
17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2\pi.$
18. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $\rho=6\sin\phi, \quad 0\leq\phi\leq\pi/3.$

Типовой расчет «Линейная и векторная алгебра»
Вариант 1

Задание 1. Найти P=(2A–3B)C

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 6\\ 7 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ 2\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 6 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x-y+2z=3,\\ x+y+2z=-4,\\ 4x+y+4z=-3.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}5x-6y+4z=0,\\ 3x-3y+z=0,\\ 2x-3y+3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+21\vec{k}$ Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}-3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p-2q$, если $|p|=4$, $|q|=1$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/4$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Вычислить: а) площадь грани BCD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B**.
$\vec{F}=(-3,1,-9)$, $A(6,-3,5)$, $B(9,5,-7)$

Вариант 2

Задание 1. Найти P=(2A–3B)C

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6\\ -3 & 4 & 5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\\ 4 & -3\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 5 & -1 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-y+z=12,\\ x+2y+4z=6,\\ 5x+y+2z=3.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+2y-5z=0,\\ 2x-4y+z=0,\\ 3x-2y-4z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
е) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=p-3q$, если $|p|=\frac{1}{5}$, $|q|=1$, $\left(\widehat{pq}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **А**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **В**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **В**.

$\vec{F}=(2,19,-49)$, $A(5,3,4)$, $B(6,-4,-1)$

Вариант 3

Задание 1. Найти **P=(2A–3B)C**:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\6&-3\\1&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&5\\-2&0\\1&4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}5&-2&1\\3&0&2\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}4&-5&-1&-5\\-3&2&8&-2\\5&3&1&3\\-2&4&-6&8\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x-y+3z=-4,\\x+3y-z=11,\\x-2y+2z=-7.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\2x-3y+4z=0,\\3x-2y+5z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=-7\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=2p+q$, если $|p|=2$, $|q|=3$, $\left(\widehat{pq}\right)=3\pi/4$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$. Вычислить: а) площадь грани ABD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(-4,5,-79)$, $A(4,-2,3)$, $B(7,0,-3)$

Вариант 4

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 1 & -5\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 4\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 1\\ 5 & 1 & -2 & 4\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-2y+4z=12,\\ 3x+4y-2z=6,\\ 2x-y-z=-9.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x+2y+4z=0,\\ 5x+y+2z=0,\\ 4x-y-2z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=-4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}+5\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=3p-2q$, если $|p|=4$, $|q|=1/2$, $\left(\widehat{pq}\right)=5\pi/6$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-5,-3,-4)$, $B(1,4,6)$, $C(3,2,-2)$, $D(8,-2,4)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B**.

$\vec{F}=(4,11,-6)$, $A(3,5,1)$, $B(4,-2,-3)$

Вариант 5

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}3&1&4\\5&6&-7\\1&0&-2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}7&-1&2\\0&4&8\\1&-3&-2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}6\\-5\\1\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}3&2&0&-5\\4&3&-5&0\\1&0&-2&3\\0&1&-3&4\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}8x+3y-6z=-4,\\x+y-z=2,\\4x+y-3z=-5.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}3x-y+z=0,\\2x+3y-4z=0,\\5x+2y-3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=p+3q$, если $|p|=2$, $|q|=3$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/3$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$. Вычислить: а) площадь грани ABD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B**.
$\vec{F}=(3,-5,7)$, $A(2,3,-5)$, $B(0,4,3)$

Вариант 6

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1\ 3\ 0\\ 2-41\end{pmatrix}.$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}4x+y-3z=9,\\ x+y-z=-2,\\ 8x+3y-6z=12.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 3x+3y+5z=0,\\ 4x+y+6z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=7\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p+3q$, если $|p|=3$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/2$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B**.

$\vec{F}=(5,4,11)$, $A(6,1,-5)$, $B(4,2,-6)$

Вариант 7

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 7 & -1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x+3y+4z=33,\\ 7x-5y=24,\\ 4x+11z=39.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x+y-3z=0,\\ x+2y-4z=0,\\ x-y+z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=-12\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p-q$, если $|p|=7$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/4$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$. Вычислить: а) площадь грани BCD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A.** Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(-9,5,7)$, $A(1,6,-3)$, $B(4,-3,5)$

Вариант 8

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 7 & -3\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ -4 & 2 & -9\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 4 & -3\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x+3y+4z=12,\\ 7x-5y+z=-33,\\ 4x+z=-7.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x-y+2z=0,\\ 4x+y+5z=0,\\ 2x+2y+3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=-2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$. Необходимо:
а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=3p+q$, если $|p|=1$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/6$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$. Вычислить: а) площадь грани ABD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B**.

$\vec{F}=(6,5,-7)$, $A(7,-6,4)$, $B(4,9,-6)$

Вариант 9

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-9 & 4 & 1\\ 5 & 2 & -4\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}9\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}0 & -2 & 1 & 7\\ 4 & -8 & 2 & -3\\ 10 & 1 & -5 & 4\\ -8 & 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x+4y-z=6,\\ 5y+4z=-20,\\ 3x-2y+5z=-22.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}4x+y+4z=0,\\ 3x-2y-z=0,\\ 7x-y+3z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=9\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-8\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $a=p+4q$, если $|p|=7$, $|q|=2$, $\left(\widehat{pq}\right)=\pi/3$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$. Вычислить: а) площадь грани BCD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B.**

$\vec{F}=(-5,4,4)$, $A(3,7,-5)$, $B(2,-4,1)$

Вариант 10

Задание 1. Найти P=(2A-3B)C

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 9\\ -2 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & 7\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix};$$

Задание 2 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}5 & -3 & 7 & -1\\ 3 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4 & -6\\ 3 & -2 & 9 & 4\end{vmatrix}$$

Задание 3

Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-2y+4z=21,\\ 3x+4y-2z=9,\\ 2x-y-z=10.\end{cases}$$

Задание 4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}3x-2y+z=0,\\ 2x+3y-5z=0,\\ 5x+y-4z=0.\end{cases}$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задание 6. Найти длину вектора $b=p-q$, если $|p|=10$, $|q|=1$, $\left(\hat{pq}\right)=\pi/2$.

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Задание 8. Сила $\vec{F}$ приложена к точке **A**. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку **B**; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки **B**.

$\vec{F}=(2,2,9)$, $A(4,2,-3)$, $B(2,4,0)$

Типовой расчет «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 1.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(3;4), B(2;-1), C(1,-7). Требуется:*
   - составить уравнение стороны *AB;*
   - найти длину стороны *AB*;
   - составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
   - вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
   - вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
   - составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
   - составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
   - найти площадь треугольника *ABC*.
   - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
   1) $x = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2}$.
   2) $y = 1 - 3\sqrt{x}$.
   3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 4 = 0$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-12,7,-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y + 5z - 16 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$, $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.
6. Построить тело ограниченное поверхностями

   А) $x = 4$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $z = 0$, $z = 2$.

   Б) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ВАРИАНТ 2.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-4;-5), B(3;3), C(5,-2). Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC*.
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = \frac{5}{4}\sqrt{16+y^2}$.

2) $y = -1+\sqrt{7x}$.

3) $25x^2+9y^2-50x+18y-191=0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(1,-6,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$.

4. Найти угол между плоскостями $x-3y+z-1=0$, $x+z-1=0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z=y^2$, $x=-1$, $x=2$, $z=4$.

Б) $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=6$.

ВАРИАНТ 3.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-3;5)*, *B(4;-3)*, *C(-2,-4)*. *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC*.
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = -\dfrac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$.

2) $16x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 484 = 0$.

3) $x = 2 - \sqrt{5y - 5}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-7,0,-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3,-1,1)$, $M_2(-9,1,-2)$, $M_3(3,-5,4)$.

4. Найти угол между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$, $2x - 4y - z + 9 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-8}{0}$, $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$.

Б) $x^2 + y^2 = 9$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 5$.

ВАРИАНТ 4.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(3;-2), B(-5;-4), C(-1,6)*. *Требуется:*
   - составить уравнение стороны *AB;*
   - найти длину стороны *AB*;
   - составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
   - вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
   - вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
   - составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
   - составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
   - найти площадь треугольника *ABC.*
   - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
   - $x = 1 + \frac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$.
   - $25x^2 - 64y^2 + 100x + 12y - 1564 = 0$.
   - $y = 1 - 4\sqrt{x+1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-2,4,21)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(2,1,-1)$.
4. Найти угол между плоскостями $3x - y + 2z + 15 = 0$, $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$, $4x + y - 6z - 5 = 0$.
6. Построить тело ограниченное поверхностями

   А) $x = y^2 - 4$, $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$.

   Б) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 5$.

ВАРИАНТ 5.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(2;5), B(-3;4), C(-4,-2)*. *Требуется:*
   - составить уравнение стороны *AB;*
   - найти длину стороны *AB*;
   - составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
   - вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
   - вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
   - составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
   - составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
   - найти площадь треугольника *ABC*.
   - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

   1) $y = 1 + \frac{5}{7}\sqrt{49 - x^2}$.

   2) $y = -3 + \sqrt{3x - 3}$.

   3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 36}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(2,-1,4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(1,-1,2)$, $M_3(0,1,-1)$.
4. Найти угол между плоскостями $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$, $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.
6. Построить тело ограниченное поверхностями

   А) $z = y^2$, $x = -1$, $x = 2$, $z = 4$.

   Б) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

ВАРИАНТ 6.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-3;2), B(-2;-5), C(6,-1)*. *Требуется:*
   - составить уравнение стороны *AB;*
   - найти длину стороны *AB*;
   - составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
   - вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
   - вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
   - составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
   - составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
   - найти площадь треугольника *ABC.*
   - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
   1) $y = -\frac{1}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
   2) $x = 2 + \sqrt{y - 4}$.
   3) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 36y - 56 = 0$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-5,-9,1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,0,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(2,-2,1)$.
4. Найти угол между плоскостями $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $2x + y\sqrt{2} - z + 36 = 0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$, $x + 7y + 3z + 11 = 0$.
6. Построить тело ограниченное поверхностями
   А) $z = 2x^2$, $z = 2$, $y = 1$, $y = 2$.
   Б) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $y + z = 4$

ВАРИАНТ 7.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-6;-4), B(3;-7), C(1,2). Требуется:*
   - составить уравнение стороны *AB;*
   - найти длину стороны *AB*;
   - составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
   - вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
   - вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
   - составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
   - составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
   - найти площадь треугольника *ABC*.
   - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
   - $4x^2-9y^2+24x+18y-9=0$.
   - $y=1-2\sqrt{x+4}$.
   - $y=-\sqrt{16+x^2}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(3,-2,-9)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,-3)$, $M_2(1,0,1)$, $M_3(-2,-1,6)$.
4. Найти угол между плоскостями $3y-z=0$, $2y-z=0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-8}{-5}=\dfrac{z+5}{12}$, $x-2y-3z+18=0$.
6. Построить тело ограниченное поверхностями

   А) $z=5-y^2$, $x=0$, $x=2$, $z=1$.

   Б) $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=6$

ВАРИАНТ 8.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A*(2;1), *B*(-7;3), *C*(-4,-3). *Требуется:*

- составить уравнение стороны *AB*;
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B*;
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC*.
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = 1 - 2\sqrt{5 - y^2 + 4y}$

2) $9x^2 - 25y^2 - 72x - 90 = 0$.

3) $x = 2 + \sqrt{y}$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-6,7,-10)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,10,-1)$, $M_2(-2,3,-5)$, $M_3(-6,7,-10)$.

4. Найти угол между плоскостями $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+4}{-1}$, $2x - 5y + 4z + 24 = 0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $z = 10 - x^2$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 1$.

Б) $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$

ВАРИАНТ 9.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(-3;-4), B(-6;7), C(-1,1)*. *Требуется:*
   - составить уравнение стороны *AB;*
   - найти длину стороны *AB*;
   - составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
   - вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
   - вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
   - составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
   - составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
   - найти площадь треугольника *ABC.*
   - Сделать чертеж.
2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
   - $x^2+y^2+8x-8y-23=0$.
   - $y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-36}$.
   - $y=2-\sqrt{x+1}$.
3. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3,5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,0,-1)$.
4. Найти угол между плоскостями $x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0$.
5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$, $3x+4y+7z-16=0$.
6. Построить тело ограниченное поверхностями

   А) $x+y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

   Б) $x^2+y^2=4$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$

ВАРИАНТ 10.

1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(4;-5), B(2;2), C(7,4)*. *Требуется:*
- составить уравнение стороны *AB;*
- найти длину стороны *AB*;
- составить уравнение высоты, проведенной из вершины *C*;
- вычислить длину высоты, проведенной из вершины *B;*
- вычислить угол *A* треугольника *ABC*;
- составить уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC* треугольника *ABC*;
- найти площадь треугольника *ABC*.
- Сделать чертеж.

2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.
- $y=-\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}+1$.
- $x=4-\sqrt{y+1}$.
- $9x^2-49y^2+36x-409=0$.

3. Найти расстояние от точки $M_0(-3,4,-5)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,1,2)$, $M_3(2,-1,5)$.

4. Найти угол между плоскостями $2x-y+5z+16=0$, $x+2y+3z+8=0$.

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$, $2x+3y+7z-52=0$.

6. Построить тело ограниченное поверхностями

А) $x-y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Б) $x^2+y^2=4$, $z^2=x^2+y^2$, $z=2$, $z=6$

Типовой расчет «Пределы»

Вариант 1

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(2x)}{x^2\cdot arctg(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{tg(x-5)}{\sqrt{x+4}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+8}{5n^2+3n-9}$

II Исследовать функцию на непрерывность $y=e^{\frac{1}{x+3}}$

Вариант 2

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n-4}-n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+5}\right)^{5n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x+6}{2^x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2(4x)}{x\cdot tg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{e^{x-4}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{8x}-1}{\ln(1+8x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+8}{5n^2+3n^3+19}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Вариант 3

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n+1}-2n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-2}\right)^{n+5}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\left[\ln(x+3)-x^2+5\right]$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-12x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2-4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot tg(5x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sin(x-4)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{e^{5x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n^4+8}{5n^2-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=2-\dfrac{1}{x}$

Вариант 4

I.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+3n^3-2n}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+5}\right)^{2n-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{2x^2-9}-2x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{2x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{2x-4}-1}{x^2-4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1-2x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5-2n^4+1}{n^2-3n^5-8}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$

Вариант 5

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-5n+5}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+3}\right)^{5-n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+2}{3x^2+5x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{5-\sqrt{x+23}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{arctg(2x-6)}{4-\sqrt{x+13}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{7^{3x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^3+2n^2+8n}{5n^2-3n^3-9}$

II. . Исследовать функцию на непрерывность $y=\frac{3}{1+2^{1/x}}$

Вариант 6

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-2n+4}-3n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n+4}\right)^{5n-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5x+1}{5x-7}\right)^{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{5x^2+2x-3}{4x^2-x-5}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin^2(4x)}{arctg^4(2x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{e^{3x-3}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^{4x}-1}{\ln(1+9x)}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+n^3+8}{3n^2+3n^4-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\frac{2}{x^2-4}$

Вариант 7

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4+2n-1}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+7}\right)^{3n^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3^{x-3}-1}{2^{x-2}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3-3x^2-2x}{x^2-5x+6}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-9}{1-\sqrt{4x-11}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^3(4x)}{x\cdot tg^2(3x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{2x+3}}{\sin(3x-9)}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{-6x}-1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^5+2n+8}{6n^3+3n^5-9n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=9^{\frac{1}{x+3}}$

Вариант 8

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n+10}-n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{4n+5}\right)^{6-2n}$
3. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{x^2+16}-x+1\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{x^2-9}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{15-5x}{3-\sqrt{4x-3}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(6x)}{arctg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7^{3x+3}-1}{6x^2+7x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+6n+2}{5n^2-3n^3-9n+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases} x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$

Вариант 9

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2-2n+7}-4n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-4}{6n+5}\right)^{-2n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\ln(2x+9)}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-5x-12}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2(5x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-8x-4}{arctg(8-4x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^{4x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n^2+6n^3+2}{3n^2+n^3-9n+1}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$

Вариант 10

I Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4-3n^2+11}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+2}{7n-4}\right)^{3n+2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+3}{x+4}\right)^{x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-5x-2}{-x^2+3x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+24}-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{2x+7}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{7x}-1}{\ln(1+10x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^6+2n^2+2}{n^6-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{2}{1+4^{\frac{1}{x-1}}}$

Вариант 11

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2-2n+5}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n-3}{8n+1}\right)^{5-4n}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x-1}{2x^2-4x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-5x-25}{x^2-25}$
5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4-\sqrt{6x-2}}{9-3x}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cdot\arcsin^2(3x)}{tg^5(3x)}$
7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sin(4x-4)}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-9x}-1}{\ln(1-6x)}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+9n+2}{3n^3+9n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}-(x+1), & x\le-1,\\ (x+1)^2, & -1<x\le0,\\ x, & x>0\end{cases}$

Вариант 12

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+4}-n^2\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+2}{9n-5}\right)^{3n+4}$
3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$
4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2-x-6}{3x^3+4x^2+x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^3+3x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(5x)}{arctg^3(4x)}$
7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{4x}-1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6n}{9n^2+3n^3-9n+4}$

II. . Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}2x^2, & x\le0,\\ 3, & 0<x\le1,\\ x+2, & x>1\end{cases}$

Вариант 13

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+4n+4}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n+51}{10n-64}\right)^{20n+4}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-6x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2+12x+18}$
5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{3x+10}-1}{2x+6}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x\cdot arctg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(3x-6)}{2-\sqrt{x+2}}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2^{-10x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6}{4n^3+4n+5}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=8^{\frac{1}{5-x}}$

Вариант 14

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2-6}-n^2\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{11n-2}{11n+3}\right)^{4-5n}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(x^2+3)-\ln(3x^2+1)\right]$ 4. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{2x^2-11x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+6}{7-\sqrt{19-10x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^4(2x)}{tg^4(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{e^{x^2-25}-1}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-8x}-1}{\ln(1-16x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-2n^4+6n^2}{9n^6-3n^5-n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$

Вариант 15

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-3n+2}-n^2\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+5}\right)^{5n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{3x^2-3}\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4x^2+3x+27}{2x^2-5x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg^2(7x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-\sqrt{4x+21}}{tg(5x+15)}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{20x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+2n^3+n}{7n^5+3n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=\dfrac{x^2}{x-2}$

Вариант 1

1. Вычислить пределы по о правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin(3x)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln\left(x^2-15\right)}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+3\sqrt{x}$ 2. $y=\dfrac{2\arcsin x+3^x}{4\ln x-2x^2}$

3. $y=\ln\sin(2x+5)$ 4. $y=x^{\ln x}$

5. $y=\left(e^x-3\cos x\right)\left(5-4\log_2 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(1+2t), \\ y=t^2-2t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}.$$

5. Найти производную от неявной функции $\ln(x+y)-arctgx=0$.

Вариант 2

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{tg(2x)}{\sin x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{x-1}-1}{\ln(2x-1)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt[3]{x^2}-4x^5+\dfrac{2}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{4\arccos x-e^x}{3\log_2 x+5x^5}$

3. $y=\dfrac{1}{2}\sin^4(\cos x)$ 4. $y=x^{\arcsin x}$

5. $y=\left(2^x+4\sin x\right)\left(3\ln x-2\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg2t, \\ y=t^2+2t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

5. Найти производную от неявной функции $\cos(xy)=\dfrac{y}{x}$.

Вариант 3

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}-1}{\ln(2x+9)-\ln 3}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^4 + \sqrt[5]{x^2} - \dfrac{4}{x^2}$
2. $y = \dfrac{2\ln x - 8x^4}{4^x - 2arcctgx}$
3. $y = \arccos(ctg4x)$
4. $y = x^{\sqrt{x+3}}$
5. $y = (5tgx - e^x)(4\log_2 x + 3)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln(1-4t), \\ y = 2t^2 + 4t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arctg(x+y) = x$.

