Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство науки, высшего образования и инноваций Кыргызской Республики
Межгосударственная образовательная организация высшего образования Кыргызско-Российский Славянский университет имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина.
Политехнический институт
Высшая школа цифровых технологий

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки
01.03.02 - РФ, 510200 - КР, Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки)

Квалификация
Бакалавр

Бишкек 2026

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки (специальности) « Прикладная математика и инфор матика» по дисциплине

«**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Наименование

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании высшей школы

Цифровые технологии

Наименование высшей школы

Протокол №1 от «02» 09. 2026г.

Директор высшей школы Цифровых технологий



Хмелева Ирина Владимировна

наименование кафедры *подпись* *расшифровка подписи*

Руководитель образовательной программы

Доулбекова Салтанат Байызбековна Доцент 

ФИО *должность* *подпись*

Исполнители:

Профессор  Керимбеков Акылбек

должность *подпись* *расшифровка подписи*

Доцент  Аширбаев Бейшембек Ыбышевич

должность *подпись* *расшифровка подписи*

Раздел 1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Виды оценочных средств/ шифр раздела в данном документе
ОПК-2.Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	**Знать:** Знать: -методы решения линейных уравнений; -методы решения нелинейных уравнений; -операторные методы решения уравнений; -графические методы решения задач; -методы оптимизации и оптимального управления; -численные методы решения прикладных задач; -возможности аппаратных и программных средств; -особенности Системного ПО их функционирования в многозадачных ОС; -средства разработки приложений, их состав и функции; -организацию программного обеспечения, типовые методы организации и свойства компонент операционных систем, механизмы исполнения программ в операционных системах; -основные конструкции языков программирования и принципы разработки программ, динамические структуры данных, объектно-ориентированную методологию программирования.	Блок A, D − задания репродуктивного уровня −Устный опрос
	Уметь: -разработать на основе аналитических методов алгоритм решения математических и прикладных задач для использования их на практике;	Блок B, D − задания реконструктивного уровня

	-разработать алгоритм численных методов решения нелинейных прикладных задач для использования ихв приложениях; -использовать разработанные алгоритмы для решения прикладных задач естественных наук; -осуществлять обоснованный выбор средств программирования; -использовать изученные алгоритмы программирования для решения конкретных задач; -самостоятельно создавать и тестировать системные модули, используя передовые информационные технологии; применять знания в разработке баз данных; применять знания построения системных и обрабатывающих программ; демонстрировать глубокие знания: -построения параллельных программ; -работать в среде разработки Microsoft Visual Studio.NET; использовать регулярные выражения; создавать простейшие Web Application Project с применением форм и проверкой данных при вводе их пользователем.	− Решение практических заданий
	<u>Владеть:</u> -навыками примения аналитических и численных методов решения линейных, нелинейных и операторных уравнений при исследовании и решении прикладных задач и задач естественных наук; - навыками программирования и осуществлять поиск дополнительной информации для изучения тематических разделов по математике и информатике; -основными навыками работы в операционной среде WINDOWS;	Блок C , D – задания практикоориентированного и/или исследовательского уровня -кантрольные работы

	- получить основные навыки в работе с основными приложениями, входящими в состав пакета Microsoft Office; -навыками работы со стандартными средами современных операционных систем и разработки собственных приложений системного назначения; - методами и средствами программирования распределенных ВС и сетей; -методами и средствами анализа и разработки программных компонентов сетевых и телекоммуникационных систем; - понятия о нормализации баз данных; - навыками работы со стандартными средами современных операционных систем -навыками разработки собственных параллельных приложений. - навыками работы в среде разработки Microsoft Visual Studio.NET; - навыками создании, отладке, компиляции и выполнении программы на C#; - навыками использования справочной системы среды программирования .NET	
ОПК-3.Способен применять и модифицировать математически модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**Знать:** -основные методы и законы математики и естественных наук; -известные математические модели, используемые в приложениях; -способы составления математических моделей для прикладных задач математики и естественных наук; -способы применения математических моделей при фундаментальных исследованиях и решении прикладных задач; -способы преобразования задач с целью их модификации.	Блок А , D – задания репродуктивного уровня –Устный опрос

	Уметь: -составить математические модели прикладных задач математики и естественных наук; -модифицировать математические модели прикладных задач и задач естественных наук	Блок B , D – задания реконструктивного уровня – Решение практических заданий
	Владеть: -навыками составления математическими моделям прикладных задач математики и естественных наук и их применениями на практике; -навыками модификации прикладных задач математики и задач естественных наук и их применениями на практике.	Блок C , D – задания практикоориентированного и/или исследовательского уровня -контрольные работы