Вариант 4

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{tg(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$.
2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\ln(x^2 - 3)}{4^{x+2} - 1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 7\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^5} - 3x^3$
2. $y = \dfrac{e^x + 6\arcsin x}{5x^2 - 2\log_4 x}$
3. $y = arctge^{2x}$
4. $y = (tgx)^{x^2}$
5. $y = (8ctgx + 3^x)(2\ln x - 5)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = arctg3t, \\ y = 3t^2 - 12t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

5. . Найти производную y' от неявной функции $y\sin x + \cos(x - y) = 0$.

Вариант 5

1 Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{x^2 - 4\pi^2}{tg(x)}$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(9 - 4x)}{e^{3x-6} - 1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^4}$
2. $y = \dfrac{7^x - 3\arccos x}{4x^3 + 3\ln x}$
3. $y = \ln(\arcsin 3x)$
4. $y = (\sin x)^{\cos x}$
5. $y = (e^x - 4tgx)(3 + 7\log_3 x)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln(1+6t), \\ y = 3t^2 - 12t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $y \sin x + \cos y = 0$.

Вариант 6

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin(3x + \pi/4)}{\pi/4 - x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5^{2x-3} - 5^5}{e^{x-4} - 1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^3}$
2. $y = \dfrac{7x^2 + 4\log_3 x}{2e^x - 5arcctgx}$
3. $y = e^{tg(3x-2)}$
4. $y = (\arcsin x)^{x^2+1}$
5. $y = \left(5^x + 2\cos x\right)\left(10 - 3\ln x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = arctg\, 4t, \\ y = t^4 + 4t^3. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arcctg(x + y) - x - 2y = 0$.

Вариант 7

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{\sin(2\pi x)}$.
2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3^{5x+10} - 1}{\ln(4x + 9)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^5 - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}$
2. $y = \dfrac{3arctgx - 5^x}{4\ln x - 5x^6}$
3. $y = \ln\left(e^{2x} + 3\right)$
4. $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$
5. $y = \left(e^x + 6ctgx\right)\left(9 + 7\log_6 x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln(1 - 5t), \\ y = t^5 - 10t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $e^{x+y} = \sin xy$.

Вариант 8

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to 2} (2 - x)\, tg \dfrac{\pi x}{4}$.
2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3^{x-4} - 1}{\ln(33 - 2x^2)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt[3]{x^7}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$ 2. $y=\dfrac{2\arccos x+e^x}{3\log_2 x-7x^3}$

3. $y=3^{-\arcsin(6x)}$ 4. $y=\left(x^3-1\right)^x$

5. $y=\left(7^x-4\sin x\right)\left(4+3\ln x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg\,5t, \\ y=5t^2-20t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $arcctg\left(2x-3y\right)=5^y$.

Вариант 9

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg\left(2\pi x\right)}{2x^2-6x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(4x-6\right)-\ln 2}{2^{3x-6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{2}{x^3}$ 2. $y=\dfrac{5\ln x+3x^4}{6\arcsin x-2^x}$

3. $y=\left(1+\sin 2x\right)^{10}$ 4. $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}$

5. $y=\left(4\log_5 x-e^x\right)\left(6-5tgx\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln\left(2+3t\right), \\ y=t^6-3t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $\cos\left(x-y\right)-2x+4y=0$.

Вариант 10

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\left(x/2\right)}{\pi-x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{3^{x-1}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^6-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{7}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{4\log_4 x-6x^3}$

3. $y=2^{\arcsin 3x}$ 4. $y=\left(\ln x\right)^x$

5. $y=\left(10\ln x+6^x\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg\,6t, \\ y=3t^4+2t^3. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $e^{xy}=\ln x+arcctgy$.

Вариант 11

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\frac{x^2-9\pi^2}{\sin(x/3)}$.   2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{e^{x-3}-e^2}{4^{10-2x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2\sqrt{x^3}+3x^2-\frac{2}{x^5}$ 2. $y=\frac{6^x-3arctgx}{5x^2-9\ln x}$

3. $y=(1+\cos 3x)^6$ 4. $y=(\arccos x)^{x^2}$

5. $y=(e^x-7\log_3 x)(\sqrt{2}-3tgx)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(5-4t), \\ y=t^8+2t^4. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $\cos y=\sin x+2y$.

Вариант 12

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to \pi/8}\frac{\pi/4-2x}{\sin(2x+3\pi/4)}$.   2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\ln(3x-14)}{4^{2x-10}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^5-\sqrt[5]{x^2}+\frac{6}{x^2}$ 2. $y=\frac{8x^4-7\log_8 x}{e^x+2\arcsin x}$

3. $y=\ln tg(4x-1)$ 4. $y=(\sin x)^{x^2}$

5. $y=(4^x+6\ln x)(8+3\cos x)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arctg7t, \\ y=7t^4-21t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $xy+\ln y-2\ln x=0$.

Вариант 13

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\frac{\pi x}{6}$.   2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{7^{2x-3}-7^3}{e^{6-2x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 4\sqrt{x}$ 2. $y = \dfrac{9^x - 3\arccos x}{5x^3 + 8\ln x}$

3. $y = \sin\left(e^{4x+3}\right)$ 4. $y = \left(x^2+2\right)^{3x}$

5. $y = \left(e^x - 5\log_8 x\right)\left(6ctgx - 1\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln(8-7t), \\ y = t^7 - 7t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{-8x}{x^2+4}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $tgy = xy^2 + e^x$.

Вариант 14

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{1+\cos(x/2)}{(x-2\pi)^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(13-3x^2\right)}{3^{x-2}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} + 5x^4$ 2. $y = \dfrac{5\arccos x - e^x}{2\log_4 x - 6x^2}$

3. $y = \arcsin\left(\ln(2x)\right)$ 4. $y = x^{arctg}$

5. $y = \left(2^x + 3\ln x\right)\left(4\cos x + 11\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = arcctg7t, \\ y = t^7 - 7t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $x\ln y = 3x^3 + y^2$.

Вариант 15

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{tg\pi x}{\sin(x-2)}$. 2. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{e^{3x+12}-1}{\ln(3x+13)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - 7x^3$ 2. $y = \dfrac{4\ln x - 3x^6}{7arcctgx + 8^x}$

3. $y = \ln(1 + arctg2x)$ 4. $y = (\cos x)^{tgx}$

5. $y = \left(e^x - 5\log_4 x\right)\left(9\sin x - 12\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln(4+3t), \\ y = 6t^3 - 15t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

5. Найти производную y' от неявной функции $e^{xy}-(x+3y)=0$.

Типовой расчет «Неопределенные интегралы»

Вариант №1

1) $\int x\sqrt{5-x^2}\,dx$ 2) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$ 3) $\int x^3e^{x^4}dx$

4) $\int (3x-2)\cos 2x\,dx$ 5) $\int \dfrac{x^3-8x-14}{(x+2)(x-4)}dx$ 6) $\int \dfrac{3x^2-x^5e^x-14}{x^3}dx$

7) $\int \dfrac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$ 8) $\int \dfrac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$ 9) $\int \dfrac{dx}{3+2\cos x}$

10) $\int \sqrt{256+x^2}\,dx.$

Вариант №2

1) $\int \sin^3 x\cos x dx$ 2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ 3) $\int 3x\sqrt{5-x^3}\,dx$

4) $\int (5-4x)\sin 3x\,dx$ 5) $\int \dfrac{5x^2+11x+2}{x(x+1)^2}dx$ 6) $\int \dfrac{(x+1)^2}{x^3}dx$

7) $\int x\sqrt{15-x^2}\,dx$ 8) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{3+4x}}$ 9) $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$

10) $\int \sqrt{256-x^2}\,dx.$

Вариант №3

1) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$ 2) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ 3) $\int \dfrac{(arcctgx)^4}{1+x^2}dx$

4) $\int (2x+1)e^{2x}dx$ 5) $\int \dfrac{x^3+2x^2-18x+17}{(x-3)(x+5)}dx$ 6) $\int \dfrac{x^2-x^4\sin x+2x}{x^5}dx$

7) $\int \dfrac{x^2}{x^6+4}dx$ 8) $\int \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$ 9) $\int \dfrac{dx}{1+\cos x+\sin x}$

10) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Вариант №4

1) $\int \dfrac{x^2}{x^3+8}dx$ 2) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$ 3) $\int e^{\cos x}\sin x dx$

4) $\int (4-5x)3^x dx$ 5) $\int \dfrac{x^3+9x^2+11x-20}{x^2(x+5)}dx$ 6) $\int (x-1)(x^2+x+1)dx$

7) $\int e^{2\sin x}\cos x dx$

8) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$

9) $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x+3\sin^2 x}$

10) $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

Вариант №5

1) $\int e^{\sin x}\cos x dx$

2) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

3) $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$

4) $\int \left(x^3-4x+1\right)\ln x dx$

5) $\int \frac{3x^2-5x+8}{(x-1)\left(x^2+1\right)}dx$

6) $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^5}dx$

7) $\int \frac{x^2}{x^3+3}dx$

8) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$

9) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^5 x}$

10) $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

Вариант №6

1) $\int \frac{(arctgx)^3}{1+x^2}dx$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

3) $\int \frac{(2x-2)}{\sqrt{x^2-2x+1}}dx$

4) $\int 4x\, arctgx\, dx$

5) $\int \frac{-3x^2+4x-4}{(x+4)\left(x^2+1\right)}dx$

6) $\int \frac{(2x\ +3)^2}{x}dx$

7) $\int \frac{(6x-2)}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$

8) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

9) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

Вариант №7

1) $\int \frac{(10x-2)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

4) $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\, dx$

5) $\int \frac{5x^2-29}{(x+2)(x-1)(x+3)}dx$

6) $\int \frac{e^x x^5-4x^5\sin x+2x^4}{x^5}dx$

7) $\int e^{-x^4}\cdot 4x^3 dx$

8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$

9) $\int \frac{dx}{5+5\cos x+\sin x}$

10) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

Вариант №8

1) $\int e^{-x^4}\cdot x^3 dx$

2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

3) $\int \cos^3 x\sin x dx$

4) $\int 6x\arcsin x\, dx$

5) $\int \frac{x^3+x^2+3x+7}{(x-1)(x+2)}dx$

6) $\int \frac{12x^3-x^2\sin x+2x}{x^2}dx$

7) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$

8) $\int x\sqrt{3+x}dx$

9) $\int \frac{dx}{2+4\cos x+3\sin x}$

10) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Вариант №9

1) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

2) $\int x\sqrt{1+x}dx$

3) $\int \frac{x}{\left(3+x^3\right)^2}dx$

4) $\int (3-5x)\cos 3x\,dx$

5) $\int \frac{2x^2-5x+2}{(x-3)(x+2)}dx$

6) $\int \frac{(4x+3)^2}{x^3}dx$

7) $\int \frac{x}{\left(3+x^2\right)^5}dx$

8) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

9) $\int \frac{dx}{1+3\cos x+2\sin x}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Вариант №10

1) $\int \frac{x}{\left(2+x^2\right)^2}dx$

2) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

3) $\int 3^{-x^4}\cdot x^3dx$

4) $\int (6x+2)\sin 6x\,dx$

5) $\int \frac{-x^2+6x-3}{(x+3)\left(x^2+1\right)}dx$

6) $\int \left(\frac{x+3}{x^3}\right)^2 dx$

7) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$

8) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+3}dx$

9) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$

10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Вариант №11

1) $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$

3) $\int 5^{-x^3}\cdot x^2dx$

4) $\int (3-2x)e^{2x}dx$

5) $\int \frac{4x^2-9x-4}{(x-2)(x+1)}dx$

6) $\int \frac{4x^3-5x^2e^x+2x^4}{x^2}dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx$

8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$

9) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x+2\sin^2 x}$

10) $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

Вариант №12

1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$

3) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$

4) $\int \left(x^5-4x^3+3\right)\ln x\,dx$

5) $\int \frac{3x^3+12x-4}{x\left(x^2+4\right)}dx$

6) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$

7) $\int \left(e^x+5\right)^3 e^xdx$

8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$

9) $\int \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$

10) $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx.$

Вариант №13

1) $\int\left(e^x+4\right)^3 e^x dx$

2) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

3) $\int\frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}dx$

4) $\int(3x+18)2^x dx$

5) $\int\frac{-13x-32}{(x+2)(x-1)(x+4)}dx$

6) $\int\frac{(x+1)^3}{x^2}dx$

7) $\int\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

8) $\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

9) $\int\frac{dx}{5+5\cos^2 x+\sin^2 x}$

10) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}dx.$

Вариант №14

1) $\int\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

2) $\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

3) $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\int(7x-3)5^x dx$

5) $\int\frac{2x^2+3x-19}{(x-3)(x+5)}dx$

6) $\int\frac{x^3+5x^2e^x+x}{x^2}dx$

7) $\int\frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

8) $\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{2x+1}}dx$

9) $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$

10) $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx.$

Вариант №15

1) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2) $\int\frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$

3) $\int\frac{x^2}{x^6+4}dx$

4) $\int 3x\arccos x\,dx$

5) $\int\frac{-6x^2-11x+8}{x(x+2)(x-1)}dx$

6) $\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$

7) $\int\cos^8 x\sin x dx$

8) $\int\frac{1}{6+\sqrt{x}}dx$

9) $\int\frac{dx}{2-\cos x}$

10) $\int\sqrt{16-x^2}\,dx.$

Типовой расчет «Определенные интегралы и их приложения»

Вычислить следующие определенные интегралы:

Задание 1

1. $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

2. $\int\limits_0^{\sqrt[12]{8}}\frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}dx.$

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$.

4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.

6. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{4x}{x^2+1}dx$.

7. $\int\limits_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{3x+25}}dx$.

8. $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}dx$.

9. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

10. $\int\limits_2^{10} \sqrt{2x+5}dx$.

Задание 2

1. $\int\limits_2^3 y\ln(y-1)dy$.

2. $\int\limits_{-2}^{0} xe^{-x/2}dx$.

3. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

4. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$.

5. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$.

6. $\int\limits_1^2 (y-1)\ln y dy$.

7. $\int\limits_{-1/2}^{0} xe^{-2x}dx$.

8. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} xe^{-3x}dx$.

9. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

10. $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$.

Задание 3

1. $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}dx.$

2. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

3. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$

4. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$

5. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

6. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

7. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

8. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

9. $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$

10. $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

Задание 4.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x^2$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $y=-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1+\frac{3}{4}x^2$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3-2x-x^2$, $y=0$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $y=1-x^2$ $x=0$, $x=1$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ $y=0$.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2(x-1)$, $x=3$.
10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ ($x\ge 0$).

Задание № 5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=5\sin^3 t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

Задание № 6. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1. $r = 4\cos\phi, r = 2 (r \geq 2)$.
2. $r = \cos 2\phi$.
3. $r^2 = 4\cos 2\phi$, $r = 2$.
4. $r = 4\sin 3\phi, r = 2 (r \geq 2)$.
5. $r = 1 + \cos\phi, r = \cos\phi$.
6. $r = \sin 3\phi$.
7. $r = 6\sin 3\phi, r = 3 (r \geq 3)$.
8. $r = \cos 3\phi$.
9. $r = 6\cos 3\phi, r = 3 (r \geq 3)$.
10. $r = 2(1 + \cos\phi), r = 2 (r \geq 2)$.

Задание № 7. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

1. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$.
2. $y = 1 - \ln\cos x, 0 \leq x \leq \pi/6$.
3. $y = 2 - e^x, \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}$.
4. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$.
5. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}$.
6. $y = e^x + e, \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$.
7. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$.
8. $y = 1 - \ln\sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2$.
9. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}$.
10. $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4$.

Задание № 8. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

2. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

3. $\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$

4. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

5. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ x = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/2 \le t \le \pi.$

6. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

7. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

8. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/2.$

9. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

10. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/6.$

Задание № 9

Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

1. $\rho = 6e^{12\phi/5}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

2. $\rho = 1 - \sin\phi, \quad -\pi/2 \le \phi \le -\pi/6.$

3. $\rho = 5e^{5\phi/12}, \quad 0 \le \phi \le \pi/3.$

4. $\rho = 4(1 - \sin\phi), \quad 0 \le \phi \le \pi/6.$

5. $\rho = 2(1 - \cos\phi), \quad -\pi \le \phi \le -\pi/2.$

6. $\rho = 3e^{3\phi/4}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. $\rho = 2\cos\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/6.$

8. $\rho = 5(1 - \cos\phi), \quad -\pi/3 \le \phi \le 0.$

9. $\rho = 5e^{5\phi/12}, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

10. $\rho = 8(1 - \cos\phi), \quad -2\pi/3 \le \phi \le 0.$

Задание № 10. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1-5 ось вращения Ox, в вариантах 6-10 ось вращения Oy.

1. $y = 3\sin x,\ y = \sin x,\quad 0 \le x \le \pi.$

2. $y = xe^x,\ y = 0,\ x = 1.$

3. $y = x^2,\ y^2 - x = 0.$

4. $y = -1 - x^2,\ x = 0.$

5. $y = -2x - x^2,\ y = -x + 2,\ x = 0.$

6. $y = x^3,\ y = \sqrt{x}.$

7. $y = x^2,\ y = 1,\ x = 2.$

8. $y = e^{1-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1.$

9. $x = \sqrt[3]{y-2},\ x = 1,\ y = 1.$

10. $y = 5\cos x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ x \le 0.$

Приложение №4

Образцы контрольных работ

Контрольная работа 1

ВАРИАНТ № 1

1. Вычислить $(AB)C+2A(BC)$, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases}7x-5y-2z=1\\ x+2y-z=-6\\ 5x-10y+z=16\end{cases}$

3. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases}7x-5y-2z=1\\ x+2y-z=-6\\ 6x-7y-z=7\end{cases}$

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$

ВАРИАНТ № 2

1. Вычислить $(AB)C-5A(BC)$, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^T$; $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}$.

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 3 & -5 & -4\end{pmatrix}$.

3. Решить систему уравнений матричным способом: $\begin{cases}3x-y+z=2\\ -4x+3y+2z=-1\\ 5x-2y-4z=8\end{cases}$

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$

ВАРИАНТ № 3

1. Вычислить $(AB)^T$-$2B^TA^T$, где $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}^T$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

2. Вычилить определитель: $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y-2z=-1\\ -2x+y+5z=-5\\ -5x-y+7z=-12\end{cases}$$

4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 3 & -5 & -4\end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ № 4

1. Вычислить определитель матрицы $(2A^2\text{-}A)^{-1}$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

2. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases} x-2y+2z-t-s=-1\\ x-2y+2z-3t+2s=0\end{cases}$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases} 7x+7y+z=5\\ 3x-2y+2z=4\\ x+5y-z=-1\end{cases}$

4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ № 5

1. Вычислить определитель матрицы $(A^2\text{-}B^2)^{-1}$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases} 2x-3y+2z-t=0 \\ 2x-3y-z+2t=0 \end{cases}$

3. Решить систему уравнений по правилу Крамера: $\begin{cases} 5x-y-z=1 \\ -3x+5y+2z=20 \\ 7x-5y-2z=-16 \end{cases}$

4. Решить систему уравнений матричным способом: $\begin{cases} 5x-y-z=1 \\ -3x+5y+2z=20 \\ 2x+4y+z=21 \end{cases}$

ВАРИАНТ № 6

1. Вычислить ранг матрицы $AB^2\text{-}5A$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти определитель матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Решить систему уравнений матричным способом: $\begin{cases} 7x-y+5z=15 \\ -2x+y-z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$
4. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases} -x-5y+2z-t=0 \\ -x-5y-z+2t=0 \end{cases}$

ВАРИАНТ № 7

1. Вычислить ранг матрицы $(B^2-A^2)^{-1}$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, B=2A.