Раздел 2. Технологическая карта дисциплины

Технологическая карта дисциплины

«Интегральные уравнения»

Курс/семестр: 4/7
Количество кредитов(ЗЕ): 5
Отчетность: Экзамен

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Интегральное уравнение Вольтерра и его связь с дифференциальными уравнениями.	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС	2	3	4
	Рубежный контроль	Контрольная работа	6	10	
Модуль 2					
Линейные интегральные уравнения Фредгольма. Теорема Фредгольма.	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС	2	3	7
	Рубежный контроль	Контрольная работа	6	12	
Модуль 3					
Интегральные уравнения с симметричным и ядрами.	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС	2	3	10
	Рубежный контроль	Контрольная работа	6	10	
Модуль 4					
Интегральные операторные уравнения с параметром	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС	2	3	13
	Рубежный контроль	Контрольная работа	6	13	
Модуль 5					
Не фредгольмовы интегральные уравнения	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС	2	3	16
	Рубежный контроль	Контрольная работа	6	10	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (Экзамен)			20	30	

Семестровый рейтинг по дисциплине	60	100
Модуль	логически завершенная часть дисциплины	
Текущий контроль	самостоятельная работа студента, посещаемость и активность на занятиях	
Рубежный контроль	проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом	
Промежуточный контроль	завершенная задокументированная часть учебной дисциплины - совокупность тесно связанных между собой модулей дисциплины.	

Раздел 3. Типовые контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки планируемых результатов обучения по дисциплине. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

Блок А

Вопросы для устного опроса:

Раздел 1. Линейные интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.
1.1. Определение характеристических чисел и собственных функций линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода
1.2. Найти характеристические числа и собственные функции линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Скалярный случай вырожденного ядра)
1.3. Найти характеристические числа и собственные функции линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Векторный случай вырожденного ядра)
1.4. Найти решения линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Скалярный случай вырожденного ядра)
1.5. Найти решения линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Векторный случай вырожденного ядра)
1.6. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Скалярный случай вырожденного ядра)
1.7. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Векторный случай вырожденного ядра)

Раздел 2. Линейные интегральные уравнения Фредгольма с непрерывным ядром
2.1. Найти первые 3 приближения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с непрерывным ядром методом последовательных приближений
2.2. Написать формулу вычисления повторных ядер
2.3. Вычислить первые, вторые и третьи повторные ядра. Примеры.
2.4. Определить область сходимости ряда Неймана
2.5. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с непрерывным ядром

Раздел 3. Линейные интегральные уравнения Вольтерра.
3.1. Найти первые 3 приближения линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра II рода с непрерывным ядром методом последовательных приближений
3.2. Написать формулу вычисления повторных ядер
3.3. Вычислить первые, вторые и третьи повторные ядра. Примеры.
3.4. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра II рода с непрерывным ядром

Раздел 4. Симметричные интегральные уравнения.
4.1. Найти характеристические числа и собственные функции линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с симметричным ядром
4.2. Найти решения линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с симметричным ядром
4.3. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с симметричным ядром

Блок С
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Раздел 1. Линейные интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

Теоретические вопросы:

1. Определение характеристических чисел и собственных функций линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода
2. Найти характеристические числа и собственные функции линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Скалярный случай вырожденного ядра)
3. Найти характеристические числа и собственные функции линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Векторный случай вырожденного ядра)
4. Найти решения линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Скалярный случай вырожденного ядра)
5. Найти решения линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Векторный случай вырожденного ядра)
6. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Скалярный случай вырожденного ядра)
7. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (Векторный случай вырожденного ядра)

Пример практического индивидуального задания

1. Решить и установить разрешимость интегральных уравнений с вырожденным ядром

1.1. $y(x) = \int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x \, \cos t \, y(t)\, \mathrm{d}t + \cos x.$

1.2. $y(x) = \int\limits_0^{1} e^x t \, y(t)\, \mathrm{d}t + e^{-x}.$

1.3. $y(x) = \int\limits_0^{1} \sqrt{xt}\, y(t)\, \mathrm{d}t + 5x.$

1.4. $y(x) = 2\int\limits_0^{1} \frac{x}{t}\, y(t)\, \mathrm{d}t + 3 \ln x.$

2. Найти собственные значения и собственные функции следующих интегральных

Уравнений

2.1. $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} (1 + 2x) y(t)\, \mathrm{d}t.$

2.2. . $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} (1 - x^2)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$

2.3. $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{\pi} x \sin t \, y(t)\, \mathrm{d}t.$

3. Исследовать решения интегральных уравнений при различных значениях параметра λ

3.1. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1(1+2x)y(t)\,dt+1-\frac{3}{2}x.$

3.2. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x\,y(t)\,dt+\sin 2\pi x.$

3.3. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos t\,y(t)\,dt+\cos x.$

Раздел 2. Линейные интегральные уравнения Фредгольма с непрерывным ядром.