2. Вычилить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} -4x-y+2z=-9 \\ x+5y+7z=-10 \\ 5x+y-3z=12 \end{cases}$

4. Решить систему уравнений по правилу Крамера: $\begin{cases} -4x-y+2z=-9 \\ x+5y+7z=-8 \\ -x+2y-z=3 \end{cases}$

ВАРИАНТ № 8

1. Вычислить $\det\left(\left((AB)^2\right)^{-1}\right)$, где $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} -x+5y-z=3 \\ 2x+2y+z=5 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases}$

3. Решить систему уравнений матричным методом: $\begin{cases} 5x+y-2z=15 \\ 4x-2y-3z=5 \\ 3x+5y+2z=19 \end{cases}$

4. Вычилить определитель: $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

ВАРИАНТ № 9

1. Вычислить ранг матрицы: $(2(AB)C\text{-}A(BC))^2$, где $A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(3\ \ -4\ \ 1)^T$, $C=(0\ \ -8)$.

2. Вычилить определитель: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему уравнений матричным методом: $\begin{cases} -5x+5y-z=-3 \\ 3x-4y+7z=22 \\ -x+2y-z=-4 \end{cases}$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 7x-5y-2z=1 \\ x+2y-z=-6 \\ 6x-7y-z=7 \end{cases}$.

ВАРИАНТ № 10

1. Вычислить ранг матрицы $2(AB)^T\text{-}B^TA^T$, где $A^T=B=(-4\ \ -2\ \ -5\ \ 0)$.

2. Вычилить определитель: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему уравнений матричным способом: $\begin{cases} 3x-5y-z=4 \\ -2x+2y+z=1 \\ -5x-y+2z=5 \end{cases}$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x-y-2z=-1 \\ -2x+y+5z=-5 \\ -5x-y+7z=-12 \end{cases}$$

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, точка K – середина стороны BC. Выразить вектор $\overline{AK}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D.
3. Найти координаты вектора $\bar{a} \times (2\bar{a} + \bar{b})$, если $\bar{a} = (3;-1;-2)$, $\bar{b} = (1;2;-1)$.
4. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.
5. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x + 3y - 5z - 15 = 0$ и координатными плоскостями.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC: K – точка пересечения медиан треугольника, $\overline{AK} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
2. Даны векторы $\bar{a} = (2;3)$, $\bar{b}(1;-3)$, $\bar{c}(-1;3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{c}$ коллинеарны?
3. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Найти: $\bar{c} = (\bar{a} - \bar{b}) \times (2\bar{b})$; $|\bar{c}|$.
4. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.
5. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $20x - 5y + 4z - 210 = 0$ и угол, образованный этим перпендикуляром с осью Oz.

Вариант 3

1. В параллелограмме $ABCD$: E и F – середины сторон BC и CD, $\overline{AE}=\overline{a}$, $\overline{AF}=\overline{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
2. Даны вершины треугольника $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.
3. Дано: $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{2}{3}\pi$. Найти: $|\bar{a}\times\bar{b}|$; $|(\bar{a}+2\bar{b})\times(-\bar{a}+3\bar{b})|$.
4. Привести к каноническому виду. Сделать чертеж.

   $3x^2-y^2+12x-4y-4=0$.
5. Построить плоскости, заданные уравнениями:
   1) $2y-5=0$;
   2) $x+z-1=0$; 3) $3x+4y+6z-12=0$.

Вариант 4

1. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол 60°, а с осью Oz угол 45°; его длина $|\overline{r}|=8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.
2. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}|=3$ и углы между вектором и координатными осями равны: $\alpha=\beta=\gamma$.
3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$.
4. Привести к каноническому виду. Сделать чертеж.

   $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через:
   1) точку $M(-2;3;1)$ параллельно плоскости Oxy;
   2) точку M и ось Oy.
   Построить эти плоскости.

Вариант 5

1. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$. K – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$ и $\overline{KD}$.
2. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x - 5y + 10 = 0$.
3. Упростить выражение $2\bar{i}(\bar{j} \times \bar{k}) + 3\bar{j}(\bar{i} \times \bar{k}) + 4\bar{k}(\bar{i} \times \bar{j})$.
4. Найти координаты центра и радиус окружности:
$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$$
5. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки $(-3; 5; 4)$, $(2; 4; 6)$, $(2; 14; 6)$.

Вариант 6

1. В треугольнике ABC: $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы, совпадающие с медианами треугольника.
2. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5; 3; 4)$, $B(-1; -7; 5)$, $C(6; -5; -3)$ и $D(2; 5; -4)$ есть квадрат.
3. Упростить выражение $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{b} + (\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a}$;
4. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $(4; -2)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через:
1) точку $A(5; -4; 6)$ перпендикулярно оси Ox;
2) точку A и отсекающей равные отрезки на положительных координатных полуосях.
Построить эти плоскости.

Вариант 7

1. В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\overline{AC}=\overline{a}$, $\overline{BD}=\overline{b}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба.

2. На оси Oy найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

3. Упростить выражение $(3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k})\times(2\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k})$.

4. Показать, что уравнение $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра и эксцентриситет.

5. Найти расстояние от начала координат до плоскости, которая пересекает оси Ox, Oy, Oz в точках с координатами $a=-6$, $b=3$, $c=3$.

Вариант 8

1. Сторона BC треугольника ABC разделена на пять равных частей и все точки деления D_1, D_2, D_3, D_4 соединены с противолежащей вершиной A. Обозначены: $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{D_1A}$, $\overline{D_2A}$, $\overline{D_3A}$ и $\overline{D_4A}$.

2. Луч образует с двумя осями координат углы в $60°$. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

3. Дано: $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=20$, $\bar{a}\bar{b}=30$. Найти $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

4. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;-4\sqrt{3})$ и $M_2(-1;2\sqrt{15})$.

5. Привести к каноническому виду уравнение прямой
$$\begin{cases} x-y+2z+1=0,\\ x+y-z-1=0.\end{cases}$$

Вариант 9

1. В равнобочной трапеции $ABCD$ известно нижнее основание $\overline{AB} = \overline{a}$, боковая сторона $\overline{AD} = \overline{b}$ и угол между ними $\angle A = \pi / 3$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.
2. Разложить вектор $\bar{c} = (9; 4)$ по векторам $\bar{a} = (1; 2)$ и $\bar{b} = (2; -3)$.
3. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$, $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$. Найти $\bar{a}\bar{b}$.
4. Построить линию: $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$;
5. Найти направляющий вектор прямой $\begin{cases} x = 2, \\ z = 4. \end{cases}$

Вариант 10

1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ даны: $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AE} = \overline{b}$. Разложить по этим двум векторам $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ и $\overline{EF}$.
2. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Коллинеарны ли векторы $\bar{c} = \bar{a} - 2\sqrt{3} \cdot \bar{b}$ и $\bar{d} = -\sqrt{3} \cdot \bar{a} + 6 \cdot \bar{b}$?
3. Найти единичный вектор $\bar{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\bar{a} = (3; -1; 2)$ и $\bar{b} = (-1; 3; -1)$.
4. Привести к каноническому виду. Сделать чертеж.

   $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$.
5. Привести к каноническому виду прямую $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

Контрольная работа 3

Вариант 1

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+9}{5n^3-7n+5}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+5}\right)^{-n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^2+x-14}$

5. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{6-\sqrt{x^2+20}}{3x+12}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(8x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{arctg(15-5x)}{2x^2+3x-27}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+15x)}{e^{-3x}-1}$

Вариант 2

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3+7n^2+6}{3n^3-5n+4}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n-3}{7n+1}\right)^{2-6n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\ln\left(3x^2-6\right)-\ln\left(x^2+2\right)\right]$

4. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+5x-12}{2x^2+16x+32}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16-3x}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin^2(3x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{8^{2x+2}-1}{\sqrt{x^2+15}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{7x}-1}{\ln(1+21x)}$

Вариант 3

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-12}{3n^2+6n-4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n+5}\right)^{3n}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x-10}$

4. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{3x^2+10x-25}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{\sqrt{5x+11}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^4(2x)}{x\cdot\arcsin^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+7x-6}{e^{2x+6}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-16x)}{6^{8x}-1}$

Вариант 4

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3+2n^2-n+2}{7n^3+3n^2-7n+8}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+1}\right)^{n-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(2x-7)}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{3x^2-5x-8}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-5}{6-\sqrt{39-3x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(3x)}{tg^4(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{\arcsin(2x-6)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-18x)}{e^{9x}-1}$

Вариант 5

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4+3n^3-6n}{n^5+n^3-9n+8}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+6}\right)^{4n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-13x+6}{-x^2+4x+12}$

5. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{4x-20}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(3x)}{x\cdot\sin(9x)}$

7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{4^{20-4x}-1}{x^2-25}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{14x}-1}{\ln(1+21x)}$

Вариант 6

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5-2n^3+6n^2}{9n^5+3n^4-9n+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{10n+5}$

3. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{4x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x^2-3x-26}{x^3+4x^2+4x}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x^2+25}-5}{-x^3+4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(4x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{arctg(2x-12)}{3-\sqrt{x+3}}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{4^{-10x}-1}$

Вариант 7

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2-11}{n^3-9n+14}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+4}{6n+5}\right)^{-3n}$

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-5x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+3x-27}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x-8}{\sqrt{17-4x}-3}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^4(2x)}{x^2\cdot tg^2(6x)}$

7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{e^{12-3x}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{6x}-1}{\ln(1-24x)}$

Вариант 8

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-5n^2+6}{n^2+2n^3-9n+14}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-11}{2n+15}\right)^{-4n}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5^x-4}{x^2-3x+9}$

4. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-20x+50}{-x^2+3x+10}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{7x-3}}{1-x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot arctg^2(6x)}{tg^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6-\sqrt{5x+31}}{\sin(x^2-1)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-5x}-1}{\ln(1+25x)}$

Вариант 9

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^7-2n^5+6n}{9n^7+3n^3-4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{5n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+7}{\ln(3x^2-2)}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-4x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{15-3x}{3-\sqrt{4x-11}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3(4x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{12^{5x+5}-1}{3x^2+5x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-17x)}{e^{-5x}-1}$

Вариант 10

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-2n^2+6n-5}{n^4+13n^3-9n+14}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+10}{n-2}\right)^{-n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-3x+1)}{e^{2x+3}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{7x^2+8x-12}{3x^2-4x-20}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2-7x}-3}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^4(x)}{1-\cos(8x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{\sqrt{x^2+12}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{11^{4x}-1}$

СЕМЕСТР 2

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{8^{x+6}-8^3}{e^{2x+6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{8}{x^3}-4\sqrt{x^5}+2x^7$ 2. $y=\dfrac{3\arcsin x-e^x}{5\log_3 x+6x^2}$

3. $y=\ln\cos(2x+5)$ 4. $y=\left(x^3+1\right)^{tgx}$

5. $y=\left(6\ln x-5^x\right)(15+7\sin x)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arcctg6t, \\ y=2t^3-9t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y=x^3-9x^2+15x-3$

Вариант 2

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{\ln\left(4x^2-3\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=5x^2-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{2}{x^6}$ 2. $y=\dfrac{2arctgx+4^x}{3\ln x-4x^5}$

3. $y=\arccos\left(\log_4 7x\right)$ 4. $y=\left(tgx\right)^{\sin x}$

5. $y=\left(3\log_6 x+e^x\right)(21-2\cos x)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln\left(2-5t\right), \\ y=t^5+5t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции:
$y=4x^3+4x^2+x-16$

Вариант 3

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{3^{2x+3}-3}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\dfrac{5}{x^4}$ 2. $y=\dfrac{7x^4-5\log_8 x}{e^x-3\arcsin x}$

3. $y=arctg\left(\cos 3x\right)$ 4. $y=(\cos x)^{tgx}$

5. $y=\left(4\ln x-6^x\right)(1+5ctgx)$

3 Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg5t, \\ y=3t^5+5t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности экстремум функции: $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$

Вариант 4

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{5-5x}-1}{\ln(5x-4)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt{x^5}+\dfrac{4}{x^3}-3x^3$
2. $y=\dfrac{5^x-3arctgx}{4x^3+2\ln x}$
3. $y=e^{\sin(6x-5)}$
4. $y=\left(x^4+1\right)^{\sqrt{x}}$
5. $y=\left(2\log_3 x-6\cos x\right)\left(9+e^x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(3+4t), \\ y=2t^4-6t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции: $y=3x-x^3$

Вариант 5

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{3x-9}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=9x^3-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$
2. $y=\dfrac{e^x+2\arcsin x}{5x^2-4\log_7 x}$
3. $y=\sin(arctg2x)$
4. $y=(2x+1)^{e^x}$
5. $y=(5\ln x+8tgx)\left(5^x-8\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=arcctg4t, \\ y=3t^4-8t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y=2x^3-12x^2+18x$

Вариант 6

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln\left(2x^2-31\right)}{e^{x-4}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=3\sqrt{x}+\dfrac{4}{x^3}-7x$
2. $y=\dfrac{4x^5+7\ln x}{8^x-5arctgx}$
3. $y=e^{-\arccos(2x)}$
4. $y=(\sin x)^{x^2-3}$
5. $y=\left(4ctgx-7\log_2 x\right)\left(e^x+\sqrt{5}\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(6-5t), \\ y=5t^3-10t. \end{cases}$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутостии точки перегиба функции: $y=x^3-5x^2+3x-5$

Вариант 7

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-4)-\ln 2}{e^{5x-15}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\sqrt{x^3}-\dfrac{4}{x^5}-5x^3$ 2. $y=\dfrac{e^x+3\arccos x}{2x^7-5\log_6 x}$

3. $y=(2-tg5x)^{10}$ 4. $y=(arctgx)^{x^2}$

5. $y=(3\sin x+4\ln x)\left(2^x-\sqrt{7}\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg3t, \\ y=2t^6+3t^2. \end{cases}$

6. Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y=x^4-2x^2-5$

Вариант 8

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x-3}-1}{\ln(28-3x^2)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=7x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{8}{x^3}$ 2. $y=\dfrac{2\arcsin x-6^x}{3\ln x-5x^4}$

3. $y=\cos(\log_3 6x)$ 4. $y=(arctgx)^{\ln x}$

5. $y=(2ctgx-3\log_6 x)(e^x+1)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=\ln(7+4t), \\ y=6t^2+12t. \end{cases}$

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба функции: $y=2x^3+3x^2-12x+1$

Вариант 9

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3^{5x-20}-3^5}{e^{15-3x}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=8x^3-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$ 2. $y=\dfrac{4\log_3 x+6x^6}{3\arccos x-e^x}$

3. $y=tg\left(4^{5x-6}\right)$ 4. $y=(2x+5)^{\frac{1}{x^2}}$

5. $y=(9\ln x-4\sin x)(3-4^x)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x=arcctg2t, \\ y=5t^4-8t^2. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=x^3-3x^2-9x+7$$

Вариант 10

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{5^{x-7} - 1}{\ln\left(x^2 - 48\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y = 8x - \dfrac{5}{x^4} - \sqrt[5]{x^4}$
2. $y = \dfrac{7arctgx + 9^x}{3\ln x - 7x^3}$
3. $y = \left(\sin(3x) - 4\right)^5$
4. $y = \left(x + x^2\right)^x$
5. $y = \left(5\log_8 x + 3tgx\right)\left(9 - e^x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \ln(3 - 8t), \\ y = 4t^4 + 24t. \end{cases}$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. $\int x\sqrt{5-x^2}\,dx.$

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$

3. $\int \frac{3x^2+x^5e^x-4}{x^5}\,dx$

4. $\int (3x-2)\cos 2x\,dx$

5. $\int \frac{x^3-8x-14}{(x+2)(x-4)}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

Вариант 2

1. $\int \sin^5 x\cos x\,dx.$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+5}\,dx$

3. $\int (5+4x)\sin 7x\,dx$

4. $\int \frac{5x^2+11x+2}{x(x+1)^2}\,dx$

5. $\int \frac{(x+5)^2}{x^5}\,dx$

6. $\int \sqrt{256-x^2}\,dx.$

Вариант 3

1. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln x}}{x}\,dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{x+9}+1}{\sqrt{x+9}-1}\,dx$

3. $\int (2x-21)e^{7x}\,dx$

4. $\int \frac{x^3+2x^2-18x+17}{(x-3)(x+5)}\,dx$

5. $\int \frac{6x^2-x^5\sin x+22x}{x^5}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Вариант 4

1. $\int \frac{x^2}{x^3-9}\,dx$.

2. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{4x+1}}\,dx$

3. $\int (4+x)7^x\,dx$

4. $\int \frac{x^3+9x^2+11x-20}{x^2(x+5)}\,dx$

5. $\int (x-2)(x^2+2x+4)\,dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$

Вариант 5

1. $\int e^{-2\sin x}\cos x\,dx$.

2. $\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx$

3. $\int \left(x^3+5x+1\right)\ln x\,dx$

4. $\int \frac{3x^2-5x+8}{(x-1)\left(x^2+1\right)}\,dx$

5. $\int \frac{(x^3+3)^2}{x^3}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x+3\sin^2 x}$

Вариант 6

1. $\int \frac{(arctgx)^5}{1+x^2}\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}+\sqrt{(x+5)^3}}$

3. $\int 4x\,arctgx\,dx$

4. $\int \frac{-3x^2+4x-4}{(x+4)\left(x^2+1\right)}\,dx$

5. $\int \frac{(6x\ -3)^2}{x}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^5 x}$

Вариант 7

1. $\int \frac{(10x-4)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}\,dx$

3. $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\,dx$

4. $\int \frac{5x^2-29}{(x+2)(x-1)(x+3)}\,dx$

5. $\int \frac{e^x x^6+4x^6\sin x+9x^4}{x^6}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

Вариант 8

1. $\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

3. $\int 6\arcsin x\,dx$

4. $\int \frac{x^3+x^2+3x+7}{(x-1)(x+2)}\,dx$

5. $\int \frac{2x^3+x^2\sin 6x+x}{x^2}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{5+5\cos x+\sin x}$

Вариант 9

1. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

2. $\int x\sqrt{6-x}dx$

3. $\int (3+9x)\cos 8x\, dx$

4. $\int \frac{2x^2-5x+2}{(x-3)(x+2)} dx$

5. $\int \frac{(2x-3)^2}{x^3} dx$

6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Вариант 10

1. $\int \frac{x}{\left(6+x^2\right)^2} dx$.

2. $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$

3. $\int (6x+2)\sin 6x\, dx$

4. $\int \frac{-x^2+6x-3}{(x+3)\left(x^2+1\right)} dx$

5. $\int \left(\frac{x+3}{x^2}\right)^2 dx$

6. $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

Контрольная работа №3

Вариант №1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos\phi$.
4. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$
5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.
6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi/6$.
7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = x$.

Вариант №2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos 3\phi$
4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 5e^{5\phi/12}$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, x = 2, y = 0.$.

Вариант№3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 1 + \cos\phi$

4.Вычислить длину дуги кривой $y = e^x + 6$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = \sqrt{2}e^{\phi}$, $0 \le \phi \le \pi/3.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2, y = 1, x = 2.$.

Вариант№4

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - 2x - x^2$,
$y = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \sin 3\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x + 2$, $0 \le x \le \pi/6$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi.$

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2e^{4\phi/3}$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3, y = x.$.

Вариант№5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$ $x = 0$, $x = 1$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \cos 3\phi.$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \le x \le \frac{7}{9}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 8\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi/4$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $y = x$. .

Вариант№6

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ $y = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2(1+\cos\phi)$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(1-x^2)$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 4e^{4\phi/3}$, $0 \le \phi \le \pi/3$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$. .

Вариант №7

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos 4\phi$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = -\ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/6$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 6\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi/3$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 9$, $y = 0$. .

Вариант№8

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \cos 3\phi$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = \sqrt{2}e^{\phi}$, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Вариант№9

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2(x-1)$, $x = 3$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2(t^2-1) \\ y = 4(4t-t^2) \end{cases}$, $y = 0$, $t \in [0;4]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2\cos\phi$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{4} \le x \le 1$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 2\sin\phi$, $0 \le \phi \le \pi/6$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 1$.

Вариант№10

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ ($x \ge 0$).

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = 5(t^2+1) \\ y = 2(t^2-3t) \end{cases}$, $y = 0$, $0 \le t \le 3$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2(1+\cos\phi)$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \le x \le 2$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

6. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 12e^{12\phi/5}$, $0 \le \phi \le \pi/3$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ №5

ОБРАЗЦЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕСТОВ

КОПТ №1 «Векторная алгебра»

Вариант: №1.

Тестируемый: ______________________ Дата: ______________

Задание №1

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образующие левую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 5, |\bar{c}| = 4$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		0
2)		нет верного ответа
3)		40
4)		-40

Задание №2

Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (3;-4;12)$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №3

Найти проекцию вектора $\bar{a} = -3\bar{i} + 8\bar{j}$ на ось Oy

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №4

Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = -2\bar{i} + \bar{j} - 8\bar{k}$, $\bar{b} = -4\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №5

Найти $\bar{a} \times \bar{b}$. Если $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		$5\bar{i} - 10\bar{j} + 5\bar{k}$
2)		$5\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k}$
3)		5
4)		$2\bar{i} - 9\bar{j} + 5\bar{k}$

Задание №6		
При каком значении m векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = m\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №7		
Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-4;-3;7).*		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №8		
Даны точки $A(-4;-5;-3)$ и $C(5;7;-6)$. Найти координаты вектора $\overline{AC}$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		(-2; 12; 8)
2)		(9; 12; -3)
3)		(1; 2; -9)
4)		(-20; -35; 18)

Задание №9
Даны векторы $\bar{a} = (0,1,0)$, $\bar{b} = (2,0,1)$, $\bar{c} = (3,1,-5)$. Вычислить $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.
Запишите число:
Не задан ответ!

Задание №10
Даны векторы $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$. Найти координаты вектора $2\bar{b} - \bar{c}$.
Запишите ответ:

Вариант: №2.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1

Вычислить модуль вектора $\overline{a}=(-7;-6;6)$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №2

Даны векторы $\overline{b}=\overline{i}-6\overline{j}+8\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}+5\overline{j}-2\overline{k}$.

Найти координаты вектора $\overline{b}+\overline{c}$

Запишите ответ:

Не задан ответ!

Задание №3

Найти проекцию вектора $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ на ось Oy

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №4

Найти $\overline{a}\times\overline{b}$. Если $\overline{a}=-\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{k}$

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		$9\overline{i}-11\overline{j}-6\overline{k}$
2)		10
3)		$5\overline{i}-11\overline{j}-7\overline{k}$
4)		$9\overline{i}+11\overline{j}-6\overline{k}$

Задание №5

Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образующие правую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\overline{a}|=2, |\overline{b}|=5, |\overline{c}|=4$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		0
2)		40
3)		-40
4)		нет верного ответа

Задание №6

Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках $A(3;1;1)$, $B(1;4;1)$, $C(1;1;6)$, $D(3;4;9)$.

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №7

Даны векторы $\bar{a} = (2,0,1)$, $\bar{b} = (3,-2,0)$, $\bar{c} = (4,2,4)$. Вычислить $\bar{b} \times \bar{c} + |\bar{a} \times \bar{b}|$.

Запишите число:

Не задан ответ!

Задание №8

При каком значении m векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + m\bar{j} + 4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №9

Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №10

Даны точки $A(1;3;5)$ и $B(2;4;5)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		(2; 12; 25)
2)		(3; 7; 10)
3)		(1; 1; 0)
4)		(-1; -1; 0)

Вариант: №3.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1

Найти $\bar{a}\times\bar{b}$. Если $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{j}+3\bar{k}$

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		3
2)		$11\bar{i}-7\bar{j}+\bar{k}$
3)		$11\bar{i}+6\bar{j}+4\bar{k}$
4)		$11\bar{i}-6\bar{j}+4\bar{k}$

Задание №2

Даны точки $A(-4;-5;-3)$ и $B(3;1;2)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		(6; 6; 6)
2)		(-7; -6; -5)
3)		(7; 6; 5)
4)		(-12; -5; -6)

Задание №3

Даны векторы $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}-8\bar{k}$, $\bar{b}=-4\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}$.
Найти координаты вектора $\bar{a}-2\bar{b}$

Запишите ответ:

Не задан ответ!

Задание №4

Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}=-4\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{c}=3\bar{i}+5\bar{j}-2\bar{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №5		
Найти проекцию вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ на ось Oz		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №6		
При каком значении m векторы $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + m\overline{k}$ взаимно перпендикулярны		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №7		
Вычислить модуль вектора $\overline{a} = (4;4;-2)$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №8		
Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках *A(4;3;0), B(-1;2;1), C(3;4;1), D(5;6;2).*		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №9
Даны векторы $\overline{a} = (2,1,4)$, $\overline{b} = (3,0,3)$, $\overline{c} = (3,1,0)$. Вычислить $\overline{b} \times \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.
Запишите число:

Задание №10		
Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образующие правую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $\lvert\overline{a}\rvert = 3, \lvert\overline{b}\rvert = 4, \lvert\overline{c}\rvert = 3$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		-36
2)		36
3)		0
4)		нет верного ответа

Вариант: №4.

Тестируемый: ______________________ Дата: ______________

Задание №1		
При каком значении m векторы $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = m\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №2		
Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (2; -3; 6)$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №3
Даны векторы $\bar{a} = -4\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$. Найти координаты вектора $\bar{a} - \bar{c}$.
Запишите ответ:

Задание №4		
Найти $\bar{a} \times \bar{b}$. Если $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		10
2)		$-7\bar{i} - 9\bar{j} + 2\bar{k}$
3)		$-5\bar{i} + 15\bar{j} + 10\bar{k}$
4)		$-5\bar{i} - 15\bar{j} + 10\bar{k}$

Задание №5		
Даны точки $A(1;3;5)$ и $C(-1;2;-8)$. Найти координаты вектора $\overline{AC}$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		(2; 1; 13)

2)		(-2; -1; -13)
3)		(-1; 6; -40)
4)		(0; 5; -3)

Задание №6

Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образующие левую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4, |\overline{c}| = 3$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		нет верного ответа
2)		0
3)		36
4)		-36

Задание №7

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A(-4;-4;-3), B(-2;-1;1), C(2;-2;-1), D(-1;3;-2).*

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №8

Даны векторы $\overline{a} = (-1,0,-1)$, $\overline{b} = (2,2,0)$, $\overline{c} = (1,-1,2)$. Вычислить $\overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$.

Запишите число:

Не задан ответ!

Задание №9

Найти проекцию вектора $\overline{a} = -3\overline{i} + 8\overline{j}$ на ось Oz

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №10

Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{b} = \overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Вариант: №5.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1

Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{b} = \bar{i} - 6\bar{j} + 8\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №2

Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (-7; -6; 6)$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №3

Даны векторы $\bar{a} = -4\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$.
Найти координаты вектора $\bar{a} - \bar{c}$.

Запишите ответ:

Не задан ответ!

Задание №4

Найти проекцию вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ на ось Ox

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №5

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(3;1;1)$, $B(1;4;1)$, $C(1;1;6)$, $D(3;4;9)$.

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №6

Даны точки $B(3;1;2)$ и $C(5;7;-6)$. Найти координаты вектора $\overline{BC}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		(-2; -6; 8)

2)		(8; 8; -4)
3)		(2; 6; -8)
4)		(-9; 8; 3)

Задание №7

Найти $\bar{a}\times\bar{b}$. Если $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		$-6\bar{i}-8\bar{j}+7\bar{k}$
2)		$8\bar{i}+8\bar{j}+12\bar{k}$
3)		1
4)		$-8\bar{i}-8\bar{j}+12\bar{k}$

Задание №8

Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образующие левую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=5, |\bar{c}|=4$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		40
2)		0
3)		-40
4)		нет верного ответа

Задание №9

Даны векторы $\bar{a}=(2,2,2)$, $\bar{b}=(3,2,-1)$, $\bar{c}=(4,2,0)$. Вычислить $\left|\bar{b}\times\bar{a}\right|-\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$.

Запишите число:

Задание №10

При каком значении m векторы $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-2\bar{j}+m\bar{k}$ взаимно перпендикулярны

Запишите число:

1)	Ответ:	

Вариант: №6.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1		
Вычислить модуль вектора $\overline{a}=(2;-3;6)$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №2
Даны векторы $\overline{a}=-2\overline{i}+\overline{j}-8\overline{k}$, $\overline{b}=-4\overline{i}-2\overline{j}-3\overline{k}$. Найти координаты вектора $\overline{a}-2\overline{b}$
Запишите ответ:

Задание №3		
Найти проекцию вектора $\overline{a}=-3\overline{i}+8\overline{j}$ на ось Ox		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №4		
Найти $\overline{a}\times\overline{b}$. Если $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{k}$, $\overline{b}=-\overline{i}+4\overline{j}+2\overline{k}$		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		1
2)		$-8\overline{i}-8\overline{j}+12\overline{k}$
3)		$8\overline{i}+8\overline{j}+12\overline{k}$
4)		$-6\overline{i}-8\overline{j}+7\overline{k}$

Задание №5		
Даны точки $B(2;4;5)$ и $C(-1;2;-8)$. Найти координаты вектора $\overline{BC}$.		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		(-3; -2; -13)

2)		(-10; -2; -6)
3)		(1; 6; -3)
4)		(-2; 8; -40)

Задание №6

Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образующие правую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\overline{a}| = 2, |\overline{b}| = 5, |\overline{c}| = 4$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		0
2)		40
3)		-40
4)		нет верного ответа

Задание №7

При каком значении *m* векторы $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + m\overline{j} + 4\overline{k}$ взаимно перпендикулярны

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №8

Даны векторы $\overline{a} = (2,0,1)$, $\overline{b} = (3,-2,0)$, $\overline{c} = (4,2,4)$. Вычислить $\overline{b} \times \overline{c} + |\overline{a} \times \overline{b}|$.

Запишите число:

Не задан ответ!

Задание №9

Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках *A(-4;-4;-3), B(-2;-1;1), C(2;-2;-1), D(-1;3;-2).*

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №10

Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a} = -4\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Вариант: №7.

Тестируемый: ______________________ Дата: ______________

Задание №1		
Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = -2\bar{i} + \bar{j} - 8\bar{k}$, $\bar{b} = -4\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №2	
Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образующие левую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $\lvert\bar{a}\rvert = 3, \lvert\bar{b}\rvert = 4, \lvert\bar{c}\rvert = 3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.	
Выберите один из 4 вариантов ответа:	
1)	36
2)	0
3)	нет верного ответа
4)	-36

Задание №3		
При каком значении m векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = m\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №4
Даны векторы $\bar{a} = (0,1,0)$, $\bar{b} = (2,0,1)$, $\bar{c} = (3,1,-5)$. Вычислить $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.
Запишите число:

Задание №5		
Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (3;-4;12)$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №6
Даны точки $A(-4;-5;-3)$ и $C(5;7;-6)$. Найти координаты вектора $\overline{AC}$.
Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		(-20; -35; 18)
2)		(9; 12; -3)
3)		(1; 2; -9)
4)		(-2; 12; 8)

Задание №7

Найти проекцию вектора $\bar{a} = -3\bar{i} + 8\bar{j}$ на ось Oz

Запишите число:

1)	**Ответ:**	

Задание №8

Найти $\bar{a} \times \bar{b}$. Если $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		5
2)		$5\bar{i} - 10\bar{j} + 5\bar{k}$
3)		$2\bar{i} - 9\bar{j} + 5\bar{k}$
4)		$5\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k}$

Задание №9

Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках *A(-4;-4;-3)*,
B(-2;-1;1), C(2;-2;-1), D(-1;3;-2).

Запишите число:

1)	**Ответ:**	

Задание №10

Даны векторы $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$.
Найти координаты вектора $2\bar{b} - \bar{c}$.

Запишите ответ:

Вариант: №8.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1

Вычислить модуль вектора $\overline{a}=(4;4;-2)$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №2

Даны точки $A(-4;-5;-3)$ и $B(3;1;2)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	(-7; -6; -5)
2)	(6; 6; 6)
3)	(7; 6; 5)
4)	(-12; -5; -6)

Задание №3

Найти проекцию вектора $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ на ось Ox

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №4

Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{b}=3\overline{i}-\overline{j}+5\overline{k}$, $\overline{c}=4\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №5

Найти $\overline{a}\times\overline{b}$. Если $\overline{a}=-\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{k}$

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	$5\overline{i}-11\overline{j}-7\overline{k}$

2)		$9\bar{i}+11\bar{j}-6\bar{k}$
3)		$9\bar{i}-11\bar{j}-6\bar{k}$
4)		10

Задание №6

Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образующие правую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=4, |\bar{c}|=3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		0
2)		нет верного ответа
3)		36
4)		-36

Задание №7

Даны векторы $\bar{b}=\bar{i}-6\bar{j}+8\bar{k}$, $\bar{c}=3\bar{i}+5\bar{j}-2\bar{k}$.
Найти координаты вектора $\bar{b}+\bar{c}$

Запишите ответ:

Задание №8

Даны векторы $\bar{a}=(2,1,4)$, $\bar{b}=(3,0,3)$, $\bar{c}=(3,1,0)$. Вычислить $\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

Запишите число:

Задание №9

Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках *A(3;1;1), B(1;4;1), C(1;1;6), D(3;4;9).*

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №10

При каком значении m векторы $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=m\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны

Запишите число:

1)	Ответ:	

Вариант: №9.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1		
Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A(3;1;1)*, *B(1;4;1)*, *C(1;1;6)*, *D(3;4;9)*.		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №2		
Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (3;-4;12)$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №3		
Найти проекцию вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ на ось Oy		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №4		
При каком значении m векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + m\bar{j} + 4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №5		
Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = -4\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №6		
Найти $\bar{a} \times \bar{b}$. Если $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{j} + 3\bar{k}$		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$11\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}$
2)		$11\bar{i} + 6\bar{j} + 4\bar{k}$
3)		$11\bar{i} - 7\bar{j} + \bar{k}$
4)		3

Задание №7

Даны векторы $\bar{b} = \bar{i} - 6\bar{j} + 8\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 2\bar{k}$.
Найти координаты вектора $\bar{b} + \bar{c}$

Запишите ответ:

Задание №8

Даны векторы $\bar{a} = (-1,0,-1)$, $\bar{b} = (2,2,0)$, $\bar{c} = (1,-1,2)$. Вычислить $\bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Запишите число:

Задание №9

Даны точки $A(1;3;5)$ и $C(-1;2;-8)$. Найти координаты вектора $\overline{AC}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		(-1; 6; -40)
2)		(2; 1; 13)
3)		(0; 5; -3)
4)		(-2; -1; -13)

Задание №10

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образующие левую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 5, |\bar{c}| = 4$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		нет верного ответа
2)		-40
3)		40
4)		0

Вариант: №10.

Тестируемый: ______________________________ Дата: ____________________

Задание №1		
Вычислить модуль вектора $\bar{a} = (-7;-6;6)$		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №2
Даны векторы $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$. Найти координаты вектора $2\bar{b} - \bar{c}$.
Запишите ответ:
Не задан ответ!

Задание №3		
Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках *A(4;3;0), B(-1;2;1), C(3;4;1), D(5;6;2)*.		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №4		
Найти проекцию вектора $\bar{a} = -3\bar{i} + 8\bar{j}$ на ось Ox		
Запишите число:		
1)	Ответ:	

Задание №5		
Найти $\bar{a} \times \bar{b}$. Если $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$		
Выберите один из 4 вариантов ответа:		
1)		$-7\bar{i} - 9\bar{j} + 2\bar{k}$
2)		10
3)		$-5\bar{i} + 15\bar{j} + 10\bar{k}$
4)		$-5\bar{i} - 15\bar{j} + 10\bar{k}$

Задание №6
Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образующие левую тройку взаимно перпендикулярны. Зная, что

$|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=4, |\overline{c}|=3$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		0
2)		36
3)		-36
4)		нет верного ответа

Задание №7

Даны точки $B(3;1;2)$ и $C(5;7;-6)$. Найти координаты вектора $\overline{BC}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)		(-2; -6; 8)
2)		(2; 6; -8)
3)		(-9; 8; 3)
4)		(8; 8; -4)

Задание №8

При каком значении m векторы $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-2\overline{j}+m\overline{k}$ взаимно перпендикулярны

Запишите число:

1)	Ответ:	

Задание №9

Даны векторы $\overline{a}=(2,2,2)$, $\overline{b}=(3,2,-1)$, $\overline{c}=(4,2,0)$. Вычислить $|\overline{b}\times\overline{a}|-\overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c})$.

Запишите число:

Не задан ответ!

Задание №10

Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}=-2\overline{i}+\overline{j}-8\overline{k}$, $\overline{b}=-4\overline{i}-2\overline{j}-3\overline{k}$

Запишите число:

1)	Ответ:	

КОПТ №2 «Аналитическая геометрия на плоскости»

Вариант 1

1) Составить общее уравнение прямой $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) $2x-2y-15=0$; $n=(2;-2)$ 2) $5x-y+5=0$; $n=(5;-1)$
3) $2x+3y-6=0$; $n=(2;3)$ 4) $-x+2y-3=0$, $n=(-1;2)$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a=-2$, $5y-33=0$; 2) $a=-3$, $x-21=0$;
3) $a=3$, $5x+8=0$; 4) $a=\frac{5}{3}$, $3x-6y=0$.

3) Определить взаимное расположение прямых

$$12x+15y-8=0,\qquad 4x+5y-7=0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $y=+\sqrt{9-x^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;
2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;
3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 2

1) Написать параметрическое уравнение прямой $2x-3y-6=0$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=1-4t \\ x=-3t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x=3+3t \\ y=2t. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=2t \\ z=3+3t. \end{cases}$

2) Определить, при каких значениях m и n данные прямые перпендикулярны

$$mx+8y+n=0, \qquad 2x+my-1=0.$$

Ответы:

1) $m=2$, $n=1$; 2) $m=-1$, $n=5$;

3) $m=0$, n – любое; 4) $m=6$, n – любое.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой $x+y-5=0$.

а) $\frac{x}{5}-\frac{y}{5}=1;$ *б)* $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1;$

в) $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1;$ *г)* $-\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1.$

Ответы:

1) г; 2) а; 3) б; 4) в.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $y=15-\sqrt{64-x^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости над прямой $y-15=0$;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости под прямой $y-15=0$;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина гиперболы, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 3

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M = (3; -2)$ параллельно вектору $a = (1; 3)$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t. \end{cases}$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 2)\,x + (a^2 - 9)\,y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

проходит через начало координат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = 2$, $4y + 3 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 2 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 6 = 0$;

3) $a = 1$, $2y + 7 = 0$; 4) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$.

3) Установить, какая линия определяется уравнением $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;
2) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости;
3) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 4

1) Дана прямая $2x + 5y + 1 = 0$. Определить угловой коэффициент k прямой, параллельной данной прямой.

Ответы:

1) $k = 0$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{2}{5}$; 4) $k = -\frac{5}{2}$.