Теоретические вопросы:

1. Найти первые 3 приближения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с непрерывным ядром методом последовательных приближений

2. Написать формулу вычисления повторных ядер

3. Вычислить первые, вторые и третьи повторные ядра. Примеры.

4. Определить область сходимости ряда Неймана

5. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с непрерывным ядром

Пример практического индивидуального задания

1. Решить интегральные уравнения методом последовательных приближений

1. $y(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x-t}y(t)\,dt+e^x.$ **2.** $y(x)=\int\limits_0^1 x\,e^{x-t}y(t)\,dt+e^x.$

3. $y(x)=\int\limits_0^1 xt\,y(t)\,dt+\sqrt{1-x^2}.$ **4.** $y(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} x\sin t\,y(t)\,dt+\sin x.$

2. Пользуясь методом итерированных ядер, найти резольвенту. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения при указанном значении λ и проверить его прямой подстановкой.

$y(x)=\lambda\int\limits_0^1 e^{x-t}y(t)\,dt+e^x,\quad \lambda=2.$

. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x\,e^{x-t}y(t)\,dt+e^x,\quad \lambda=-2.$

. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 xt\,y(t)\,dt+\sqrt{1-x^2},\quad \lambda=6.$

3. Построить резольвенты следующих ядер

$K(x,t) = e^{x+t} \quad a=0,\ b=1$

$K(x,t) = \sin x \cos t \quad a=0,\ b=\frac{\pi}{2}$

$K(x,t) = xe^{t} \quad a=-1,\ b=1$

Раздел 3. Линейные интегральные уравнения Вольтерра.

Теоретические вопросы:

1. Найти первые 3 приближения линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра II рода с непрерывным ядром методом последовательных приближений

2. Написать формулу вычисления повторных ядер

3. Вычислить первые, вторые и третьи повторные ядра. Примеры.

4. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра II рода с непрерывным ядром

Пример практического индивидуального задания

1. Решить уравнение Вольтерра, сведя их к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$y(x) = \int_0^x \frac{t}{t+1} y(t)\,\mathrm{d}t + e^x.$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t) y(t)\,\mathrm{d}t + 2\,\mathrm{sh}\,x.$$

$$y(x) = 4\int_0^x (t-x) y(t)\,\mathrm{d}t + 3\cos x.$$

2. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующми ядрами

$K(x,t) = x - t$

$K(x,t) = e^{x-t}$

$K(x,t) = e^{x^2-t^2}$

3. Найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений

$$\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2 - t^2} \varphi(t)\, dt$$

$$\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2 + \cos x}{2 + \cos t} \varphi(t)\, dt$$

$$\varphi(x) = e^{x^2 + 2x} + 2\int_0^x e^{x^2 - t^2} \varphi(t)\, dt$$

Раздел 4. Симметричные интегральные уравнения.
Теоретические вопросы:

1. Найти характеристические числа и собственные функции линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с симметричным ядром
2. Найти решения линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с симметричным ядром
3. Найти решения линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода с симметричным ядром

Пример практического индивидуального задания

1. Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения

1.1. $\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\, dt = \frac{x}{2}$

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \le x \le t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \le x \le 1. \end{cases}$$

1.2. $\varphi(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\, dt = xe^x$

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}(t-1)}{\mathrm{sh}1}, & 0 \le x \le t \\ \frac{\mathrm{sh}t\,\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1}, & t \le x \le 1. \end{cases}$$

2. Для заданных симметричных ядер найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

2.1. $K(x,t) = \begin{cases} (x-2)(t+1), & 0 \le x \le t \\ (t-2)(x+1), & t \le x \le 2. \end{cases}$

2.2. $K(x,t) = \begin{cases} \cos 2t \sin 2x, & 0 \le x \le t \\ \cos 2x \sin 2t, & t \le x \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \sin 2x + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sin x \, \sin t + t \right) y(t) \, \mathrm{d}t.$$