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые совпадают

$$mx + 8y + n = 0, \qquad 2x + my - 1 = 0.$$

Ответы:

1) $m = 2$, $n = 2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ или $m = 4$, $n = -2$;
3) $m = -3$, $n = 4$; 4) $m = 3$, $n = 1$ или $m = 4$, $n = 2$.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой $2x - 3y - 6 = 0$:

$$а)\ \frac{\tilde{o}}{6} - \frac{\acute{o}}{6} = 1; \qquad б)\ \frac{\tilde{o}}{5} + \frac{\acute{o}}{5} = 1;$$

$$в)\ \frac{\tilde{o}}{3} - \frac{\acute{o}}{2} = 1; \qquad г) -\frac{\tilde{o}}{2} + \frac{\acute{o}}{3} = 1.$$

Ответы:

1) а; 2) г; 3) б; 4) в.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $\tilde{o} = -2 - \sqrt{9 - \acute{o}^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная влево от прямой $x + 2 = 0$;
2) полуокружность, расположенная вправо от прямой $x + 2 = 0$;
3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 5

1) Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент $k = -2$ и отрезок $b = -5$, отсекаемый ею на оси Oy.

Ответы:

1) $3x + 2y + 1 = 0$; 2) $2x + y + 5 = 0$;
3) $3x + 8 = 0$; 4) $y + 2 = 0$.

2) Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(3m + n + 3)\,x + (m - 2n + 2)\,y + 6m + 9 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный -3 (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $m = 7$, $n = 2$, $y + 3 = 0$; 2) $m = -2$, $n = 3$, $-6y - 3 = 0$;
3) $m = -7$, $n = 4$, $y - 5 = 0$; 4) $m = 3$, $n = 1$, $y + 3 = 0$.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

а) $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 = 0$; б) $y - 5 = 0$;

в) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 1 = 0$; г) $3x + 4 = 0$.

Ответы:

1) в; 2) б; 3) а; 4) г.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $\delta = -\sqrt{4 - \delta^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в левой полуплоскости;
2) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;
3) половина эллипса, расположенная в правой полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$3x - 2y - 7 = 0, \qquad 6x - 4y - 3 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

Вариант 6

1) Составить общее уравнение прямой $-\frac{1}{5}(x+10)+3\left(y-\frac{2}{3}\right)=0$ и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) x – 5y – 15 = 0, $n = (1; -5)$; 2) 2x – y + 2 = 0, $n = (2; -1)$;
3) 4x + 2y + 1 = 0, $n = (4; 2)$; 4) x – 15y + 20 = 0, $n = (1; -15)$.

2) Определить взаимное расположение прямых

$$3x + 5y - 4 = 0, \qquad 6x + 10y + 7 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

3) Дана прямая $2x + 3y - 6 = 0$. Составить для нее уравнение «в отрезках».

Ответы:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$; 2) $\frac{x}{3}+\frac{z}{2}=1$;

3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $\delta = -2+\sqrt{9-\delta^2}$.

Ответы:

1) половина эллипса, расположенная вправо от прямой x + 2 = 0;
2) полуокружность, расположенная влево от прямой x + 2 = 0;
3) полуокружность, расположенная вправо от прямой x + 2 = 0;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 7

1) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M = (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ параллельно вектору $a = (-3; -2)$.

Ответы:

1) $\dfrac{x - \frac{3}{2}}{3} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{-2}$;   2) $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-4}{1}$;

3) $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{-2} = \dfrac{y-3}{3}$;   4) $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{-3} = \dfrac{y - \frac{3}{2}}{-2}$.

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 1)\,x + (a^2 - 5)\,y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = -2$, $5y - 8 = 0$;   2) $a = -1$, $-y + 4 = 0$;

3) $a = -3$, $x - 6 = 0$;   4) $a = \frac{5}{3}$, $3x - 5y = 0$.

3) Привести общее уравнение прямой $12x - 5y + 13 = 0$ к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 5 = 0$;   2) $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 = 0$;

3) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0$;   4) $x + 3 = 0$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $\delta = +\sqrt{16 - \delta^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

3) полуокружность, расположенная в левой полуплоскости;

4) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;

Вариант 8

1) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой $5x + 3y + 2 = 0$.

Ответы:

1) $k = 2$, $b = 1$; 2) $k = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$;

3) $k = \frac{5}{3}$, $b = \frac{2}{3}$; 4) $k = -5$, $b = 0$.

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые параллельны

$$mx + 8y + n = 0, \qquad 2x + my - 1 = 0.$$

Ответы:

1) $m = 3$, $n = 4$; 2) $m = -4$, $n \neq 2$ или $m = 4$, $n \neq -2$;

3) $m = -3$, $n = 2$; 4) $m = 1$, $n = 4$ или $m = 2$, $n = 4$.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой $x + 4y - 8 = 0$.

а) $\frac{\text{ð}}{5} - \frac{\text{ó}}{5} = 1$; б) $\frac{\text{ð}}{4} + \frac{\text{ó}}{8} = 1$;

в) $\frac{\text{ð}}{3} - \frac{\text{ó}}{3} = 1$; г) $\frac{\text{ð}}{8} + \frac{\text{ó}}{2} = 1$.

Ответы:

1) г; 2) в; 3) б; 4) а.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $y = 15 + \sqrt{64 - \text{ð}^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная над прямой $y - 15 = 0$;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная над прямой $y - 15 = 0$;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 9

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M(2;\ 0)$ параллельно вектору $a = (0; -3)$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2t. \end{cases}$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a^2 + 2)x + (a - 3)y - a + 5 = 0$$

параллельна оси ординат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = 3$, $11x + 2 = 0$; 2) $a = -3$, $x - 56 = 0$;

3) $a = 0$, $5x - 4 = 0$; 4) $a = \frac{5}{3}$, $3x - 6y = 0$.

3) Определить взаимное расположение прямых $y + 3 = 0$, $5x - 7 = 0$.

Ответы:

1) перпендикулярны; 2) параллельны;

3) пересекаются; 4) совпадают.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Ответы:

1) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

Вариант 10

1) Написать каноническое уравнение прямой $2x - 3y - 6 = 0$.

Ответы:

1) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2}$; 2) $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{1}$;

3) $\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{5}$; 4) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3}$

2) Определить взаимное расположение прямых

$$5x - 2y + 7 = 0, \qquad 5x - 3y - 7 = 0.$$

Ответы:

1) перпендикулярны; 2) параллельны;

3) пересекаются; 4) совпадают.

3) Дана прямая $4x - 3y + 24 = 0$. Составить для нее уравнение «в отрезках».

Ответы:

1) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$; 2) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-8} = 1$;

3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{z}{-3} = 1$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) часть параболы, расположенная в нижней полуплоскости.

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

Ответы:

1) -4; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 1; 3) $e^{\frac{1}{3}}$; 4) e^3.

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+2}\right)^2$$

Ответы:

1) $-\frac{1}{7}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{4}{25}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

Ответы:

1) 0; 2) -1; 3) a; 4) 1.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{7}{3}$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Ответы:

1) $1/2$; 2) $\sqrt{2}$; 3) ∞; 4) $4/3$

КОПТ №4 «Производные»

Вариант 1

Найти производные:

1) $y = \dfrac{3x + \sin x}{\cos x - 10}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = -\dfrac{3 + \cos x}{\sin x}$;

б) $y' = \dfrac{3 - \cos x}{\sin^2 x}$;

в) $y' = \dfrac{3x \sin x - 7\cos x - 29}{(\cos x - 10)^2}$;

г) $y' = \dfrac{\cos 2x - 3x \sin x - 7\cos x - 30}{(\cos x - 10)^2}$.

2) $y = \ln^4(2x + 1)$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = 8\ln^3(2x + 1)$;

б) $y' = \dfrac{8\ln^3(2x+1)}{2x+1}$;

в) $y' = \dfrac{8}{(2x+1)^3}$;

г) $y' = 8\ln(2x+1) \cdot 2$.

3) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = (2xye^y - 3x^2)y \dfrac{1}{x^2 ye^y}$;

б) $y' = (2xye^y - 3x^2 y)y \dfrac{1}{1 - x^2 ye^y}$;

в) $y' = (2xye^y - 3x^2 y) \cdot \dfrac{1}{1 - x^2 ye^y}$;

г) $y' = \dfrac{2xye^y - 3x^2}{1 - xye^y} \cdot y$.

4) $y = (2tg3x + 1)^{\sin 3x}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = (2tg3x + 1)^{\sin 3x} \cos 3x$;

б) $y' = [3\cos 3x \ln(2tg3x + 1) + \dfrac{6\sin 3x \sec^2 3x}{2tg3x + 1}] \cdot (2tg3x + 1)^{\sin 3x}$;

в) $y' = (2tg3x + 1)^{\sin 3x} \cdot \ln(2tg3x + 1)$;

г) $y' = (2tg3x + 1)^{\sin 3x - 1} \cdot \cos 3x \cdot 3$.

5) $y = 2x^4 - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + 1$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = 8x^3 - \sqrt[3]{x^2}$;

б) $y' = 8x^3 - \sqrt[3]{x^4}$;

в) $y' = 8x^3 + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$;

г) $y' = 8x^3 - \sqrt[3]{x^2} + 1$.

6) $y = (x + x^3) \cdot arctgx$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = (1+3x^2)arctgx + x$; б) $y' = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$;

в) $y' = 3x^2 arctgx + x$; г) $y' = (1+3x^2)\cdot(1+x^2)$.

7) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$. Найти y''_x .

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 - 1}$; б) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + t}$;

в) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + 3}$; г) $y''_x = -\dfrac{10t}{3t^2 - 3}$.

8) $y = 7^{2x} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$. Найти y'.

Ответы:

а) $y' = 7^x \ln 7 \cdot 2 + \dfrac{2}{5} x^{-\frac{1}{3}}$; б) $y' = x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{2}{5} x^{\frac{1}{3}}$;

в) $y' = 7^{2x} \ln 7 \cdot 2 - \dfrac{8}{5x\sqrt[3]{x^2}}$; г) $y' = 7^x \ln 7 + x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}$.

КОПТ №5 «Неопределенные интегралы»

Вариант № 1

1. Найти интеграл $\int \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3x^2 - \sqrt[4]{x^3} \right) dx$.

Ответы:

1. $2\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + C$; 2. $3\sqrt[3]{x^2} + x^3 - \dfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + C$;

3. $3\sqrt[3]{x^2} - x^3 - 4\sqrt[4]{x^7} + C$; 4. $3\sqrt[3]{x^2} - x^3 - \sqrt[4]{x^7} + C$.

2. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x(3 - 2\ln x)}$.

Ответы:

1. $-\dfrac{1}{2} \ln|3 - 2\ln x| + C$; 2. $\dfrac{1}{2} \ln|3 - 2\ln x| + C$;

3. $\ln|x(3 - 2\ln x)| + C$; 4. $\dfrac{2}{(\ln|3 - 2\ln x|)^2} + C$;

3. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{cos^2 x^2}$.

Ответы:

1. $\frac{1}{2}tgx + C$; 2. $\frac{1}{2}tgx^2 + C$; 3. $tg^2 x + C$; 4. $-\frac{1}{2cos\, x^2} + C$;

4. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x+1}$.

Ответы:

1. $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x+1} + C$;
2. $\frac{x-1}{2} + ln|x+1| + C$;
3. $\frac{x^2}{2} - x + ln|x+1| + C$;
4. $\frac{(x-1)^2}{2} + 4ln|x+1| + C$.

5. Найти интеграл $\int 2^{sin 3x} cos\, 3x dx$.

Ответы:

1. $\frac{1}{sin\, 3x+1} 2^{sin 3x+1} + C$;
2. $\frac{1}{2} 2^{sin 3x} + C$;
3. $\frac{1}{3 ln 2} 2^{sin 3x} + C$;
4. $\frac{1}{ln 2} 2^{sin 3x} + C$.

6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Ответы:

1. $2\sqrt{x} - ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$;
2. $2\left(\sqrt{x} - ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right) + C$;
3. $\frac{1}{2}\sqrt{x} - ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$;
4. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right) + C$.

7. Найти интеграл $\int arctgx dx$.

Ответы:

1. $xarctgx - \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right) + C$;
2. $xarctgx - 2ln\left(1+x^2\right) + C$;
3. $2xarctgx - ln\left(1+x^2\right) + C$;
4. $\frac{1}{2} xarctgx - ln\left(1+x^2\right) + C$.

8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$.

Ответы:

1. $\frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C$;
2. $\frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{4x+1}{2} + C$;
3. $\frac{1}{2\sqrt{7}} ln \left|\frac{4x+1}{4x-1}\right| + C$;
4. $\frac{1}{\sqrt{7}} ln \left|\frac{4x-1}{4x+1}\right| + C$.

9. Найти интеграл $\int sin^3 2x dx$.

Ответы:

1. $cos\, 2x - \frac{cos^3 2x}{3} + C$;
2. $-\frac{1}{2}\left(cos\, 2x - \frac{cos^3 2x}{3}\right) + C$;
3. $\frac{cos\, 2x}{2} - \frac{cos^3 2x}{3} + C$;
4. $2\left(cos\, 2x + \frac{cos^3 2x}{3}\right) + C$.

10. Найти интеграл $\int \frac{3x+4}{(x-2)(x+1)} dx$.

Ответы:

1. $\frac{1}{3} ln|x-2| - \frac{10}{3} ln|x+1| + C$;
2. $\frac{10}{3} ln|x-2| - \frac{1}{3} ln|x+1| + C$;
3. $\frac{3}{10} ln|x-2| - \frac{1}{3} ln|x+1| + C$;
4. $\frac{1}{3} ln|x-2| + \frac{3}{10} ln|x+1| + C$.

КОПТ №6 «Определенные интегралы»

Вариант №1

1. Вычислить определенный интеграл $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{a}$; б) $\frac{3\pi}{2a}$; в) $\frac{\pi}{12a}$; г) $\frac{\pi}{12}$.

2. Вычислить $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

Ответы: а) $2\ln 2 - 1$; б) $2\ln 2$; в) $1 - 2\ln 2$; г) 1.

3. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$.

Ответы: а) 1; б) $\frac{\ln 2}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1-\ln 2}{2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

Ответы: а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{8}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ответы: а) $3\pi a^2$; б) πa^2; в) πa^2; г) $\frac{\pi}{2}a^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 - \cos\phi)$.

Ответы: а) $2\pi a^2$; б) $\frac{5}{2}\pi a^2$; в) $3\pi a^2$; г) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$

Ответы: а) 32π; б) 64π; в) $\frac{15}{2}\pi$; г) 4π.

8. Вычислить длину дуги линии $y = \ln \sin x$ от точки с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln 3$; б) $\ln 2$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\frac{\pi^2 a}{8}$; б) $\frac{\pi a}{8}$; в) $\frac{\pi a^2}{32}$; г) $\frac{a\pi^2}{32}$.

10. Вычислить длину дуги линии $r = a\sin^3\frac{\phi}{3}$

Ответы: а) $3\pi a$; б) $\frac{\pi a}{2}$; в) πa; г) $\frac{3\pi a}{2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ №6

ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ

I семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1   Семестр 1   Дисциплина Математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Исследование систем линейных алгебраических уравнений.
2. Поверхности 2 порядка. Гиперболоиды.
3. Вычислить *(AB)C*+2*A(BC)*, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$.
4. Решить систему уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases}7x-5y-2z=1\\ x+2y-z=-6\\ 5x-10y+z=16\end{cases}$
5. Даны 3 вершины параллелограмма: *A*(-3;-2), *B*(-1;3), *C*(5;1). Найти координаты вершины *D*.
6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2;1) под углом 45° к прямой $\begin{cases}x=t+1\\ y=-\dfrac{2}{3}t-2\end{cases}$
7. Привести к каноническому виду и построить график: $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$.
8. Вычислить пределы: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x-3x}{x+tg\,x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x}$.

II семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1   Семестр 1   Дисциплина Математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Исследование графика функции на точки перегиба.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Вычислить пределы используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{5-5x}-1}{\ln(5x-4)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x-3x}{x+tg\,x^2}$.
4. Найти производную функции $y=arctg\,^3x\cdot tg^3\,2x$.
5. Исследовать на экстремумы: $y(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$.
6. Найти интегралы: $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5x}+\dfrac{1}{8x}\right)dx$, $\int\dfrac{x^2}{2x^3-1}dx$.
7. Вычислить площадь фигуры: $y=1/x^2$; $y=0$; $x=0{,}5$; $x=2{,}5$.

Приложение №7

Шкалы оценивания защиты типовых расчетов, контрольных работ и контрольно-обучающих программ тестирования (КОПТ)

Семестр 1

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	Типовой расчет №1 (мах 9 б)	Типовой расчет №2 (мах 8 б)	Типовой расчет №3 (мах 9 б)
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0-2,5**	**0-2,5**	**0-2,5**
Правильно выполнил от 35 до 59% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**2,5-5**	**2,5-4**	**2,5-5**
Правильно выполнил от 60% до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки. Ответы на вопросы полные или частично полные.	**5-7,5**	**4-6**	**5-7,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**7,5-9**	**6-8**	**7,5-9**

Шкала оценивания выполнения контрольных работ

Критерии оценивания	Контрольная работа №1 (мах 10 б)	Контрольная работа №2 (мах 10 б)	Контрольная работа №3 (мах 10 б)
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0-2**	**0-2**	**0-2**
Правильно выполнил от 35 до 59% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2-5**	**2-5**	**2-5**
Правильно выполнил от 60% до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**5-7**	**5-7**	**5-7**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**7-10**	**7-10**	**7-10**

Шкала оценивания выполнения компьютерных тестов

1. Тест **«Векторная алгебра».** Всего заданий в тесте – 10. Каждое задание оценивается в 1 балл.

2. Тест **«Аналитическая геометрия на плоскости».** Всего заданий в тесте – 4; из них 3 задания на проверку уровня обученности «Уметь», 1 задание – с уровнем «Владеть». Каждое задание с уровнем «Уметь» оценивается в 2 балла, задание с уровнем «Владеть» оценивается в 4 балла.

3. Тест **«Пределы».** Всего заданий в тесте – 6, из них 4 задания на проверку уровня обученности «Уметь», 2 задания – с уровнем «Владеть». Каждое задание с уровнем «Уметь» оценивается в 1,5 балла, задания с уровнем «Владеть» оцениваются в 2 балла.

Семестр 2

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	**Типовой расчет №1 (мах 8 б)**	**Типовой расчет №2 (мах 9 б)**	**Типовой расчет №3 (мах 9 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы.	**0-2,5**	**0-2,5**	**0-2,5**
Правильно выполнил от 35 до 59% заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы.	**2,5-4**	**2,5-5**	**2,5-5**
Правильно выполнил от 60% до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки. Ответы на вопросы полные или частично полные.	**4-6**	**5-7,5**	**5-7,5**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений.	**6-8**	**7,5-9**	**7,5-9**

Шкала оценивания выполнения контрольных работ

Критерии оценивания	**Контрольная работа №1 (мах 10 б)**	**Контрольная работа №2 (мах 10 б)**	**Контрольная работа №3 (мах 10 б)**
Правильно выполнил менее 35% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**0-2**	**0-2**	**0-2**

Правильно выполнил от 35 до 59% заданий, в остальных допущены грубые ошибки.	**2-5**	**2-5**	**2-5**
Правильно выполнил от 60% до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.	**5-7**	**5-7**	**5-7**
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки.	**7-10**	**7-10**	**7-10**

Шкала оценивания выполнения компьютерных тестов

1. Тест **«Дифференцирование функции одной переменной».** Всего заданий в тесте – 8, из них 6 заданий на проверку уровня обученности «Уметь», 2 задания – с уровнем «Владеть». Каждое задание с уровнем «Уметь» оценивается в 1 балл, задания с уровнем «Владеть» оцениваются в 2 балла.

2. Тест **«Неопределенные интегралы».** Всего заданий в тесте – 10. Каждое задание оценивается в 1 балл.

3. Тест **«Определенные интегралы и их применения».** Всего заданий в тесте – 6, из них 4 задания на проверку уровня обученности «Уметь», 2 задания – с уровнем «Владеть». Каждое задание с уровнем «Уметь» оценивается в 1,5 балла, задания с уровнем «Владеть» оцениваются в 2 балла.

ПРИЛОЖЕНИЕ №8

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ КАРТЫ ДИСЦИПЛИНЫ «Математика»

Семестр 1

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Формы контроля	Зачетный минимум	Зачетный максимум	График контроля
Модуль 1					
Линейная и векторная алгебра	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (9), ДЗ (2,5), посещаемость (1,5), активность (1)	8	14	7
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Модуль 2					
Аналитическая геометрия	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (8), ДЗ (1,5), посещаемость (1,5), активность (1)	6	12	12
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Модуль 3					
Пределы	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (9), ДЗ (2), посещаемость (2), активность (1)	8	14	17
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Всего за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Зачет)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

Приложение №8. Технологические карты дисциплины I 2

Семестр 2

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Формы контроля	Зачетный минимум	Зачетный максимум	График контроля
Модуль 1					
Производные	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (8), ДЗ (1,5), посещаемость (1,5), активность (1)	6	12	30
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Модуль 2					
Неопределенные интегралы	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (9), ДЗ (2,5), посещаемость (1,5), активность (1)	8	14	35
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Модуль 3					
Определенные интегралы	Текущий контроль	Защита типового расчета №1 (9), ДЗ (2), посещаемость (2), активность (1)	8	14	40
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Всего за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Зачет)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

ПРИЛОЖЕНИЕ №9

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета №1

Задание 1.Найти матрицу $P=(2A-3B)C$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: $2A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 10 & 6\\ 2 & -8 & 0\end{pmatrix};$

$$3B=3\cdot\begin{pmatrix}0 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 15 & 3 & 18\end{pmatrix};$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}4 & 10 & 6\\ 2 & -8 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 15 & 3 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -9\\ -13 & -11 & -18\end{pmatrix};$$

$$P=(2A-3B)C=\begin{pmatrix}4 & -2 & -9\\ -13 & -11 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot 3-2\cdot 1-9\cdot 7 & 4\cdot(-2)-2\cdot 1-9\cdot 0\\ -13\cdot 3-11\cdot 1-18\cdot 7 & -13\cdot(-2)-11\cdot 1-18\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-53 & -10\\ -176 & 15\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

Решение. Разложим определитель, например, по третьей строке, так как в ней один из элементов равен нулю, получим:

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=3A_{31}+3A_{32}+0A_{33}+2A_{34}=$$

Решение. Разложим определитель, например, по третьей строке, так как в ней один из элементов равен нулю, получим:

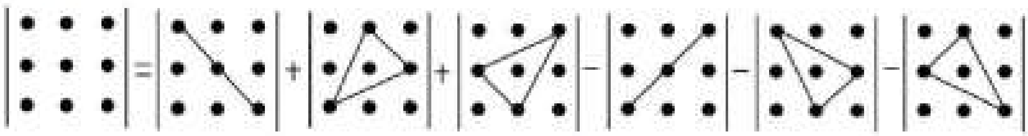
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3A_{31} + 3A_{32} + 0A_{33} + 2A_{34} =$$

$$= 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(6+18-20-3) - 3(6+6+10-18-20-1) - 2(12+12-6-4) =$$

$$= 3 - 3(-17) - 2(14) = 3 + 51 - 28 = 26.$$

Замечание. Здесь и далее для вычисления определителей третьего порядка использована схема



Задание 3. Решить систему уравнений а) с помощью обратной матрицы; б) методом Крамера; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме данная система примет вид: $AX = B$. Решение данного матричного уравнения находится по формуле: $X = A^{-1}B$.

Находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 - 8 + 2 = -17.$$

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица.

Находим алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - (-4) = 8$, $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-0) = 2$,

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-(-3)) = -1$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4-0 = 4$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-6) = 10$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-8-3) = 11$,

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-0 = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3.$$

Получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя значения в формулу $X = A^{-1}B$, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 10 & 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -48+10-13 \\ 6+20-26 \\ -60+55+39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

б) Определитель системы $\det A = -17 \neq 0$, следовательно, существует единственное решение системы.

Вычислим вспомогательные определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$, полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 13 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -24-13-24+10 = -51;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -2 \end{vmatrix} = 20+18-26-12 = 0;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 52-24+15-36+40-13 = 34.$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-17} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{34}{-17} = -2,$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

в) Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right).$$

Элемент $a_{11} = -2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Преобразование проведем методом Гаусса, используя правило прямоугольников:

1. Элементы ключевой строки и всех выше расположенных строк, остаются неизменными;
2. Элементы ключевого столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;
3. Все прочие элементы матрицы вычисляются по мнемоническому правилу прямоугольников:

Новый элемент = старый элемент × разрешающий элемент –

элемент ключевого столбца × элемент ключевой строки.

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 34 & -68 \end{array}\right) \div 34 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

На основе последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2\cdot(-2) = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

Задание 4. Найти общее решение для однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение системы методом Гаусса. По правилу прямоугольников (см. задание 3) имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r = 1 < n = 3$ и система имеет ненулевое решение.

Пусть x_1 – базисная переменная, x_2, x_3 – свободные переменные. Выразим базисную переменную через свободные переменные, получим: $x_1 = 2x_2 - 3x_3$. Придадим свободным переменным значения $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$. Общее решение получим в виде: $X = (2t_1 - 3t_2; t_1; t_2)$.

Задание 5. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

б) найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. а) Проверим условие коллинеарности $\vec{a} \parallel \vec{c} \Leftrightarrow \frac{a_x}{c_x} = \frac{a_y}{c_y} = \frac{a_z}{c_z}$. Так как $\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{-3}$ то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны.

Так как условие перпендикулярности двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, то находим скалярное произведение этих векторов. Имеем,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 10 - 6 - 3 = 1,$$

следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не ортогональны.

б) Используем формулу: $np_{2\vec{b}+3\vec{c}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (2\vec{b} + 3\vec{c})}{|2\vec{b} + 3\vec{c}|}$. Решение проведем по действиям, во-первых, находим координаты вектора $2\vec{b} + 3\vec{c}$, получим

$$2\vec{b} + 3\vec{c} = 2(0;1;4) + 3(5;2;-3) = (0;2;8) + (15;6;-9) = (15;8;-1).$$

Далее

$$\vec{a} \cdot (2\vec{b} + 3\vec{c}) = (2;-3;1) \cdot (15;8;-1) = 30 - 24 - 1 = 5,\ |2\vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{15^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{290}.$$

Следовательно, $np_{2\vec{b}+3\vec{c}}\,\vec{a} = \frac{5}{\sqrt{290}} = \frac{5\sqrt{290}}{290} = \frac{\sqrt{290}}{58}$.

Задание 6. Дан вектор $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{p}\vec{q}}\right) = \pi/6$. Найти длину вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдём скалярный квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2 = \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) \cdot \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right).$$

Раскроем скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) \cdot \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right) = \vec{p}^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 2\vec{q} \cdot \vec{p} + 4\vec{q}^2 = \vec{p}^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4\vec{q}^2 =$$

$= \left|\vec{p}\right|^2 + 4\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \cdot \cos\left(\vec{p} \wedge \vec{q}\right) + 4\left|\vec{q}\right|^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 4 = 1 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 = 17 + 4\sqrt{3}.$ Находим длину вектора $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{17 + 4\sqrt{3}}.$

Задание 7. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,-3)$. Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Найдем координаты векторов:

$\overline{AC} = (-2-3;-3-4;6-5) = (-5;-7;1)$,

$\overline{AD} = (3-3;-6-4;-3-5) = (0;-10;-8)$.

Вычислим их векторное произведение:

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & -7 & 1 \\ 0 & -10 & -8 \end{vmatrix} = 66\bar{i} - 40\bar{j} + 50\bar{k}.$$

Модуль векторного произведения равен:

$$\left|\overline{AC} \times \overline{AD}\right| = \sqrt{66^2 + (-40)^2 + 50^2} = \sqrt{8456} = 2\sqrt{2114},$$

Тогда

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\left|\overline{AC} \times \overline{AD}\right| = \sqrt{2114} \text{ (кв. ед.).}$$

б) Так как координаты векторов: $\overline{AB} = (1-3;2-4;1-5) = (-2;-2;-4)$, $\overline{AC} = (-2-3;-3-4;6-5) = (-5;-7;1)$, $\overline{AD} = (3-3;-6-4;-3-5) = (0;-10;-8)$,

то $V_{пир.} = \left|\frac{1}{6}\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -5 & -7 & 1 \\ 0 & -10 & -8 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot 252 = 42$ (куб. ед).

Задание 8. Сила $\vec{F} = (5;-3;9)$ приложена к точке $A(3,4,-6)$. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2,6,5)$; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки B.

Решение. Найдем координаты вектора перемещения: $\overrightarrow{AB}=(-1;2;11)$.

Для нахождения работы силы $\vec{F}$ в случае, когда точка ее приложения $A(3,4,-6)$, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2,6,5)$, применим формулу: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. Получим:

$$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=5\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+9\cdot 11=88 \text{ (усл. ед.)}.$$

б) Момент силы $\vec{F}$ относительно точки $B(2,6,5)$ есть вектор

$$\overline{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & -11\\ 5 & -3 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -11\\ -3 & 9\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & -11\\ 5 & 9\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}\bar{k}=-51\bar{i}-64\bar{j}+7\bar{k}.$$

Следовательно, модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки B равен:

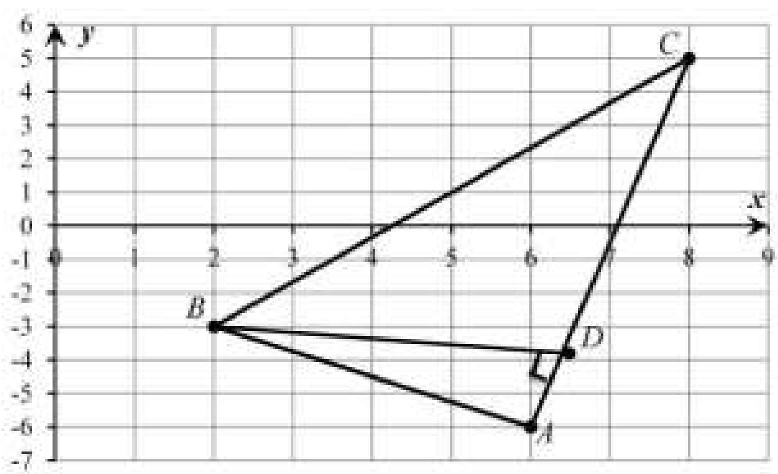
$$\left|\overline{M}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{F}\right|=\sqrt{(-51)^2+(-64)^2+7^2}=\sqrt{6746}.$$

Образец выполнения типового расчета №2

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(6;-6)$, $B(2;-3)$, $C(8;5)$. Требуется: 1) сделать чертеж; 2) составить уравнение стороны AB; 3) найти длину стороны AB; 4) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 5) вычислить расстояние от вершины C до стороны AB; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой).

Решение:

1) Сделаем чертеж.



2) Для составления уравнения стороны AB используем формулу $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, где $A(6;-6)$, $B(2;-3)$: $\frac{y-(-6)}{-3-(-6)}=\frac{x-6}{2-6}$ или $\frac{y+6}{3}=\frac{x-6}{-4}$ или $-4y-24=3x-18$ или $3x+4y+6=0$.

3) Для нахождения длины AB используем формулу расстояния между двумя заданными точками $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Подставляя значения, имеем

$$d=\sqrt{(2-6)^2+(-3-(-6))^2}=\sqrt{16+9}=5 \text{ (ед. дл.)}.$$

4) Для составления уравнения высоты BD используем условие перпендикулярности прямых BD и AC, т.е. используем формулу $k_2=-\frac{1}{k_1}$; $k_{BD}k_{AC}=-1$. Найдем k_{AC}, используя формулу $k_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, имеем $k_{AC}=\frac{5-(-6)}{8-6}=\frac{11}{2}$, следовательно, $k_{BD}=-\frac{1}{11/2}=-\frac{2}{11}$. Составим уравнение высоты BD по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$, зная, что $k_{BD}=-\frac{2}{11}$ и что она проходит через точку $B(2;-3)$.

Получим: $y-(-3)=-\frac{2}{11}(x-2)$ или $11y+33=-2x+4$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид: $2x+11y+29=0$.

5) Расстояние от вершины $C(8;5)$ до стороны AB, уравнение которой было найдено в п.2: $3x+4y+6=0$, найдем по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Получим:

$$d=\frac{|3\cdot 8+4\cdot 5+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{50}{5}=10 \text{ (ед.дл.)}.$$

6) Составим, например, уравнение средней линии MN треугольника ABC. Найдем середину (т.M) стороны BC и середину (т.N) стороны AC, используя формулы $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

$$x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{8+2}{2}=5;\quad y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{5-3}{2}=1;$$
$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{6+8}{2}=7;\quad y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-6+5}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Т.о., $M(5;1)$, $N(7;-\frac{1}{2})$.

Составим уравнение MN, используя формулу $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$: $\frac{y-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{x-5}{7-5}$ $\Rightarrow$

$\frac{y-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{x-5}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{y-1}{-3}=\frac{x-5}{4}$ $\Rightarrow$ $4y-4=-3x+15$ $\Rightarrow$ $3x+4y-19=0$.

7) Для составления уравнения прямой, проходящей через точку $A(6;-6)$ параллельно прямой BC, используем условие параллельности двух прямых $k_1=k_2$. Найдем угловой коэффициент прямой BC по формуле $k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$:

$$k_{BC}=\frac{5-(-3)}{8-2}=\frac{4}{3}.$$

Уравнение искомой прямой найдем по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$: $y-(-6)=\frac{4}{3}(x-6)$

$\Rightarrow$ $3y+18=4x-24$ $\Rightarrow$ $4x-3y-42=0$.

8) Площадь треугольника ABC найдем по формуле $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{matrix}\right\|$:

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2-6 & -3-(-6)\\ 8-6 & 5-(-6)\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-4 & 3\\ 2 & 11\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-44-6|=25 \text{ (кв. ед).}$$

9) Для вычисления угла A треугольника ABC используем формулу $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Найдем сначала k_{AB}, зная уравнение AB: $3x+4y+6=0$. Преобразуем это уравнение к виду $y=kx+b$: $4y=-3x-6$ или $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$.Отсюда $k_{AB}=-\frac{3}{4}$. Угловой коэффициент прямой AC был найден в п.3: $k_{AC}=\frac{11}{2}$. Заметим, что $k_1=k_{AC}$, $k_2=k_{AB}$. Следовательно,

$$tgA=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{11}{2}}{1+(-\frac{3}{4})*\frac{11}{2}}=2 \text{ или } A=arctg2\approx 1{,}11\, рад.$$

Задача 2. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение кривой, так как

$$5x^2+9y^2-30x+18y+9=5(x^2-6x)+9(y^2+2y)+9=5(x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2)+$$

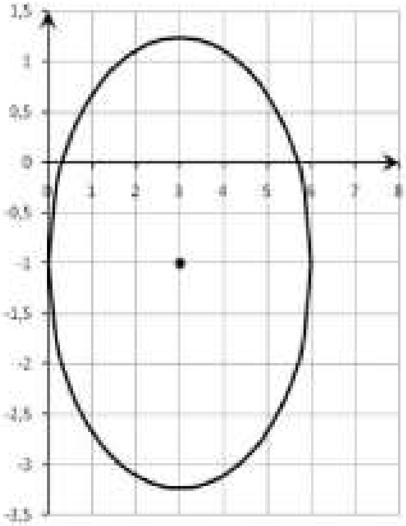
$$+9(y^2+2\cdot 1y+1-1)+9=5(x-3)^2-45+9(y+1)^2-9+9=0,$$

то уравнение можно написать в виде:

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2-45=0$$

или

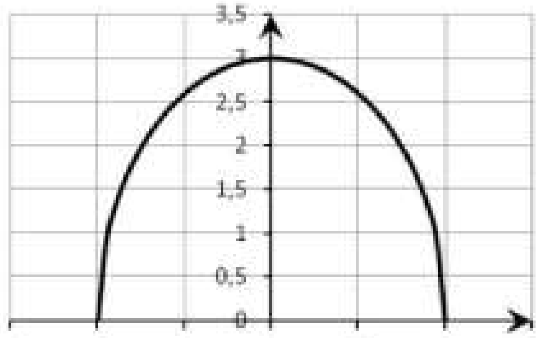
$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$$



Получили каноническое уравнение эллипса, его центр симметрии находится в точке $(3;-1)$, полуоси $a=3$, $b=\sqrt{5}$.

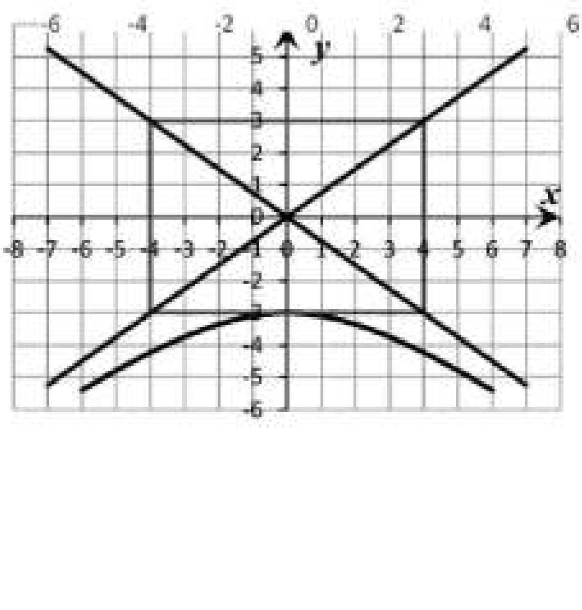
б) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим: $y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$ или $y^2=9-\frac{9}{16}x^2$, $\frac{9}{16}x^2+y^2=9$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ – каноническое уравнение эллипса с



центром в начале координат и полуосями, равными $a=4$, $b=3$. Так как, по условию, в уравнении перед радикалом стоит знак «+», то исходное уравнение определяет часть эллипса, расположенную выше оси Ox.

в) $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16+x^2}$. Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим: $y^2=\frac{9}{16}(16+x^2)$ или $y^2=9+\frac{9}{16}x^2$, $-\frac{9}{16}x^2+y^2=9$, $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями, равными $a=4$, $b=3$. Так как, по условию, в уравнении перед



радикалом стоит знак «-», то исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенную ниже оси Ox.

Задача 3. Найти расстояние от точки $M_0(-12,7,-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(-3,4,-7)$, $M_2(1,5,-4)$, $M_3(-5,-2,0)$.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Получим:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z+7 \\ 1+3 & 5-4 & -4+7 \\ -5+3 & -2-4 & 0+7 \end{vmatrix}=25(x+3)-34(y-4)-22(z+7)=25x-34y-22z+57=0$$ Тогда

используя формулу $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, в которой $A=25,\ B=-34,\ C=-22,\ D=57$,

и $x_0=-12,\ y_0=7,\ z_0=-1$, получим: $d=\dfrac{|25\cdot(-12)-34\cdot 7-22\cdot(-1)+57|}{\sqrt{25^2+(-34)^2+(-22)^2}}=\dfrac{459}{\sqrt{2265}}$ (ед.дл)

Задача 4. Найти угол между плоскостями $x-3y+5=0,\ 2x-y+5z-16=0.$

Решение. Угол между плоскостями находим по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Координаты нормальных векторов заданных плоскостей соответственно равны: $\overrightarrow{n_1}=(1;-3;0)$ и $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;5)$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+0\cdot 5}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{30}}=\frac{5}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Задача 5. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$ с плоскостью $x-2y+z-6=0$.