Решение. Ядро данного интегрального уравнения вырожденное. Коэффициент λ примем равным 1. Обозначая

$$p_1(x) = \frac{1}{\pi} \sin x, \quad p_2(x) = 1, \quad q_1(t) = \sin t, \quad q_2(t) = t,$$

найдем коэффициенты уравнений (16) по формулам (15):

$$a_{11} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = 1, \quad a_{12} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = 0,$$

$$a_{21} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t \, \sin t \, \mathrm{d}t = 2, \quad a_{22} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t \, \mathrm{d}t = 0,$$

$$b_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t \, \sin 2t \, \mathrm{d}t = 0, \quad b_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t \, \sin 2t \, \mathrm{d}t = -\pi.$$

Система (16) примет вид

$$\begin{aligned} 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 &= 0 \\ -2c_1 + c_2 &= -\pi \end{aligned}$$

Общим решением этой системы будет $c_1 = C$, $c_2 = 2C - \pi$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, решением заданного интегрального уравнения будет любая функция вида

$$y(x) = \sin 2x + C \cdot \frac{1}{\pi} \sin x + (2C - \pi) \cdot 1 = \sin 2x - \pi + C \left(\frac{1}{\pi} \sin x + 2 \right)$$

с произвольной константой C.

Пример 4. Найти собственные числа и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \left(xt - 2x^2\right) y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Решение. Ядро $K(x,t) = xt - 2x^2$ — вырожденное:

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = -2x^2, \quad q_1(t) = t, \quad q_2(t) = 1.$$

Найдем компоненты матрицы A:

$$a_{11} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad a_{12} = -2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2},$$
$$a_{21} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad a_{22} = -2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Уравнение для нахождения собственных значений (19) примет вид:

$$\det(A - \mu I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \left(\mu + \frac{1}{6}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение имеет только одно собственное значение $\mu = -1/6$ (характеристическое число $\lambda = -6$). Соответствующий ему собственный вектор находим решая систему (18):

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим $c_1 = c_2 = C$, где C — произвольная константа. Согласно формуле (17) собственной функцией интегрального уравнения будет

$$y(x) = -6\left(c_1 x - 2c_2 x^2\right) = Cx(1 - 2x).$$

Пример 5. Исследовать решения интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 \cos t - x \sin t\right) y(t)\,\mathrm{d}t + \cos x$$

в зависимости от значений параметра λ.

Решение. Поскольку ядро интегрального уравнения $K(x,t) = x^2 \cos t - x \sin t$ вырожденное, то его решение можно свести к решению алгебраической системы (16), которая может быть записана в матричной форме:

$$(I - \lambda A)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{B}$ — столбец из коэффициентов b_i. Вычислим коэффициенты матрицы A и столбца $\boldsymbol{B}$:

$$p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = x, \quad q_1(t) = \cos t, \quad q_2(t) = \sin t,$$

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x x^2\,\mathrm{d}x = 4\pi, \qquad a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x x\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x x^2\,\mathrm{d}x = 0, \qquad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x x\,\mathrm{d}x = -2\pi,$$

$$b_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \pi, \qquad b_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Система (20) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 + 2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\det(I - \lambda A) = (1 - 4\pi\lambda)(1 + 2\pi\lambda) = 0$, когда $\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$ или $\lambda = -\dfrac{1}{2\pi}$.

При любых $\lambda \neq -\dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{4\pi}$ система имеет единственное решение

$$c_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \qquad c_2 = 0.$$

В этом случае решением интегрального уравнения будет функция

$$y(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1 - 4\pi\lambda} x^2.$$

Если $\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$, то система

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

решений не имеет. Следовательно, при данном значении λ не имеет решений и интегральное уравнение.

При $\lambda = -\dfrac{1}{2\pi}$ решением системы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

будет $c_1 = \pi/3$, $c_2 = C$ и соответствующее решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \cos x + \lambda(c_1 x^2 + c_2 x) = \cos x - x^2/6 + Cx.$$

Пример 6. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

методом последовательных приближений.

Решение. В качестве нулевого приближения выберем $y_0(x) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \int\limits_0^x (x-t)\cdot 1\cdot \mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{2}, \\ y_2(x) &= 1 - \int\limits_0^x (x-t)\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}. \end{aligned}$$

На n-ом шаге получим

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!},$$

откуда

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!} = \cos x.$$

Решить уравнения Вольтерра методом последовательных приближений.

41. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\,\mathrm{d}t + x^2.$

42. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}.$

43. $y(x) = \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + x.$

44. $y(x) = 1 - \int\limits_0^x \operatorname{tg} t\; y(t)\,\mathrm{d}t.$

Блок В
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

Раздел 1. Линейные интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

1. Решить и установить разрешимость интегральных уравнений с вырожденным ядром

1.1. $y(x)=2\int\limits_0^{\pi/2}\cos(x-t)\,y(t)\,\mathrm{d}t+x.$

1.2. $y(x)=2-3\int\limits_0^{\pi/2}\sin(x-2t)\,y(t)\,\mathrm{d}t.$

1.3. $y(x)=\int\limits_0^{1}\left(e^x t+xe^t\right)\,y(t)\,\mathrm{d}t+e^x.$

1.4. $y(x)=x^2-2\int\limits_0^{1}(3xt-1)y(t)\,\mathrm{d}t.$

2. Найти собственные значения и собственные функции следующих интегральных уравнений

2.1. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos x\cos t\,y(t)\,\mathrm{d}t.$

2.2. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(x+t)\,y(t)\,\mathrm{d}t.$

2.3. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x-t)\,y(t)\,\mathrm{d}t.$

3. Исследовать решения интегральных уравнений при различных значениях параметра λ

3.1. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{1}x\sin 2\pi t\,y(t)\,\mathrm{d}t+x.$

3.2. $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(1+xt)\,y(t)\,\mathrm{d}t+\sin\pi x.$

3.3. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x+t)\,y(t)\,\mathrm{d}t+1$

Раздел 2. Задачи условной оптимизации.

1. Решить интегральные уравнения методом последовательных приближений

1.1 $$y(x) = \int_1^e \frac{\ln t}{x} y(t)\,dt + \ln x.$$

1.2. $$y(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}}\, y(t)\,dt + x^{3/2}.$$

1.3. $$y(x) = \int_0^1 \sqrt{xt}\, y(t)\,dt + x.$$

1.4. $$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin x\, y(t)\,dt + \cos x.$$

2. Пользуясь методом итерированных ядер, найти резольвенту. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения при указанном значении λ и проверить его прямой подстановкой.

2.1. $$y(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} x \sin t\, y(t)\,dt + \sin x, \quad \lambda = 4.$$

2.2. $$y(x) = \lambda \int_1^e \frac{\ln t}{x} y(t)\,dt + \ln x, \quad \lambda = e.$$

2.3. $$y(x) = \lambda \int_0^1 (xt - t)\, y(t)\,dt + \sin \pi x, \quad \lambda = 3.$$

3. Построить резольвенты следующих ядер

3.1. $K(x,t) = (1+x)(1-t)$ $a=-1,\ b=0$

3.2. $K(x,t) = x^2t^2$ $a=-1,\ b=1$

3.3. $K(x,t) = xt$ $a=-1,\ b=1$

Раздел 3. Линейные интегральные уравнения Вольтерра.

1. Решить уравнение Вольтерра, сведя их к обыкновенным дифференциальным уравнениям

1.1.

$$y(x) = 4\int_0^x (t - x) y(t)\,dt + 3\cos x.$$

1.2.

$$y(x) = \int_0^x \left[3(x-t) - (x-t)^2\right] y(t)\,dt + e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1.$$

1.3.

$$y(x) = \int_1^x \frac{4t - 5x}{t^2} y(t)\,dt + \ln x.$$

2. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующми ядрами

2.1. $K(x,t)=\dfrac{1+x^2}{1+t^2}$

2.2. $K(x,t)=\dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$

2.3. $K(x,t)=a^{x-t}$

3. Найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений

3.1. $\varphi(x)=e^x+\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$

3.2. $\varphi(x)=\sin x+2\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$

3.3. $\varphi(x)=x3^x-\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt$

Раздел 4. Симметричные интегральные уравнения.

1. Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения

1.1. $\varphi(x)-2\int_0^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)\,dt=\cos 2x$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

1.2. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)\,dt=1$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi.\end{cases}$$

2. Для заданных симметричных ядер найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

2.1. $K(x,t)=\begin{cases}(\pi\cos t+\sin t)\sin x, & 0\le x\le t\\ (\pi\cos x+\sin x)\sin xt, & t\le x\le \pi.\end{cases}$

2.2. $K(x,t)=\begin{cases}(x+1)(t-3), & 0\le x\le t\\ (t+1)(x-3), & t\le x\le 1.\end{cases}$

Блок D

Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ:

1. Дайте определение интегрального уравнения.
2. Чем интегральное уравнение отличается от дифференциального уравнения?
3. Что называется **ядром интегрального уравнения**?
4. Что называется **свободным членом интегрального уравнения**?
5. Дайте определение **интегрального уравнения Фредгольма**.
6. Дайте определение **интегрального уравнения Вольтерра**.
7. Что называется **симметричным ядром**?
8. Что называется **вырожденным ядром**?
9. Что называется **резольвентой интегрального уравнения**?
10. В чем состоит метод последовательных приближений?
11. Что называется собственным значением интегрального оператора?
12. Что называется собственными функциями интегрального оператора?

Задачи/задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ:

13. Решите интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$

14. Найдите решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)dt$$

Задачи/задания для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ:

15. Основные свойства интегральных операторов.
16. Свойства симметричных ядер интегральных уравнений.
17. Теоремы существования и единственности решения интегральных уравнений Фредгольма.
18. Теоремы Фредгольма и их значение в теории интегральных уравнений.
19. Основные методы решения интегральных уравнений.
20. Метод вырожденных ядер (теоретическая схема метода).
21. Метод резольвенты в решении интегральных уравнений.

Раздел 4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (рубежный контроль)

№	Наименование показателя	Отметка (в %)

Теоретическая часть		0-100
1	Вопрос 1	0-30
2	Вопрос 2	0-30
3	Вопрос 3	0-30
4	Дополнительный вопрос	0-10
Практическая часть		
1	Задача 1	0-100
2	Задача 2	0-100
3	Задача 3	0-100
Всего баллов		**Среднее арифм. %**

Примечание: Шкала оценивания решения задачи.

Пример.

1. Решить и установить разрешимость интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) = \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x \, \cos t \, y(t) \, \mathrm{d}t + \cos x.$$

2. Найти собственные значения и собственные функции следующего интегрального уравнения:

$$. \, y(x) = \lambda \int_0^1 (1 - x^2) \, y(t) \, \mathrm{d}t.$$

3. Исследовать решения интегрального уравнения при различных значениях параметра лямбда

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (1 + 2x) y(t) \, \mathrm{d}t + 1 - \frac{3}{2} x.$$

Содержание верного решения задачи и указания к оцениванию

Элементы ответа: (допускаются иные формулировки ответа, не искажающие его смысла).

1) Записано решение 1-задачи и указан алгоритм решения

2) Найдены собственные значения и собственные функции и указан алгоритм нахождения

3) Исследовано решения интегрального уравнения при различных значениях параметра и указан алгоритм решения

Указания к оцениванию / %

- Решение правильное и полное, включающее все приведенные выше /85-100 %
- Решение включает 1-й, 2-й и 3-й из приведенных выше элементов / 70-84 %
- Решение неполное, включает 1-й и 2-й или 1-й и 3-й из приведенных выше элементов / 60-69 %
- Все элементы записаны неверно или записан правильно только один элемент (1-й, 2-й или 3-й) / 0-60 %

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАЧ (текущий контроль)

- 85-100 % - Решение всех задач правильное и полное.
- 70-84 % - Решение включает 1-й, 2-й и 3-й из приведенных задач.
- 60-69 % - Решение неполное, включает 1-й и 2-й,1-й и 3-й или 2-й и 3-й из приведенных задач.
- 31-60 % - Все элементы записаны неверно или записан правильно только один элемент (1-й, 2-й или 3-й).
- 0-30 % - Не было попытки решить задачу.

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ УСТНОГО ОПРОСА (промежуточный контроль – «ЗНАТЬ»)

При оценке устных ответов на проверку уровня обученности ЗНАТЬ учитываются следующие критерии:

1. Знание основных процессов изучаемой предметной области, глубина и полнота раскрытия вопроса.
2. Владение терминологическим аппаратом и использование его при ответе.
3. Умение объяснить сущность явлений, событий, процессов, делать выводы и обобщения, давать аргументированные ответы.
4. Владение монологической речью, логичность и последовательность ответа, умение отвечать на поставленные вопросы, выражать свое мнение по обсуждаемой проблеме.