Решение. Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости от уравнения прямой в каноническом виде переходим к уравнению прямой в параметрическом виде:

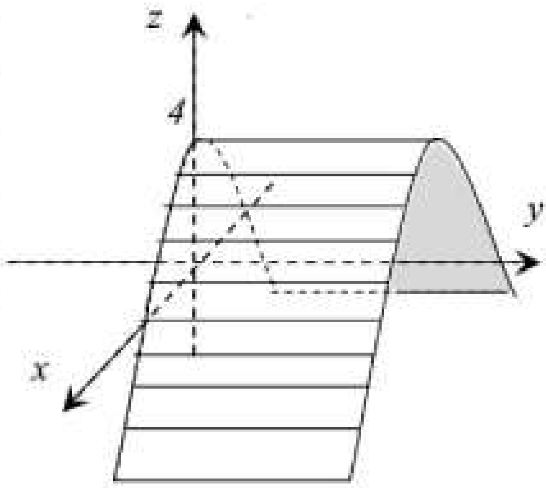
$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1}=t, \\ \dfrac{y-4}{-2}=t, \\ \dfrac{z-5}{1}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+3, \\ y=-2t+4, \\ z=t+5 \end{cases}$$

Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости, получим равенство $t+3-2(-2t+4)+t+5-6=0$ из которого вытекает, что $6t-6=0$, т.е $t=1$.

Следовательно, $\begin{cases} x=t+3=1+4=5, \\ y=-2t+4=-2\cdot 1+4=2, \\ z=t+5=1+5=6. \end{cases}$ точка пересечения имеет координаты $(5, 2, 6)$.

Задача 6. Определить тип поверхности и сделать схематический чертеж $z=4-x^2$.

Решение. Данное уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с направляющей параллельной оси Oy и образующей параболой, которая симметрична относительно оси Ox, сдвинута на 4 единице по оси Oz, направлена в отрицательную сторону оси Oz. Таким образом, данное уравнение описывает параболический цилиндр.



Образец выполнения типового расчета №3

I.Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение

I. Вычислить пределы, не применяя правила Лопиталя.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)\left(\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}\right)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n+2)-(4n-1)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{9n+2}}{n}+\frac{\sqrt{4n-1}}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{5+\frac{3}{\infty}}{\sqrt{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{(3n^2+1)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x+5}{\ln(x+3)}=\frac{2\cdot(-2)+5}{\ln(-2+3)}=\frac{1}{\ln 1}=\frac{1}{0}=\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\text{\textit{Разделим числитель и знаменатель на}}\ (x+3)\right|$

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \underline{x^3+3x^2} & \overline{x^2+2x-3} \\ 2x^2+3x & \\ \underline{2x^2+6x} & \\ -3x-9 & \\ \underline{-3x-9} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2-6x-27 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} & \overline{x-9} \\ -9x-27 & \\ \underline{-9x-27} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg(2x)}{2x}\right)^3\cdot(2x)^3}{\left(\frac{arctg(3x)}{3x}\right)^3\cdot(3x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot(2x)^3}{1\cdot(3x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^3}{27x^3}=\frac{8}{27}$.

7) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\frac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot(x^2-4)}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1}=\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2}{\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\frac{1}{4}$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{2n^2}{n^3}+\dfrac{6n}{n^3}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9n^2}{n^3}+\dfrac{5n^3}{n^3}-\dfrac{8n}{n^3}+\dfrac{4}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9}{n}+5-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}=$

$=\dfrac{2-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{6}{\infty}+\dfrac{12}{\infty}}{\dfrac{9}{\infty}+5-\dfrac{8}{\infty}+\dfrac{4}{\infty}}=\dfrac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\dfrac{2}{5}.$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение. Т.к. знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-2}$ равен нулюпри $x=2$, то функция терпит разрыв при $x=2$. Установим тип этой точки разрыва, для этого найдем предел слева и справа в этой точке.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{-0}}}=\frac{2}{3+5^{-\infty}}=\frac{2}{3+\dfrac{1}{5^{\infty}}}=\frac{2}{3+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{+0}}}=\frac{2}{3+5^{+\infty}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Т.о. у функции существуют и левосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\dfrac{2}{3}$ и правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=0$, но между собой они не равны. Значит точка $x=2$ является точкой разрыва 1 рода. Скачок функции равен $\left|\dfrac{2}{3}-0\right|=\dfrac{2}{3}$.

<u>2 СЕМЕСТР</u>

Образец выполнения типового расчета №1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

д) $y=x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=\ln(8-7t), \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

5. Найти производную неявной функции $x^3+3y^3-xy=0$

Решение

Задание 1.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x}{1}=9$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\dfrac{\pi x}{6}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{ctg\dfrac{\pi x}{6}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(2x-6)'}{\left(ctg\dfrac{\pi x}{6}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}\cdot\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\dfrac{-1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{6}}=-\dfrac{12}{\pi}$

Задание 2.

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$

$y'=\left(5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}\right)'=\left(5x^3-8x^{-2}+4x^{1/2}\right)'=5\cdot 3x^2-8\cdot(-2)x^{-3}+4\cdot\dfrac{1}{2}x^{-1/2}=$

$=15x^2+\dfrac{16}{x^3}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$y'=\left(\dfrac{\cos x}{x^3+9}\right)'=\dfrac{(\cos x)'(x^3+9)-\cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2}==\dfrac{-\sin x\cdot(x^3+9)-3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}$.

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

$y'=\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)'=$

$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-2x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}=$

$=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}$.

г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

$y'=\left(2arctgx+3^x\right)'\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)'\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$

$=\left(2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0\right)\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$

$=\left(\dfrac{2}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx+3^x\right)$

д) $y=x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y=\ln(x^{e^x})$; $\ln y=e^x\ln x$;

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x};\qquad y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

$$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

Задание 3. Найти производную y'_x функции $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arccos t \end{cases}$

Вычислим x'_t и y'_t :

$$x'_t=\frac{1}{1+t^2}2t=\frac{2t}{1+t^2},\qquad y'_t=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x_t}=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$$

Задание 4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

Решение.

Исследуем функцию на монотонность и найдем экстремум

$$y'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Найдем критические точки 1рода

$$y'=0,\qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0,$$

$x=1,\quad x=-1$.

При $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ функция убывает,

при $x\in(-1,1)$ функция возрастает.

$x=-1$ - точка минимума, $y_{min}=y(-1)=\dfrac{-1}{1+(-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$.

$x=1$ - точка максимума, $y_{max}=y(1)=\dfrac{1}{1+1^2}=\dfrac{1}{2}$.

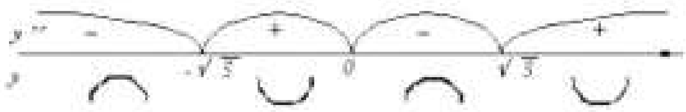
Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2-(1-x^2)((1+x^2)^2)'}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2x(1+x^2)(1-x^2-2x^2)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Найдем критические точки 2 рода:

$y''=0$, $\dfrac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3}=0.$



$x=0, \quad x=\sqrt{3}, \quad x=-\sqrt{3}$

При $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ функция выпуклая,

при $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ функция вогнутая.

$x=0, \quad x=\sqrt{3}, \quad x=-\sqrt{3}$ - точки перегиба.

Задание 5. Найти производную функции $x^3+3y^3-xy=0$

Продифференцируем по x равенство $x^3+3y^3-xy=0$:

$$3x^2+3\cdot 3y^2\cdot y'-xy'-y=0$$

Из полученного соотношения найдем y':

$3x^2-y=(-9y^2+x)y'$

$y'=\dfrac{3x^2-y}{x-9y^2}$

Образец выполнения типового расчета №2

1. $\int \sin^3 x\cos x dx$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx$

3. $\int x^3 e^{x^4} dx$

4. $\int (3x+2)\sin 2x\, dx$

5. $\int \dfrac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

6. $\int \dfrac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

7. $\int \dfrac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$.

8. $\int \dfrac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$

9. $\int \dfrac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

10. $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

Решение

1. $\int \sin^3 x \cos x dx = |\cos x dx = d \sin x| = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

2. $\int x\sqrt{x+4}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x+4} = t, & x = t^2 - 4 \\ dx = (t^2-4)' dt = 2tdt & \end{vmatrix} = \int (t^2 - 4) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 - 4t^2)dt =$

$= 2\left(t^4 - 4t^2\right) + C = 2\frac{t^5}{5} - 8\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3} + C$.

3. $\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int e^{x^4} 4x^3 dx = \left|4x^3 dx = dx^4\right| = \frac{1}{4}\int e^{x^4} dx^4 = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$.

4. $\int (3x+2)\sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = 3x+2 \Rightarrow du = (3x+2)' dx = 3dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = \int dv = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot 3dx = -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx =$

$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C$

5. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$

Разложим знаменатель на множители $(x^2+2x-3)(x-4) = (x-1)(x+3)(x-4)$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие

$$\frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2+2x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$2x^2 + 41x - 91 = A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3)$;

$2x^2 + 41x - 91 = A(x^2 - x - 12) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 + 2x - 3)$;

$2x^2 + 41x - 91 = (A+B+C)x^2 + (-A - 5B + 2C)x + (-12A + 4B - 3C)$.

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A + B + C = 2 \\ x & -A - 5B + 2C = 41 \\ x^0 & -12A + 4B - 3C = -91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим $A = 4, \quad B = -7, \quad C = 5$.

$\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx = \int \frac{4}{x-1} dx - \int \frac{7}{x+3} dx + \int \frac{5}{x-4} dx =$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$$

6. $$\int\frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^5}-\frac{x^5e^x}{x^5}-\frac{14}{x^5}\right)dx=\int\left(3x^{-3}-e^x-14x^{-5}\right)dx=$$

$$=3\int x^{-3}dx-\int e^xdx-14\int x^{-5}dx=3\frac{x^{-2}}{-2}-e^x-14\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{2x^2}-e^x+\frac{7}{2x^4}+C.$$

7. $$\int\frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}4dx=\left|\frac{dx}{x}=d\ln x\right|=\int\sqrt[4]{\ln x}\,d\ln x=\frac{(\ln x)^{5/4}}{5/4}+C=\frac{4}{5}\sqrt[4]{\ln^5 x}+C.$$

8. $$\int\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{x-1}=t, & x=t^2+1\\ & dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{t+1}{t-1}2tdt=2\int\frac{t^2+t}{t-1}dt=$$

$$=2\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|\right)+C=t^2+4t+4\ln|t-1|+C=$$

$$=x-1+4\sqrt{x-1}+4\ln\left|\sqrt{x-1}-1\right|+C.$$

9. $$\int\frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}=\left|\begin{array}{c}tg\frac{x}{2}=t,\quad x=2arctgt\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C.$$

10. $$\int\sqrt{9-x^2}dx=\left|\begin{array}{ll}x=3\sin t, & dx=3\cos tdt\\ t=\arcsin\frac{x}{3}, & \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t\end{array}\right|=\int 3\cos t\cdot 3\cos tdt=$$

$$=9\int\cos^2 tdt=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)+C$$

$$\left(\sin\arcsin\frac{x}{3}=\frac{x}{3},\quad \frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}2\sin t\cos t=\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)$$

Образец выполнения типового расчета №3

1.Вычислить $\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

2. Вычислить $\int\limits_1^2 x^2\ln x dx$.

3. Вычислить $\int\limits_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

5.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=3\sqrt{2}\sin t\end{cases}$, $y=3$ ($y\geq 3$).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2=(x+1)^3$, $-1\leq x\leq 4$.

8.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases}x=\dfrac{t^6}{6}\\ y=2-\dfrac{t^4}{4}\end{cases}$, $0\leq t\leq\sqrt[4]{8}$.

9.Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\leq\varphi\leq\pi$.

10.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение.

Задание 1.Вычислить $\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int\limits_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_e^{e^2}=\ln\left|\ln e^2\right|-\ln|\ln e|=\ln|2\ln e|-\ln 1=\ln 2$$

Задание 2. Вычислить $\int\limits_1^2 x^2\ln x dx$.

Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$,

тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}$.

Согласно формуле $\int\limits_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$ получим:

$$\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\left(2^3 \ln 2 - \ln 1\right) - \frac{1}{3}\int\limits_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} = \frac{24\ln 2 - 7}{9}.$$

Задание 3. Вычислить $\int\limits_1^{64} \dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Первообразную найдем, введя подстановку $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. При $x = 1$, $t_1 = \sqrt[6]{1} = 1$; при $x = 64$, $t = \sqrt[6]{64} = 2$.

$$\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \int\limits_1^2 \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int\limits_1^2 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6\int\limits_1^2 \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt =$$

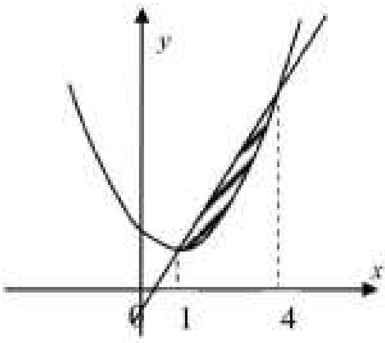
$$= 6\int\limits_1^2 \frac{t^2+1}{1+t^2} dt - 6\int\limits_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt = 6t\Big|_1^2 - 6arctg\, t\Big|_1^2 = 6(2-1) - 6(arctg 2 - arctg 1) =$$

$$= 6 - 6\left(arctg 2 - \frac{\pi}{4}\right) = 6 + \frac{3\pi}{2} - 6arctg 2.$$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

Сделаем чертеж. Уравнению $y = x^2 - 2x + 3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x = 1$, $y = 2$, т. к. $y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2$. Уравнению $y = 3x - 1$ соответствует прямая.

Найдем точки пересечения заданных линий



$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases} \quad x^2 - 2x + 3 = 3x - 1, \; x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

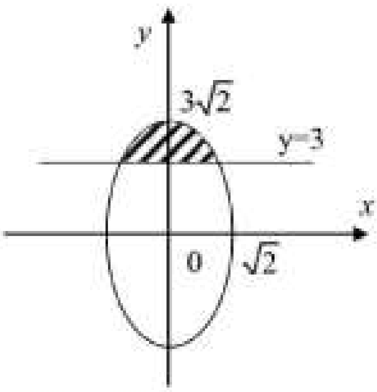
$$\int_1^4 (3x - 1 - (x^2 - 2x + 3))dx = \int_1^4 (3x - 1 - x^2 + 2x - 3)dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - 4 - x^2)dx = \frac{5x^2}{2}\bigg|_1^4 - 4x\big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 5.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}, \; y = 3 \; (y \geq 3).$$

Решение:



Уравнениями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

Уравнению $y = 3$ соответствует прямая, параллельная осиOx. Сделаем чертеж. Получаем фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx .$$

Найдем пределы изменения параметра t. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=3\sqrt{2}\sin t \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3=3\sqrt{2}\sin t ,$$

$$\sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ t=(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+k\pi, \qquad k\in Z$$

При $k=0$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; при $k=1$, $t_2=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$.

Значит $\frac{3\pi}{4}\ge t\ge\frac{\pi}{4}$, $dx=-\sqrt{2}\sin t dt$.

Искомая площадь равна

$$S=\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\left(3\sqrt{2}\sin t-3\right)\left(-\sqrt{2}\right)\sin t dt=-6\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin^2 t dt+3\sqrt{2}\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin t dt=$$

$$=-6\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-3\sqrt{2}\cos t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}=-3\int_{3\pi/4}^{\pi/4}dt+3\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\cos 2t dt-$$

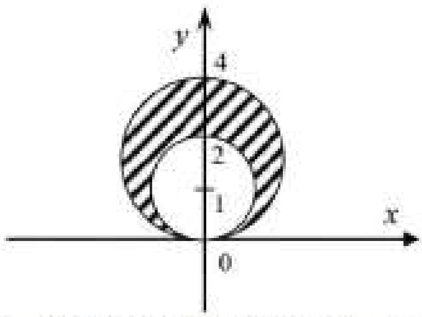
$$-3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)=-3t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}+\frac{3}{2}\sin 2t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}-3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=-3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-6=\frac{3\pi}{2}-3\,(\text{кв. ед.}).$$

Задание 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r=2\sin\varphi$.



Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, а $r\sin\varphi = y$, и умножая обе части равенства $r = 2\sin\varphi$ на r, получим

$r^2 = 2r\sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2y$,

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$,

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – это окружность с центром в точке (0; 1) и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r = 4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке (0; 2) и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$.

Площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left((4\sin\varphi)^2 - (2\sin\varphi)^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_0^{\pi} d\varphi - 3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = = 3(\pi - 0) - \frac{3}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 3\pi$$

(кв. ед.).

Задание 7. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \le x \le 4$.

Решение:

Уравнению $y^2 = (x+1)^3$, или $y = \pm\sqrt{(x+1)^3} = \pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Возьмем $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$.

Тогда

$$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx =$$

$$= \int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx = \frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}(9x+13)^{\frac{1}{2}}\,d(9x+13) = \frac{2}{18}\,\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{1}{27}(343-8) = \frac{1}{27}\cdot 335 = \frac{335}{27} \text{ (лин. ед.).}$$

Задание 8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

Решение:

Длина дуги вычисляется по формуле $L=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt$.

Найдем $x_t'=\left(\dfrac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y_t'=\left(2-\dfrac{t^4}{4}\right)'=-t^3$.

Тогда $L=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(8+1)^3}-1\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\text{ (лин. ед.)}$$

Задание 9. Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

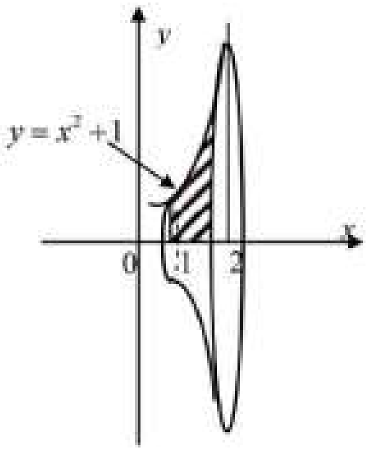
Найдем $r'=(2\sin\varphi)'=2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\,d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_0^{\pi}=2(\pi-0)=2\pi\text{ (лин. ед.)}.$$

Задание 10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение:

Сделаем чертеж.



$$V_x = \pi\int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi\int_1^2 x^4\,dx + 2\pi\int_1^2 x^2\,dx + \pi\int_1^2 dx = \pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 + 2\pi\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 +$$

$$+\pi\left. x\right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(2^5-1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(2^3-1\right) + \pi(2-1) = \frac{178}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ №10

ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1

ВАРИАНТ № 1

1. Вычислить $(AB)C+2A(BC)$, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases}7x-5y-2z=1\\ x+2y-z=-6\\ 5x-10y+z=16\end{cases}$

3. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases}7x-5y-2z=1\\ x+2y-z=-6\\ 6x-7y-z=7\end{cases}$

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$

Решение.

1.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot1+1\cdot5 & -1\cdot(-5)+1\cdot1\\ 3\cdot1+(-2)\cdot5 & 3\cdot(-5)+(-2)\cdot1\\ (-2)\cdot1+3\cdot5 & (-2)\cdot(-5)+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -7 & -17\\ 13 & 13\end{pmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -7 & -17\\ 13 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+6\cdot2\\ (-7)\cdot4+(-17)\cdot2\\ 13\cdot4+13\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\ -62\\ 78\end{pmatrix};$$

$$(AB)C+2(AB)C=3(AB)C=3\cdot\begin{pmatrix}28\\ -62\\ 78\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\ -186\\ 234\end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{cases} 7x-5y-2z=1 \\ x+2y-z=-6 \\ 5x-10y+z=16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-1)\cdot5+(-2)\cdot1\cdot(-10)-(-2)\cdot2\cdot5-(-5)\cdot1\cdot1-7\cdot(-1)\cdot(-10)=$$

$$=14+25+20-(-20)-(-5)-70=59+20+5-70=14\,\mathbf{;}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 16 & -10 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-1)\cdot16+(-2)\cdot(-6)\cdot(-10)-(-2)\cdot2\cdot16-(-5)\cdot(-6)\cdot1-1\cdot(-1)\cdot(-10)=$$

$$=2+80-120+64-30-10=14\,\mathbf{;}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot(-6)\cdot1+1\cdot(-1)\cdot5+(-2)\cdot1\cdot16-(-2)\cdot(-6)\cdot5-1\cdot1\cdot1-7\cdot(-1)\cdot16=$$

$$=-42-5-32-60-1+112=-28;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ 5 & -10 & 16 \end{vmatrix} = 7\cdot2\cdot16+(-5)\cdot(-6)\cdot5+1\cdot1\cdot(-10)-1\cdot2\cdot5-(-5)\cdot1\cdot16-7\cdot(-6)\cdot(-10)=$$

$$=224+150-10-10+80-420=14$$

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{14}{14}=1;$ $\quad y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-28}{14}=-2;$ $\quad z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{14}{14}=1;$ $\quad$ Ответ: (1; -2; 1).

3.

$$\begin{cases} 7x-5y-2z=1 \\ x+2y-z=-6 \\ 6x-7y-z=7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 6 & -7 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & -5 & -43 \\ 0 & -19 & 5 & 43 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & -5 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$r_1=2=r_2 \quad \Rightarrow \quad$ система совместна;

$r_1=2=r_2<n=3 \quad \Rightarrow \quad$ система неопределенна;

$n-r=1$ - количество свободных неизвестных;

Пусть $z=C$, $C\in R$. Тогда $\begin{cases} 7x-5y-2z=1 \\ 19y-5z=-43 \\ z=C \end{cases}$ $\begin{cases} 7x-5y-2z=1 \\ 19y=-43+5C \\ z=C \end{cases}$ $\begin{cases} 7x-5y-2z=1 \\ y=\dfrac{-43+5C}{19} \\ z=C \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x = 1 + 5\cdot\dfrac{-43+5C}{19} + 2C \\ y = \dfrac{-43+5C}{19} \\ z = C \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{7}\left(1 + 5\cdot\dfrac{-43+5C}{19} + 2C\right) \\ y = \dfrac{-43+5C}{19} \\ z = C \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-28+9C}{19}; \\ y = \dfrac{-43+5C}{19}; \quad C \in R. \\ z = C; \end{cases}$$

Ответ: Общее решение $\left(\dfrac{-28+9C}{19};\quad \dfrac{-43+5C}{19};\quad C\right),\quad C \in R.$

Частное решение $(-1;\ \ -2;\ \ 1),\ \ при\ \ \ C = 1.$

4.

Решение. Разложим определитель, например, по третьей строке, так как в ней один из элементов равен нулю, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3A_{31} + 3A_{32} + 0A_{33} + 2A_{34} =$$

$$= 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(6+18-20-3) - 3(6+6+10-18-20-1) - 2(12+12-6-4) =$$

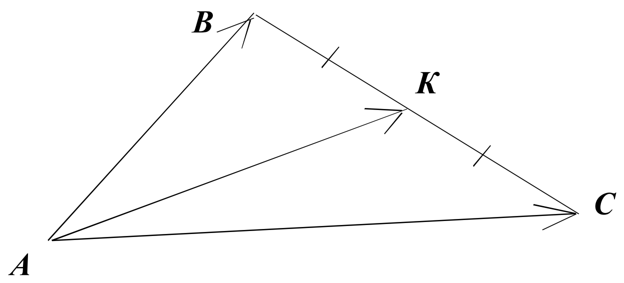
$$= 3 - 3(-17) - 2(14) = 3 + 51 - 28 = 26.$$

Образец выполнения контрольной работы №2

1. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, точка K – середина стороны BC. Выразить вектор $\overline{AK}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D.
3. Найти координаты вектора $\bar{a} \times (2\bar{a} + \bar{b})$, если $\bar{a} = (3;-1;-2)$, $\bar{b} = (1;2;-1)$.
4. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.
5. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x + 3y - 5z - 15 = 0$ и координатными плоскостями.

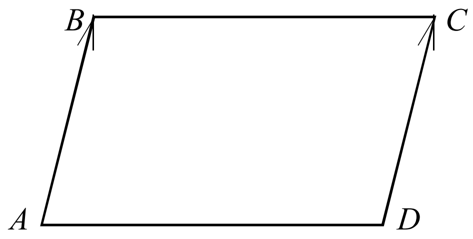
Решение:

1.



Если на векторах $\overline{AB}=\overline{a},\ \ \overline{AC}=\overline{b}$ достроить параллелограмм *ABDC*, то окажется, что точка К – точка пересечения его диагоналей. Тогда вектор $\overline{AK}$ равен половине вектора суммы $\overline{a}+\overline{b}$ по правилу параллелограмма сложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Поэтому, $\overline{AK}=\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$.

2.



$\overline{AB}=B-A=\left(3-1;\ 2-(-2);\ 1-3\right)=\left(2;\ 4;\ (-2)\right)$.

Обозначим координаты точки *D* через (*x; y; z*). Тогда

$\overline{DC}=C-D=\left(6-x;\ 4-y;\ 4-z\right)$.

Т.к. *ABCD* – параллелограмм, то $\overline{AB}=\overline{DC}$. Следовательно,

$$6-x=2;\ 4-y=4;\ 4-z=-2.$$

Отсюда, $x=4;\ y=0;\ z=6.$

Ответ: *D*(4; 0; 6).

3. **Найти координаты вектора $\bar{a}\times(2\bar{a}+\bar{b})$, если $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$.**

1) $2\overline{a}+\overline{b}=2\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\-5\end{pmatrix};$

2) $\overline{a}\times\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 7 & 0 & -5\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -5\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & -5\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 7 & 0\end{vmatrix}=5\overline{i}+29\overline{j}+7\overline{k}=\begin{pmatrix}5\\29\\7\end{pmatrix}.$

Ответ: $\overline{a}\times\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)=(5;\ 29;\ 7).$

4. **Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2-8x+12=0$.**

Центр окружности $x^2+y^2=9$: $O_1(0;0)$.

Для того, чтобы найти центр окружности $x^2+y^2-8x+12=0$ приведем это уравнение к каноническому виду:

$$x^2+y^2-8x+12=0;$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+y^2+12=0;$$
$$(x-4)^2-16+y^2+12=0;$$
$$(x-4)^2+y^2=4;$$

Центр этой окружности $(x-4)^2+y^2=4$: $O_2(4;0)$.

Отсюда находим расстояние O_1O_2: $\left|\overline{O_1O_2}\right|=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2}=4$.

Ответ: $O_1O_2=4$.

5. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостью $x+3y-5z-15=0$ и координатными плоскостями.

Приведем данное уравнение к «уравнению в отрезках»:

$$x+3y-5z-15=0;$$
$$x+3y-5z=15;$$
$$\frac{x}{15}+\frac{y}{5}+\frac{z}{-3}=1;$$

Отсюда следует, что данная пирамида построена на векторах:
(15; 0; 0), (0; 5; 0) и (0; 0; -3).
Тогда

$$V=\frac{1}{6}\left|\,\begin{vmatrix}15&0&0\\0&5&0\\0&0&-3\end{vmatrix}\,\right|=\frac{1}{6}\left|-225\right|=\frac{225}{6}\text{ куб. ед.}$$

Образец выполнения контрольной работы №3

I.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}$

Решение

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{2n^2}{n^3}+\dfrac{6n}{n^3}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9n^2}{n^3}+\dfrac{5n^3}{n^3}-\dfrac{8n}{n^3}+\dfrac{4}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9}{n}+5-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}=$

$=\dfrac{2-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{6}{\infty}+\dfrac{12}{\infty}}{\dfrac{9}{\infty}+5-\dfrac{8}{\infty}+\dfrac{4}{\infty}}=\dfrac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\dfrac{2}{5}.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\frac{(3n^2+1)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}=\dfrac{2\cdot(-2)+5}{\ln(-2+3)}=\dfrac{1}{\ln 1}=\dfrac{1}{0}=\infty.$

4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\text{Разделим числитель и знаменатель на } (x+3)\right|$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\
-\;x^3+3x^2 & \overline{x^2+2x-3} \\
\hline
2x^2+3x & \\
-\;2x^2+6x & \\
\hline
-3x-9 & \\
-\;-3x-9 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2-6x-27 & x+3 \\
-\;x^2+3x & \overline{x-9} \\
\hline
-9x-27 & \\
-\;-9x-27 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x-9}=\dfrac{0}{-12}=0.$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\dfrac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=$

$=\dfrac{1}{2\cdot(4+4)}=\dfrac{1}{16}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{tg(2x)}{2x}\right)^3\cdot(2x)^3}{\left(\dfrac{arctg(3x)}{3x}\right)^3\cdot(3x)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1\cdot(2x)^3}{1\cdot(3x)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x^3}{27x^3}=\dfrac{8}{27}.$

7) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\dfrac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot(x^2-4)}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{2x-1}=\dfrac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\dfrac{-4}{-5}=\dfrac{4}{5}.$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{4x^2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1\cdot x^2}{1\cdot4x^2}=\dfrac{1}{4}.$

2 СЕМЕСТР

Образец выполнения контрольной работы №1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{2x^2}$. 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

д) $y=x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции

$$\begin{cases}x=\ln(8-7t),\\ y=t^7-7t^2.\end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности,экстремум функции:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Решение

Задание 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x}{1}=9.$$

Задание 2.

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$

$$y'=\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}\right)'=\left(5x^3-8x^{-2}+4x^{1/2}\right)'=5\cdot 3x^2-8\cdot(-2)x^{-3}+4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}=$$

$$=15x^2+\frac{16}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}$$

б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)'=\frac{(\cos x)'(x^3+9)-\cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2}=\frac{-\sin x\cdot(x^3+9)-3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)'=$$

$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

$$y'=\left(2arctgx+3^x\right)'\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)'\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0\right)\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$\left(\frac{2}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx+3^x\right)$$

д) $y=x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y=\ln(x^{e^x})$; $\ln y=e^x\ln x$;

Продифференцируем обе части равенства:

$\dfrac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}$; $\qquad y'=y\left(e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}\right)$

$$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

Задание 3. Найти производую y'_x функции $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arccos t \end{cases}$

Вычислим x'_t и y'_t :

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}2t = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}$$

Задание 4.Найти интервалы монотонности, экстремум функции: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Решение.

Найдем первую производную

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$ Найдем

критические точки 1рода

$$y' = 0, \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0,$$

$x = 1, \quad x = -1.$

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ функция убывает,

при $x \in (-1, 1)$ функция возрастает.

$x = -1$ - точка минимума, $y_{\min} = y(-1) = \dfrac{-1}{1+(-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$x = 1$ - точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.

при $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$ функция вогнутая.

$x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$ - точки перегиба.

Образец выполнения контрольной работы №2

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$.
2. $\int x\sqrt{x+4}dx$
3. $\int \dfrac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$
4. $\int (3x+2)\sin 2x\, dx$

5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$ 6. $\int \frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx$

Решение

1. $\int \sin^3 x\cos x dx = \left|\cos x dx = d\sin x\right| = \int \sin^2 x d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3}+C.$

2. $\int x\sqrt{x+4}dx = \left|\begin{matrix}\sqrt{x+4}=t, & x=t^2-4\\ dx=(t^2-4)'dt=2tdt\end{matrix}\right| = \int (t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4-4t^2)dt =$

$$=2\left(t^4-4t^2\right)+C=2\frac{t^5}{5}-8\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3}+C.$$

3. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x} = \left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right| =$

$$=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2+1}=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C.$$

4. $\int (3x+2)\sin 2xdx = \left|\begin{matrix} u=3x+2 \quad \Rightarrow \quad du=(3x+2)'dx=3dx\\ dv=\sin 2xdx \quad \Rightarrow \quad v=\int dv=\int \sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right| =$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x-\int -\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 3dx=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x+\frac{3}{2}\int \cos 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C$$

5. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

Разложим знаменатель на множители $(x^2+2x-3)(x-4)=(x-1)(x+3)(x-4)$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$2x^2+41x-91=A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)$;

$2x^2+41x-91=A(x^2-x-12)+B(x^2-5x+4)+C(x^2+2x-3)$;

$2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+(-A-5B+2C)x+(-12A+4B-3C)$.

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=2 \\ x & -A-5B+2C=41 \\ x^0 & -12A+4B-3C=-91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим $A=4$, $B=-7$, $C=5$.

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx = \int \frac{4}{x-1}dx - \int \frac{7}{x+3}dx + \int \frac{5}{x-4}dx =$$

$$= 4\int \frac{d(x-1)}{x-1} - 7\int \frac{d(x+3)}{x+3} + 5\int \frac{d(x-4)}{x-4} = 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$$

6. $\int \frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx = \int \left(\frac{3x^2}{x^5} - \frac{x^5e^x}{x^5} - \frac{14}{x^5}\right)dx = \int \left(3x^{-3} - e^x - 14x^{-5}\right)dx =$

$$= 3\int x^{-3}dx - \int e^x dx - 14\int x^{-5}dx = 3\frac{x^{-2}}{-2} - e^x - 14\frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{2x^2} - e^x + \frac{7}{2x^4} + C.$$

Образец выполнения контрольной работы №3

Вариант №1

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

2.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y=0$

($y \geq 0$).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

4. Вычислить длину дуги линии $y^2=(x+1)^3$, $-1 \leq x \leq 4$.

5.Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}$.

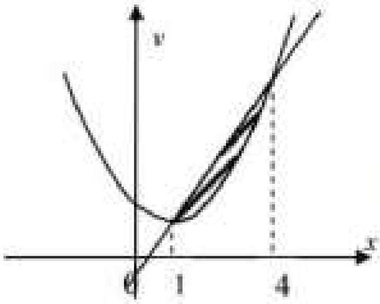
6.Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

7.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение.

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

Сделаем чертеж. Уравнению $y=x^2-2x+3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x=1$, $y=2$, т. к. $y=x^2-2x+3 \Rightarrow y-2=(x-1)^2$.



Уравнению $y = 3x - 1$ соответствует прямая.

Найдем точки пересечения заданных линий $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ $x^2 - 2x + 3 = 3x - 1$, $x^2 - 5x + 4 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

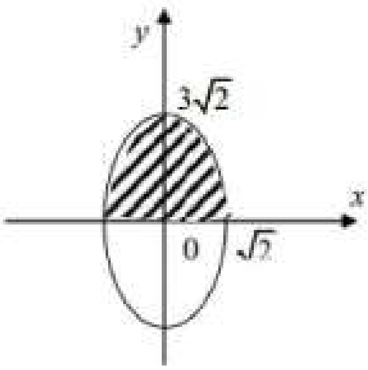
$$\int_1^4 (3x - 1 - (x^2 - 2x + 3))dx = \int_1^4 (3x - 1 - x^2 + 2x - 3)dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - 4 - x^2)dx = \frac{5x^2}{2}\Bigg|_1^4 - 4x\Big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 0$ ($y \ge 0$).

Решение:

Уравнениями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$).



Уравнению $y = 0$ соответствует ось Ox. Сделаем чертеж. Получаем заштрихованную фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

Найдем половину искомой площади, параметр $t \in \left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$$\frac{1}{2}S = \int_{\pi/2}^{0} 3\sqrt{2}\sin t\left(-\sqrt{2}\right)\sin t dt = -6\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t dt = 6\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 6\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 3\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos 2t\right)dt =$$

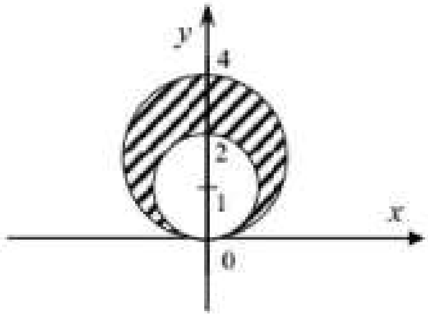
$$= 3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}.$$

Тогда искомая площадь будет равна $S = 2\cdot\frac{3\pi}{2} = 3\pi$ (кв. ед.).

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r = 2\sin\varphi$.



Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, а $r\sin\varphi = y$, и умножая обе части равенства $r = 2\sin\varphi$ на r, получим

$r^2 = 2r\sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2y$,

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$,

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ – это окружность с центром в точке (0; 1) и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r = 4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке (0; 2) и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$.

Площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left((4\sin\varphi)^2 - (2\sin\varphi)^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_0^{\pi}d\varphi - 3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = = 3(\pi - 0) - \frac{3}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = 3\pi$$

(кв. ед.).

Задание 4. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, $-1 \le x \le 4$.

Решение:

Уравнению $y^2 = (x+1)^3$, или $y = \pm\sqrt{(x+1)^3} = \pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Возьмем $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$.

Тогда

$$L = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx = \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx =$$

$$=\int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx=\frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}(9x+13)^{\frac{1}{2}}d(9x+13)=\frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3}-\sqrt{4^3}\right)=\frac{1}{27}(343-8)=\frac{1}{27}\cdot 335=\frac{335}{27}\text{ (лин. ед.)}.$$

Задание 5. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases},\quad 0\le t\le\sqrt[4]{8}$.

Решение:

Длина дуги вычисляется по формуле $L=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t'))^2}dt$.

Найдем $x_t'=\left(\frac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y_t'=\left(2-\frac{t^4}{4}\right)'=-t^3$. Тогда

$$L=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}dt=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}dt=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_{0}^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_{0}^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(8+1)^3}-1\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\text{ (лин. ед.)}$$

Задание 6. Вычислить длину дуги линии $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L=\int_{0}^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi.$$

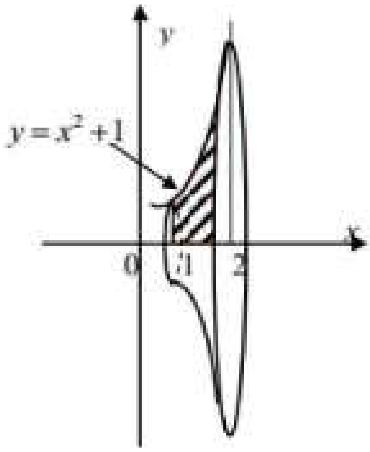
Найдем $r'=\left(2\sin\varphi\right)'=2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L=\int_{0}^{\pi}\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}d\varphi=\int_{0}^{\pi}\sqrt{4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}d\varphi=2\int_{0}^{\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_{0}^{\pi}=2(\pi-0)=2\pi\text{ (лин. ед.)}.$$

Задание 7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение:

Сделаем чертеж.



$$V_x = \pi\int_1^2 (x^2+1)^2 dx = \pi\int_1^2 x^4 dx + 2\pi\int_1^2 x^2 dx + \pi\int_1^2 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\pi\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 +$$

$$+\pi x\Big|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(2^5-1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(2^3-1\right) + \pi(2-1) = \frac{178}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ №11

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Оценка промежуточной аттестации:

- 10 баллов - Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

- 20 баллов - Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Критерии оценивания вопросов для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

баллы	Критерии
8-10	глубоко и прочно усвоил теоретический материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, усвоил методы математического анализа проведения исследований и анализа их результатов
5-7	понимает содержание основных методов математического анализа, грамотно излагает их суть, допуская незначительные неточности в формулировках определений и теорем
1-3	допускает неточности в формулировках определений, теорем; недостаточно владеет теоретическим материалом
0	не знает основных понятий и методов математического анализа

Критерии оценивания заданий для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

баллы	Критерии
20-16	владеет математическими методами, разносторонними навыками и приемами решения практических задач, уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 85-100 % практических заданий)
15-11	умеет применять математические методы, но допускает недочеты и ошибки при решении практических задач, недостаточно уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 50-85 % практических заданий)
10-6	испытывает затруднения при решении практических заданий (в билете решено 30-50 % практических заданий)
5-0	не владеет математическим инструментарием, допускает грубые ошибки при решении практических задач (в билете решено менее 30 % практических заданий)