(16-20 баллов) выставляется, если студент ответил на все теоретические вопросы в билете и при этом:

1. Присутствует : 1)правильность, полнота и глубина ответа (верное и глубокое изложение фактов, понятий, иллюстрация ответа конкретными примерами; отсутствие необходимости в уточняющих вопросах); 2) логическая последовательность изложения материала в процессе ответа.
2. Или студент не выполнил одного из перечисленных требований, но ответил правильно на один дополнительный вопрос в пределах программы.
3. Или не выполнил два из перечисленных требований, но правильно ответил на два дополнительных вопроса в пределах программы.

(10-15 баллов) выставляется, если студент ответил на все теоретические вопросы в билете, но при этом либо отсутствует правильность, полнота и глубина ответа (верное и глубокое изложение фактов, понятий, иллюстрация ответа конкретными примерами; отсутствие необходимости в уточняющих вопросах);
либо нет логической последовательности изложения материала в процессе ответа; в некоторых заданиях допущены арифметические ошибки и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.

(5-10 баллов) выставляется, если студент ответил на 2 теоретических вопросов в билете, а в остальных допущены грубые ошибки и неправильно ответил на два дополнительных вопроса в пределах программы.

(1-4 баллов) выставляется, если студент ответил менее 2 теоретических вопросов, а в остальных допущены грубые ошибки и не может ответить ни на один дополнительный вопрос в пределах программы

ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
(промежуточный контроль – «УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ»)

При оценке ответов на проверку уровня обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ учитываются следующие критерии:

(8-10 баллов) выставляется, если студент выполнил все задания в билете и при этом:

1. Присутствует: 1) решил все предложенные ему задачи;
2) указано решение задачи.
2. Или студент не выполнил одного из перечисленных требований, но ответил правильно на один дополнительный вопрос по решению задач.
3. Или не выполнил два из перечисленных требований, но правильно ответил на два дополнительных вопроса по решению задач.

(4-7 баллов) выставляется, если студент выполнил 3-4 заданий в билете, в некоторых заданиях допущены арифметические ошибки.

(1-3 баллов) выставляется, если студент выполнил 1-2 задания в билете, а в остальных допущены грубые ошибки.

(0 баллов) выставляется, если студент не выполнил не одного задания в билете, даже не было попытки решить задачи.

Раздел 5. Методические указания для обучающегося по освоению дисциплины.Математические методы решения прикладных задач

ПРАВИЛА КОНСПЕКТИРОВАНИЯ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА.

В ходе лекционных занятий обучающийся должен вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. Высокую скорость конспектирования могут обеспечить сокращения (общепринятые, аббревиатуры, стрелочки, указывающие на логические связи, опорные слова, ключевые слова, схемы и т.д.). Составление конспекта призвано облегчить запоминание текста. Обучающимся рекомендуется после его составления прочесть зафиксированные тезисы несколько раз для полного их усвоения. Допускается подчеркивание тезисов, содержащих основные мысли, выделение их цветным маркером.

Указания по конспектированию лекций:

-не нужно стараться записать весь материал, озвученный преподавателем. Как правило, лектором делаются акценты на ключевых моментах лекции для начала конспектирования;

-конспектирование необходимо начинать после оглашением главной мысли лектором, перед началом ее комментирования;

-выделение главных мыслей в конспекте другим цветом целесообразно производить вне лекции с целью сокращения времени на конспектирование на самой лекции;

-применение сокращений приветствуется; -нужно избегать длинных и сложных рассуждений;

-дословное конспектирование отнимает много времени, поэтому необходимо опускать фразы, имеющие второстепенное значение;

-если в лекции встречаются неизвестные термины, лучше всего отметить на полях их существование, оставить место для их пояснения и в конце лекции задать уточняющий вопрос лектору.

Конспектирование и рецензирование, таким образом, это процесс выделения основных мыслей текста, его осмысления и оценки содержащейся в нем информации. Данный вид учебной работы является видом индивидуальной самостоятельной работы студента.

РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Для решения, предложенного на занятии преподавателем задания лаборант должен изучить темы пройденных лекций, а также самостоятельно проработать их и дополнить конспект лекций по данной тематике. При решении практического задания необходимо выполнить расчёты, сделать обоснованный, а также разработать рекомендации по повышению эффективности данного проекта в случае получения неудовлетворительного показателя. Задание выдается преподавателем на занятии.

МОДУЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ВКЛЮЧАЕТ:

1. **Текущий контроль:** усвоение учебного материала на аудиторных занятиях (лекциях, практических, в том числе учитывается посещение и активность) и выполнение обязательных заданий для самостоятельной работы

2. **Рубежный контроль:** проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом. Выполнение модульных контрольных заданий проводится в письменном виде и является обязательной компонентой модульного контроля.
3. **Промежуточный контроль**: завершенная задокументированная часть учебной дисциплины совокупность тесно связанных между собой зачетных модулей.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРОМЕЖУТОЧНОМУ КОНТРОЛЮ

- При явке на зачёт и экзамен студенты обязаны иметь при себе зачётные книжки, которые они предъявляют экзаменатору в начале зачета или экзамена.
- Преподавателю предоставляется право поставить зачёт без опроса по билету тем студентам, которые набрали более 60 баллов за текущий и рубежный контроли.
- На промежуточном контроле студент должен верно ответить на теоретические вопросы билета и решить ситуационную задачу.
- Студенты могут использовать технические средства, справочно-нормативную литературу, наглядные пособия, учебные программы.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ТЕКУЩЕМУ КОНТРОЛЮ

Для понимания материала и качественного его усвоения рекомендуется такая последовательность действий:

1. После прослушивания лекции и окончания учебных занятий, при подготовке к занятиям следующего дня, нужно сначала просмотреть и обдумать текст лекции, прослушанной сегодня.
2. При подготовке к следующей лекции, нужно просмотреть текст предыдущего материала, подумать о том, какая может быть тема следующей лекции.
3. В течение недели выбрать время для работы с рекомендуемой литературой.
4. При подготовке к спратическим занятиям следующего дня, необходимо сначала прочитать основные понятия и подходы по теме домашнего задания. При выполнении задания нужно сначала понять, что в нем требуется, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения.
5. Для подготовки к пратическим занятиям и выполнению самостоятельной работы необходимо сначала прочитать основные понятия и подходы по теме задания. Рекомендуется использовать методические указания по курсу, конспекты лекций. При выполнении задания нужно сначала понять, что требуется в нем, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план выполнения, а затем приступить к заданию и сделать качественный вывод. Рекомендуется использовать наборы учебных обучающих программ;
6. При подготовке к промежуточному и рубежному контролям нужно изучить теорию: определения всех понятий и подходы к оцениванию до состояния понимания материала и самостоятельно выполнить несколько типовых заданий.
7. Отработки пропущенных занятий.

Контроль над усвоением студентами материала учебной программы дисциплины осуществляется систематически преподавателем кафедры и отражается в журнале преподавателя и в баллах. Студент, получивший неудовлетворительную оценку по текущему материалу, обязан подготовить данный раздел и ответить по нему преподавателю на индивидуальном собеседовании. При фронтальном обучении неудовлетворительная оценка должна быть отработана в течение месяца со дня ее получения, при цикловом обучении - до конца цикла.

Пропущенная без уважительных причин лекция должна быть отработана методом устного опроса лектором или подготовки реферата по материалам пропущенной лекции в течение месяца со дня пропуска.Возможны и другие методы отработки пропущенных лекций (опрос на практических, тестовый контроль и т.д.).

Отработка практических занятий.

- Каждое занятие, пропущенное студентом без уважительной причины, отрабатывается в обязательном порядке. Отработки проводятся по расписанию кафедры, согласованному с деканатом.
- При фронтальном обучении пропущенные занятия должны быть отработаны в течение 10 дней со дня пропуска, при цикловом обучении - до конца цикла. Пропущенные студентом без уважительной причины практические занятия отрабатываются не более одного занятия в день. Пропущенные занятия по уважительной причине (по болезни, пропуски с разрешения деканата) отрабатываются по тематическому материалу без учета часов.
- Студент, не отработавший пропуск в установленные сроки, допускается к очередным занятиям только при наличии разрешения декана или его заместителя в письменной форме. Не разрешается устранение от очередного практического занятия студентов, слабо подготовленных к данным занятиям.
- Для студентов, пропустивших практическое занятия из-за длительной болезни, отработка должна проводиться после разрешения деканата по индивидуальному графику, согласованному с кафедрой.
- В исключительных случаях (участие в межвузовских конференциях, соревнованиях, олимпиадах, дежурство и др.) декан и его заместитель по согласованию с кафедрой могут освобождать студентов от отработок некоторых пропущенных занятий.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Для написания контрольных работ студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассматриваемые преподавателем на лекционных занятиях, разобранных на практических занятиях. Контрольная работа состоит из 3-х теоретических вопросов и из 3-х практических задач.

ЗАДАЧА

Для выполнения задач студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассматриваемые преподавателем на лекционных занятиях, разобранных на практических занятиях. Задача состоит из более 3-х задач.